

Convexes hyperboliques et quasiisométries

Yves Benoist

ABSTRACT Hyperbolic convex sets and quasiisometries

For any $m \geq 3$, we construct properly convex open sets Ω in the real projective space \mathbb{P}^m whose Hilbert metric is Gromov hyperbolic but is not quasiisometric to the hyperbolic space \mathbb{H}^m . We show that such examples can not exist for $m = 2$.

Some of our examples are divisible, i.e. there exists a discrete group Γ of projective transformations preserving Ω with a compact quotient $\Gamma \backslash \Omega$. The open set Ω is strictly convex but the group Γ is not isomorphic to any cocompact lattice in the isometry group of \mathbb{H}^m .

1 Introduction

Un ouvert proprement convexe Ω de l'espace projectif réel \mathbb{P}^m est dit *divisible*, s'il existe un groupe discret sans torsion Γ de transformations projectives préservant Ω tel que le quotient $M := \Gamma \backslash \Omega$ soit compact. On dit aussi que Γ divise Ω . On sait, grâce à [27], [38], [30], [26] et [3] qu'il existe de nombreux ouverts convexes divisibles avec Γ Zariski dense, Ω strictement convexe et Γ isomorphe à un réseau cocompact de $O(m, 1)$. L'un des but de cet article est de répondre à la question suivante

Question 1 *Existe-t-il des ouverts strictement convexes Ω de \mathbb{P}^m qui sont divisés par un sous-groupe discret Γ de $SL(m+1, \mathbb{R})$ où Γ n'est pas isomorphe à un réseau cocompact de $O(m, 1)$?*

Nous verrons que la réponse à cette question est positive. Les exemples que nous construisons sont de dimension 4 (proposition 3.1). De tels exemples existent probablement en toute dimension $m \geq 4$. Notons que la conjecture d'hyperbolisation de Thurston et le fait 2.6 impliquent que de tels exemples ne peuvent pas exister pour $m = 3$.

Ces exemples sont aussi des exemples pour la question suivante (proposition 3.1.c).

Question 2 *Existe-t-il des ouverts proprement convexes Ω de \mathbb{P}^m dont la métrique de Hilbert est Gromov hyperbolique mais n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m ?*

La réponse à cette question est donc positive. Plus précisément, nous verrons que de tels exemples existent en toute dimension $m \geq 3$ (proposition 6.3). Néanmoins, nous verrons qu'il n'existe pas de tels exemples en dimension $m = 2$ (proposition 5.1).

Cette question fait suite à l'article [7] dans lequel je décris les ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^m dont la métrique de Hilbert est Gromov hyperbolique ainsi qu'à l'article [15] dans lequel Colbois et Verovic montrent que, lorsque le bord de Ω est C^2 à Hessien défini positif, la métrique de Hilbert est toujours quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m .

Disons un mot sur les démonstrations. La construction des exemples pour la question 1 repose sur:

- le théorème de Tits-Vinberg qui permet, à partir de certaines réflexions projectives par rapports aux faces d'un polyèdre convexe de \mathbb{P}^m de construire un groupe de Coxeter qui divise un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^m ,
- le critère de Moussong qui décrit les groupes de Coxeter qui sont Gromov hyperboliques,
- ainsi qu'un choix convenable du groupe de Coxeter (figure 2).

La construction des exemples pour la question 2 et la démonstration de leur inexistence en dimension 2 reposent sur:

- le critère de [7] qui décrit les convexes Ω qui sont Gromov hyperboliques,
- le lien entre les quasiisométries d'espaces Gromov hyperboliques et les quasisymétries entre leurs bords,
- ainsi qu'une estimation du produit de Gromov sur le bord de Ω (lemme 5.2).

Ces questions seront donc le prétexte d'un petit voyage mathématique au cours duquel nous aurons l'occasion d'apercevoir de jolis points de vue sur des sujets variés : les métriques de Hilbert, les espaces Gromov hyperboliques, les convexes divisibles, les groupes de Coxeter, les quasiisométries et les quasisymétries. Les parties 3, 5 et 6 contiennent les démonstrations proprement dites des propositions 3.1, 5.1 et 6.3. Elles sont précédées des sections 2 et 4 qui contiennent un survol des résultats qu'elles utilisent.

Je remercie M. Bonk, M. Bourdon, B. Kleiner et F. Paulin pour d'intéressantes discussions sur ce sujet.

2 Espaces hyperboliques et groupes de Coxeter

Précisons dans cette partie quelques définitions bien classiques et rappelons quelques faits bien utiles.

2.1 Ouverts convexes divisibles

Notons $\mathbb{S}^m = \mathbb{S}(\mathbb{R}^{m+1}) := \{\text{demidroites de } V\}$ la *sphère projective* de \mathbb{R}^{m+1} . C'est le revêtement à deux feuillets connexe de l'espace projectif \mathbb{P}^m . Soit $\text{SL}^\pm(m+1, \mathbb{R})$ le

groupe des transformations projectives de \mathbb{S}^m : c'est aussi le quotient du groupe linéaire $GL(m+1, \mathbb{R})$ par le groupe des homothéties positives. Un ouvert Ω de \mathbb{S}^m est dit *convexe* si son intersection avec tout grand cercle de \mathbb{S}^m est connexe. Il est dit *proprement convexe* si, en outre, il existe une hypersphère projective de \mathbb{S}^m qui ne rencontre pas l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω . Autrement dit, Ω s'identifie dans une carte affine convenable à un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^m . Il est dit *strictement convexe* si le bord $\partial\Omega := \overline{\Omega} - \Omega$ ne contient pas de segments non triviaux. On dit qu'un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{S}^m est *divisible* s'il existe un sous-groupe discret Γ de $SL^\pm(m+1, \mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est compact. On dit aussi que Γ *divise* Ω .

Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^{m+1} de signature $(m, 1)$ et Ω_0 une des deux composantes connexes de l'ouvert $\{[v] \in \mathbb{S}^m / q(v) < 0\}$. Nous appellerons *ellipsoïde* un tel ouvert convexe de \mathbb{S}^m . C'est le modèle projectif de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^m . L'ellipsoïde est un ouvert strictement convexe divisible. En effet, il est divisé par tous les réseaux cocompacts du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^m) \simeq O^+(m, 1)$ des isométries de \mathbb{H}^m .

Signalons que les articles [3], [4], [5] et [6] sont consacrés à l'étude des ouverts proprement convexes divisibles.

- Dans [3], on étudie le cas où Ω est strictement convexe.
- Dans [4], on décrit l'adhérence de Zariski des groupes Γ .
- Dans [5], on montre une propriété de fermeture pour "l'espace des déformations" de ces convexes divisibles.
- Dans [6], on décrit la structure du bord et du quotient M en dimension $m = 3$.

2.2 Quasiisométries

Une application f entre deux espaces métriques (X, d) et (X', d') est dite *quasiisométrique* si il existe des constantes $\lambda > 1$ et $C > 0$ telles que, pour tous x, y dans X , on a $\lambda^{-1}d(x, y) - C \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$. Une application quasiisométrique f est dite *quasisurjective* si il existe une constante $C > 0$ telle que tout point de X' est à distance au plus C d'un point de $f(X)$. On dit aussi que f est une *quasiisométrie*.

Deux espaces métriques (X, d) et (X', d') sont dits *quasiisométriques* s'il existe une application quasiisométrique et quasisurjective f de X dans X' . Il est équivalent de dire qu'il existe deux applications quasiisométriques $f : X \rightarrow X'$ et $g : X' \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont à distance bornée de l'identité.

Donnons tout d'abord un exemple. Soit H un groupe de type fini. Choisissons une famille génératrice finie S de H telle que $S = S^{-1}$ et notons d_S la distance sur H pour laquelle la distance $d_S(h_1, h_2)$ entre deux éléments de H est la longueur minimale d'une expression de l'élément $h_1^{-1}h_2$ comme produit d'éléments de S . On note $G(H, S)$ le graphe de Cayley associé: ses sommets sont les éléments de H et deux sommets h_1 et h_2 sont joints par une arête si et seulement si l'élément $h_1^{-1}h_2$ est dans S . On munit $G(H, S)$ de sa distance naturelle: le graphe de Cayley est alors un espace métrique géodésique et ses arêtes sont de longueur 1. Si S' est une autre famille génératrice finie de H , les graphes de

Cayley $G(H, S)$ et $G(H, S')$ sont quasiisométriques. Autrement dit, les distances d_S et $d_{S'}$ sur H sont quasiisométriques. Ceci permet de parler d'espace métrique quasiisométrique à H .

Nous aurons besoin du fait suivant annoncé par Gromov dans [22] et démontré par Cannon et Cooper dans [13]. Il est basé sur l'identification due à Mostow et Tukia du groupe des quasiisométries de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^m avec le groupe des transformations quasiconformes de la sphère $\mathbb{S}^{m-1} = \partial\mathbb{H}^m$. Le point clef est la description par Sullivan pour $m = 3$ et Tukia pour $m \geq 3$ dans [36] des groupes uniformément quasiconformes de la sphère \mathbb{S}^{m-1} agissant de façon cocompacte sur les triplets de points distincts (voir [19]).

Fait 2.1 *Soit Γ un groupe de type fini qui est quasi-isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m . Alors il existe un morphisme τ de Γ dans le groupe $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^m) \simeq \text{O}^+(m, 1)$ dont le noyau est fini et l'image un réseau cocompact de G .*

Bien que nous n'en aurons pas besoin, signalons que ce fait est un cas particulier du fait plus général suivant qui est l'aboutissement de travaux de Pansu, Schwartz, Kleiner, Leeb, Farb et Eskin (voir encore [19] pour un survey de cette question). Rappelons qu'un réseau Λ d'un groupe de Lie semisimple est *irréductible* si l'intersection de Λ avec les sous-groupes distingués propres de G sont finis.

Fait 2.2 *Soit Γ un groupe de type fini qui est quasi-isométrique à un réseau irréductible Λ d'un groupe de Lie semisimple G . Alors il existe un morphisme τ de Γ dans G dont le noyau est fini et l'image un réseau Λ' de G . En outre,*

- si Λ est cocompact alors Λ' aussi,
- si Λ n'est pas cocompact et si $\dim G > 3$, alors Λ et Λ' sont commensurables (i.e. ont un sous-groupe d'indice fini commun).

2.3 Espaces Gromov hyperboliques

Nous aurons besoin de la définition et de quelques propriétés des espaces Gromov hyperboliques. Nous les rappelons ci-dessous, mais nous renvoyons à l'article original de Gromov [23] ou aux deux monographies [16] et [20] pour plus de détails.

Un espace métrique (X, d) est dit *propre* si ses boules fermées sont compactes. Il est dit *géodésique* si, pour tout couple (x, y) de points de X , il existe une isométrie de l'intervalle $[0, d(x, y)]$ dans X qui envoie les extrémités sur les points x et y . On appelle géodésique de x à y l'image d'une telle isométrie et on notera $[x, y]$ une telle géodésique bien qu'elle ne soit pas toujours unique.

Définition 2.3 *Un espace métrique géodésique X est dit hyperbolique si il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout triangle géodésique $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ de X et tout point u de $[x, y]$ la distance $d(u, [x, z] \cup [z, y])$ est majorée par δ . Un groupe H engendré par une partie finie S est dit hyperbolique si son graphe de Cayley $G(H, S)$ est hyperbolique.*

Le fait suivant, dû à Gromov, assure que cette définition ne dépend pas de la famille génératrice S de H .

Fait 2.4 (cf. [20] thm 5.12) *Un espace métrique géodésique qui est quasiisométrique à un espace métrique Gromov hyperbolique est aussi Gromov hyperbolique.*

Nous utiliserons ce fait simultanément avec le suivant.

Fait 2.5 (cf. [20] prop.3.19) *Soit (X, d) un espace métrique géodésique propre et Γ un groupe discret opérant proprement par isométries sur X avec quotient $\Gamma \backslash X$ compact. Alors X est quasiisométrique à Γ .*

2.4 Distance de Hilbert

Chaque ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{S}^m est muni d'une distance d_Ω appelée *distance de Hilbert* et définie par, pour tout x, y dans Ω , $d_\Omega(x, y) = \log([x; y; a; b])$ où a et b sont les deux points du bord de Ω qui sont sur la droite $\langle x, y \rangle$ et où $[x; y; a; b] = \frac{ax}{ay} \frac{bx}{by}$ est le *birapport* de ces quatre points.

Remarquons que les segments de Ω sont des géodésiques pour d_Ω . L'espace métrique (Ω, d_Ω) est donc propre et géodésique.

Remarquons aussi que toute transformation projective qui préserve Ω induit une isométrie pour la distance d_Ω .

Fait 2.6 ([3] prop. 2.5) *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}^\pm(\mathbb{R}^{m+1})$ qui divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}(\mathbb{R}^m)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) Γ est Gromov hyperbolique.
- (ii) (Ω, d_Ω) est Gromov hyperbolique.
- (iii) Ω est strictement convexe.

2.5 Groupes de Coxeter

Nous aurons besoin de quelques rappels sur les groupes de Coxeter.

Un *système de Coxeter* (S, M) est un couple formé d'un ensemble fini S et d'une matrice symétrique $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ à coefficients diagonaux $m_{s,s} = 1$ et à coefficients non diagonaux $m_{s,t} \in \{2, 3, 4, \dots, \infty\}$. Ces données déterminent un *groupe de Coxeter* W_S défini par des générateurs $(g_s)_{s \in S}$ et des relations $(g_s g_t)^{m_{s,t}} = 1$ pour $s, t \in S$ tels que $m_{s,t} \neq \infty$. Le *graphe de Coxeter* est le graphe qui a pour sommets S , avec une arête entre deux points s et t lorsque $m_{s,t} \neq 2$, arête que l'on indexe par $m_{s,t}$. Le *rang* du système de Coxeter est le cardinal de S .

Notons E_S l'espace vectoriel libre \mathbb{R}^S sur S et $(e_s)_{s \in S}$ sa base canonique. La *forme de Tits* est la forme bilinéaire symétrique B_S définie sur E_S par

$$B_S(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t}) \quad \text{pour tous } s, t \in S.$$

Il est facile de vérifier que les formules

$$\sigma_S(g_s)v = v - 2B_S(e_s, v)e_s \quad s \in S, v \in E_S$$

définissent un homomorphisme de groupes σ_S qui est la *représentation géométrique* de W_S dans le groupe orthogonal $O(B_S)$.

Selon un théorème de Tits, cette représentation est fidèle et son image $\sigma_S(W_S)$ est un sous-groupe discret du groupe de Lie $O(B_S)$. Une partie $S' \subset S$ définit un *sous-système de Coxeter* et le groupe $W_{S'}$ est naturellement un sous-groupe de W_S . Deux sous-systèmes de Coxeter S_1 et S_2 sont *orthogonaux* si les sous-groupes W_{S_1} et W_{S_2} commutent. Un système de Coxeter est *irréductible* si il n'existe pas de partition de S en deux sous-systèmes de Coxeter orthogonaux. Un système de Coxeter est *fini* si le groupe de Coxeter W_S est fini ou, de façon équivalente, si la forme de Tits est définie positive. Un système de Coxeter est *affine* si il est infini, irréductible et si la forme de Tits est positive. La classification des systèmes de Coxeter finis et des systèmes de Coxeter affines est bien connue. Pour tout ceci, voir [11] ou [39].

Voici un critère très commode qui permet de savoir si un groupe de Coxeter est Gromov hyperbolique (voir [18] corollary 6.8.3).

Fait 2.7 (Moussong) *Pour tout groupe de Coxeter W_S , les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) W_S est Gromov hyperbolique.

ii) W_S ne contient pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 .

iii) Le système de Coxeter S ne contient pas de sous-système affine de rang au moins 3 et ne contient pas de paires S_1, S_2 de sous-systèmes infinis qui sont orthogonaux.

Remarque En pratique, pour vérifier qu'un groupe de Coxeter W_S est Gromov hyperbolique, on dresse la liste des sous-systèmes de Coxeter infinis minimaux de S et on vérifie qu'ils ne sont pas affines de rang au moins 3 et que deux d'entre eux ne sont jamais orthogonaux. On utilise pour cela les tables des diagrammes des groupes de Coxeter finis et des groupes de Coxeter affines (voir par exemple [39] p.202-203).

2.6 Groupes de réflexions projectives

Rappelons maintenant le théorème de Tits-Vinberg qui décrit à quelles conditions des réflexions projectives σ_i par rapports aux faces d'un polyèdre convexe P engendrent un groupe discret Γ qui divise un ouvert proprement convexe Ω .

Soit $P \subset \mathbb{S}^m$ un *polyèdre convexe fermé* de dimension m , i.e. l'image dans \mathbb{S}^m d'un cône polyédral convexe fermé de \mathbb{R}^{m+1} . On appelle *k-face* de P , l'adhérence d'une facette de dimension k . Une *face* est une $(m - 1)$ -face. Soit S l'ensemble des faces de P . Pour chaque face s , on choisit une réflexion projective $\sigma_s = Id - v_s \otimes \alpha_s$ avec $\alpha_s \in V^*$, $v_s \in V$

et $\alpha_s(v_s) = 2$ qui fixe s . Un choix convenable des signes permet de supposer que P est défini par les inégalités $(\alpha_s \leq 0)_{s \in S}$. Soit $a_{s,t} := \alpha_s(v_t)$, pour $s, t \in S$. Soit Γ le groupe engendré par ces réflexions σ_s .

Si on veut que les images $\gamma(P)$ pavent une partie de \mathbb{S}^m (i.e. que les intérieurs $\gamma(\overset{\circ}{P})$ soient disjoints), une étude locale autour des facettes de codimension 2 prouve que les conditions suivantes sont nécessaires:

pour toutes faces $s, t \in S$ telles que $\dim(s \cap t) = m - 2$, on a

$$a_{s,t} \leq 0 \text{ et } (a_{s,t} = 0 \Leftrightarrow a_{t,s} = 0) \quad (1)$$

$$a_{s,t}a_{t,s} \geq 4 \text{ ou } a_{s,t}a_{t,s} = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \text{ avec } m_{s,t} \geq 2 \text{ entier} \quad (2)$$

Le fait suivant affirme que réciproquement ces conditions sont suffisantes. Soit (S, M) le système de Coxeter donné par ces entiers $m_{s,t}$ et complété par $m_{s,t} = \infty$ lorsque $s \cap t = \emptyset$ ou lorsque $\text{codim}(s \cap t) \neq 2$ ou encore lorsque $a_{s,t}a_{t,s} \geq 4$. Pour tout sommet x de P , on note $S_x := \{s \in S \mid x \in s\}$.

Fait 2.8 (Tits, Vinberg) *Soit P un polyèdre proprement convexe de \mathbb{S}^m et, pour chaque face s de P , soit $\sigma_s = Id - v_s \otimes \alpha_s$ une réflexion projective qui fixe cette face s . Supposons que les conditions (1) et (2) sont satisfaites pour chaque s, t tel que $\text{codim}(s \cap t) = 2$. Soit Γ le groupe engendré par ces réflexions σ_s . Alors*

- (a) *Les polyèdres $\gamma(P)$, pour γ dans Γ , pavent un ensemble convexe Ω de \mathbb{S}^m .*
- (b) *Le morphisme $\sigma : W_S \rightarrow \Gamma$ donné par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.*
- (c) *Le groupe Γ est discret.*
- (d) *Le convexe Ω est ouvert et Γ divise Ω si et seulement si,*

$$\text{pour tout sommet } x \text{ de } P, \text{ le groupe de Coxeter } W_{S_x} \text{ est fini.} \quad (3)$$

- (e) *Lorsque le graphe de Coxeter est connexe, que W_S est infini et que les vecteurs v_s engendrent V , l'ouvert Ω est proprement convexe.*

Pour la démonstration on renvoie à [11] et [38].

3 Convexes hyperboliques divisibles

Nous construisons dans cette partie un ouvert proprement convexe de \mathbb{S}^4 qui est Gromov hyperbolique mais qui n'est pas quasiisométrique à un espace hyperbolique (proposition 3.1). Cet ouvert est divisible.

Pour cela on choisira un polyèdre de \mathbb{S}^4 et des réflexions projectives par rapport à ses faces qui, grâce au théorème de Tits-Vinberg, engendrent un groupe de Coxeter auquel le critère de Moussong s'applique mais auquel le fait 2.1 ne s'applique pas.

Pour la clarté de l'exposition, nous choisirons de ne présenter dans ce texte que l'exemple qui nous a paru le plus simple. Nous verrons plus loin comment le modifier pour obtenir d'autres exemples.

Notons $c_7 := \cos(\pi/7) \simeq 0.901\dots$, $s_7 := \sin(\pi/7) \simeq 0.434\dots$ et introduisons la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 6}$ et la matrice de Coxeter $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 6}$ données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2c_7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que les équations (1) et (2) sont satisfaites. Le système de Coxeter associé à la matrice M est de rang 6. Son diagramme est donné dans la figure 1.

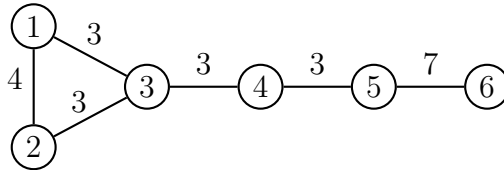


Figure 1: Le diagramme de Coxeter de Γ

Choisissons le paramètre $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ de sorte que le déterminant de A s'annule:

$$\det(A) = 2(2a + 1/a)(1 - 4s_7^2) - 8s_7^2 = 0 \quad (4)$$

Cette équation (4) admet en effet une unique solution $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ car on a $2s_7^2/(1 - 4s_7^2) > \sqrt{2}$. La matrice A est alors de rang 5. On peut donc trouver six vecteurs v_i de \mathbb{R}^5 et six formes linéaires α_i sur \mathbb{R}^5 tels que $\alpha_i(v_j) = a_{i,j}$, pour tout $1 \leq i, j \leq 6$. Ces six vecteurs et ces six formes linéaires sont uniques à un élément de $\text{GL}(5, \mathbb{R})$ près. En outre, les cinq formes linéaires α_i , $i \neq 3$, sont linéairement indépendantes car les cinq colonnes correspondantes de A sont linéairement indépendantes.

On prend pour polyèdre P le polyèdre de \mathbb{S}^4 qui est défini par les six inégalités $\alpha_i \leq 0$, pour $1 \leq i \leq 6$. Ce polyèdre a six faces. Les six symétries sont alors données par $\sigma_i = Id - v_i \otimes \alpha_i$.

Décrivons les vecteurs v_i et les formes linéaires α_i de façon encore plus explicite.

Dans une base e_1, \dots, e_5 de \mathbb{R}^5 duale de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, on a donc

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = e_1^* & v_1 = 2e_1 - e_2 \\
\alpha_2 = e_2^* & v_2 = -2e_1 + 2e_2 \\
\alpha_3 = -\frac{2a+1}{2}e_1^* - (a+1)e_2^* + \frac{2s_7^2}{1-4s_7^2}e_3^* + \frac{1}{1-4s_7^2}e_4^* + \frac{c_7}{1-4s_7^2}e_5^* & v_3 = -a^{-1}e_1 - e_2 - e_3 \\
\alpha_4 = e_3^* & v_4 = 2e_3 - e_4 \\
\alpha_5 = e_4^* & v_5 = -e_3 + 2e_4 - 2c_7e_5 \\
\alpha_6 = e_5^* & v_6 = -2c_7e_4 + 2e_5
\end{array}$$

Dans une base colinéaire à la base précédente, le polyèdre P est donc le prisme tronqué:

$$P := \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{S}^4 \mid x_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, \dots, 5 \text{ et } x_1 + x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5 \}$$

Le polyèdre P est isomorphe à $T^2 \times T^2$ car on a les identifications:

$$\begin{aligned}
P &\simeq \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in [0, \infty[^5 \mid x_1 + x_2 \leq 1 \text{ et } x_3 + x_4 + x_5 = 1 \} \\
&\simeq \{(x_1, x_2) \in [0, \infty[^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\} \times \{(x_3, x_4, x_5) \in [0, \infty[^3 \mid x_3 + x_4 + x_5 = 1 \}.
\end{aligned}$$

Le point c) de la proposition suivante affirme que cet exemple est bien celui que nous cherchions.

Proposition 3.1 *On rappelle que $m = 4$. Soient $\Gamma \subset \text{SL}^\pm(m+1, \mathbb{R})$ le groupe engendré par les réflexions $\sigma_1, \dots, \sigma_{m+2}$ et Ω l'union des images γP pour $\gamma \in \Gamma$. Alors*

- a) *Cet ensemble Ω est un ouvert proprement convexe de \mathbb{S}^m et le groupe Γ divise Ω .*
- b) *Le groupe Γ est Gromov hyperbolique mais n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m .*
- c) *Cet ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{S}^m est Gromov hyperbolique mais n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m .*

Remarques - En particulier, aucun sous-groupe d'indice fini de Γ n'est isomorphe à un réseau cocompact de $O(m, 1)$.

- On pourrait montrer, avec les mêmes arguments que ci-dessous, que Γ n'est quasiisométrique à aucun espace symétrique riemannien et donc n'est isomorphe à aucun réseau cocompact d'un groupe de Lie semisimple.
- L'ouvert Ω est strictement convexe. Cela résulte du fait 2.6.
- Le groupe Γ est Zariski dense dans $\text{SL}^\pm(5, \mathbb{R})$. Cela résulte de [4] et de la proposition 3.1.

Démonstration a) Il suffit de vérifier les hypothèses du fait 2.8. Par construction, les conditions (1) et (2) sont satisfaites. Il suffit donc de vérifier la condition (3).

Les neuf diagrammes de Coxeter associés à chacun des neuf sommets du polyèdre P sont obtenus en prenant deux points dans $\{1, 2, 3\}$ et deux points dans $\{4, 5, 6\}$. Ils sont deux fois de type A_4 , deux fois de type $A_3 \times A_1$, deux fois de type $A_2 \times G_2^{(7)}$, une fois de type $B_2 \times A_2$, une fois de type $B_2 \times A_1 \times A_1$, une fois de type $B_2 \times G_2^{(7)}$. Ils correspondent bien à des groupes de Coxeter finis (voir [39]).

b) Pour montrer que le groupe de Coxeter Γ est Gromov hyperbolique, nous utilisons le critère de Moussong (fait 2.7). Dans notre exemple, la liste des sous-systèmes de Coxeter

infinis minimaux de S ne contient que deux sous-systèmes : $S_1 = \{1, 2, 3\}$ et $S_2 = \{4, 5, 6\}$. Ceux-ci ne sont ni affines ni orthogonaux. Donc Γ est Gromov hyperbolique.

Pour montrer que Γ n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^4 , nous utilisons le fait 2.1. Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de morphisme τ de Γ dans $O(4, 1)$ avec un noyau fini et une image discrète. Supposons par l'absurde qu'un tel morphisme τ existe. Pour chacune des six faces s de P , notons $\tau_s := \tau(\sigma_s)$ l'image par τ de la réflexion correspondante. Pour toute partie S' de S notons $\Gamma_{S'} := \sigma(W_{S'}) \subset \Gamma$ le sous-groupe de Coxeter correspondant. Notons aussi b la forme bilinéaire symétrique sur $V = \mathbb{R}^5$ de signature $(4, 1)$ définie par $b(v, v) = x_1^2 + \dots + x_4^2 - x_5^2$ lorsque $v = (x_1, \dots, x_5)$.

Montrons tout d'abord qu'il existe un signe \pm tel que les transformations $\pm\tau_s$ sont des réflexions hyperplanes de $O(4, 1)$. Pour cela, remarquons que les six éléments σ_s sont conjugués dans Γ . En effet dans un groupe diédral $G_2^{(k)}$ avec k impair tous les éléments d'ordre 2 sont conjugués. Il suffit donc de montrer que l'un d'entre eux, par exemple $\pm\tau_6$, est une réflexion hyperplane. Utilisons pour cela la classification des représentations des groupes diédraux pour la restriction de τ au groupe diédral $\Gamma_{\{5,6\}}$: c'est une somme directe de représentations irréductibles de dimension 1 ou 2 orthogonales pour b et sur lesquelles la forme bilinéaire b est anisotrope. Toutes ces sous-représentations ne sont pas de dimension 1 car sinon les éléments σ_5 et σ_6 commuteraient, l'image $\tau(\Gamma_{\{4,5,6\}})$ serait un groupe fini et τ aurait un noyau infini. En outre, comme le groupe $\tau(\Gamma_{\{1,2,3\}})$ est discret dans $O(4, 1)$, n'est pas virtuellement abélien et est inclus dans le centralisateur de $\tau(\Gamma_{\{5,6\}})$, d'une part, il ne peut pas y avoir deux sous-représentations irréductibles de dimension 2 et, d'autre part, les sous-représentations irréductibles de dimension 1 sont soit toutes triviales, soit toutes équivalentes à la représentation signe. On en déduit que l'une des symétries τ_6 ou $-\tau_6$ est une réflexion hyperplane. Après un éventuel changement de signes, on peut donc supposer que les transformations τ_s sont des réflexions hyperplanes de $O(4, 1)$.

Comme les centralisateurs de σ_s dans Γ sont infinis, ces réflexions hyperplanes τ_s sont associées à des vecteurs de type espace : on peut écrire $\tau_s = Id - v'_s \otimes \alpha'_s$ avec $v'_s \in V$, $\alpha'_s = b(v'_s, \cdot)$ et $b(v'_s, v'_s) = 2$.

Soit $b_{s,t} = b(v'_s, v'_t)$ pour s, t dans S . La matrice $B = (b_{s,t})$ est donc une matrice symétrique. Comme les six vecteurs v'_s de \mathbb{R}^5 sont linéairement dépendants on a l'égalité

$$\det(B) = 0. \tag{5}$$

D'autre part, les relations de Coxeter $(\tau_s \tau_t)^{m_{s,t}} = 1$, pour tout $s \neq t$, donnent des égalités avec des entiers $k_{s,t}$ vérifiant $0 \leq k_{s,t} < m_{s,t}$

$$b_{s,t} = \pm 2 \cos\left(\frac{k_{s,t}\pi}{m_{s,t}}\right) \tag{6}$$

Comme τ a un noyau fini, l'élément $\tau_s \tau_t$ est d'ordre exactement $m_{s,t}$. L'entier $k_{s,t}$ est donc premier à $m_{s,t}$. Comme le diagramme de Coxeter S n'a qu'une seule boucle, on peut choisir le signe des vecteurs v_s de sorte que $b_{s,t} \leq 0$ pour $\{s, t\} \neq \{1, 2\}$. la matrice B est

alors donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon\sqrt{2} & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2\cos(\frac{k\pi}{7}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\cos(\frac{k\pi}{7}) & 2 \end{pmatrix}.$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $1 \leq k \leq 3$. Le même calcul que pour (4) donne alors

$$\det(B) = -4\varepsilon\sqrt{2}(1 - 4\sin(\frac{k\pi}{7})^2) - 8\sin(\frac{k\pi}{7})^2. \quad (7)$$

Un calcul de cette expression pour les six choix possibles de (ε, k) assure que $\det(B) \neq 0$. Ce qui contredit l'égalité (5).

c) D'après le fait 2.5, Ω est quasiisométrique à Γ . Cette assertion résulte donc du point précédent et du fait 2.4. \square

Remarques - La valeur $m_{5,6} = 7$ dans l'exemple ci-dessus ne peut pas être remplacée par une autre valeur. En effet, pour $m_{5,6} > 7$ ou $m_{5,6} < 5$, la condition $\det(A) = 0$ analogue à (4) ne peut pas être satisfaite et, pour $m_{5,6} = 6$, le sous-système $S_2 = \{4, 5, 6\}$ est affine et le groupe analogue à Γ ne serait pas hyperbolique.

Donnons sans démonstration dans la figure 2 quelques diagrammes (en fait les seuls que j'ai trouvés) de systèmes de Coxeter auxquels la proposition 3.1 s'applique : ce sont des groupes de Coxeter Gromov hyperbolique de rang 6 qui ne sont pas quasiisométriques à \mathbb{H}^4 mais qui divisent un ouvert strictement convexe Ω de \mathbb{S}^4 .

La méthode de cet article via les groupes de Coxeter ne peut pas permettre de construire de tels exemples en grande dimension car d'après la généralisation [25] du théorème de Vinberg de [40], il n'existe pas de groupes de Coxeter Gromov hyperbolique dont un sous-groupe d'indice fini satisfait la dualité de Poincaré et est de dimension cohomologique supérieure à 61.

4 Quasiisométries et quasisymétries

Nous reprenons dans cette partie, la suite de notre rappel de définitions bien classiques et de faits bien utiles.

4.1 Quasidistances et quasisymétries

La notion d'application quasisymétrique a été introduite par Ahlfors et Beurling pour les intervalles en 1966 et généralisée aux espaces métriques par Tukia et Väisälä en 1980. Nous renvoyons à [37] ou [24] pour les rappels de cette section.

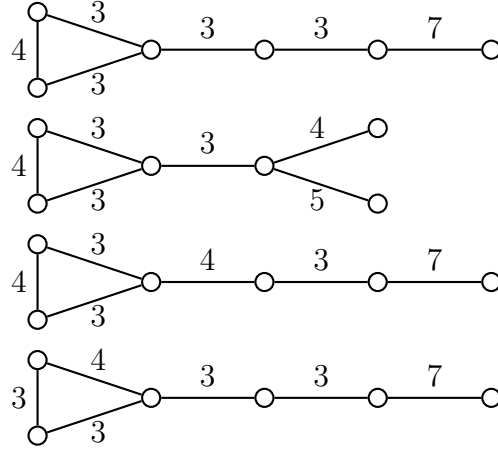


Figure 2: Quelques groupes de Coxeter divisant un ouvert strictement convexe de \mathbb{P}^4 non quasiisométrique à \mathbb{H}^4

Commençons par la définition en dimension 1.

Soit $H \geq 1$. Une fonction continue $f : I \rightarrow J$ entre deux intervalles de \mathbb{R} est dite H -quasisymétrique si, pour tous points $x - h, x, x + h$ dans I , on a

$$|f(x + h) - f(x)| \leq H |f(x) - f(x - h)|. \quad (8)$$

f est dite *quasisymétrique* si une telle constante H existe.

L'intérêt principal de cette notion vient des deux propriétés caractéristiques suivantes.

- Cette notion est invariante par transformations affines: pour toute fonction H -quasisymétrique et tous réels A, B, A', B' , la fonction $x \rightarrow Af(A'x + B') + B$ est aussi H -quasisymétrique. Ce qui permet souvent de supposer que $I = J = [0, 1]$ et de ramener l'étude des fonctions quasisymétriques à l'étude de celles telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- L'ensemble des fonctions H -quasisymétriques sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ est compact pour la norme sup.

Voici maintenant la généralisation de cette définition aux espaces quasimétriques compacts. Soit $c \geq 1$. Rappelons qu'un espace *quasimétrique* ou c -*quasimétrique* (Z, ρ) est un espace Z muni d'une *quasidistance* ou c -*quasidistance* ρ , c'est à dire une application $\rho : Z \times Z \rightarrow [0, \infty[$ telle que (i) $\rho(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, (ii) $\rho(z, z') = \rho(z', z)$ et (iii) $\rho(z, z'') \leq c \max(\rho(z, z'), \rho(z', z''))$. On munit Z de la topologie telle que, pour tout z dans Z , les boules $B(z, r) := \{z' \in Z / \rho(z, z') \leq r\}$ pour $r > 0$ forment une base de voisinages de z . Les exemples principaux d'espaces quasimétriques sont bien sûr les espaces métriques.

Soit η un homéomorphisme de $[0, \infty[$. Une application $f : (Z_1, \rho_1) \rightarrow (Z_2, \rho_2)$ entre deux espaces quasimétriques compacts est dite η -*quasisymétrique* si, pour tous z, z' et z''

distincts dans Z_1 , on a

$$\frac{\rho_2(f(z), f(z''))}{\rho_2(f(z), f(z'))} \leq \eta \left(\frac{\rho_1(z, z'')}{\rho_1(z, z')} \right). \quad (9)$$

f est dite *quasisymétrique* si un tel η existe.

Voici quelques propriétés des applications quasisymétriques.

- Lorsque Z_1 et Z_2 sont des intervalles ces deux définitions de *quasisymétrique* sont équivalentes.
- En échangeant z' et z'' , on déduit de (9) la minoration

$$\eta_1 \left(\frac{\rho_1(z, z'')}{\rho_1(z, z')} \right) \leq \frac{\rho_2(f(z), f(z''))}{\rho_2(f(z), f(z'))}. \quad (10)$$

avec $\eta_1(t) := 1/\eta(1/t)$.

- Une application quasisymétrique f non constante est injective.
- La composée de deux applications quasisymétriques est quasisymétrique.
- Une quasisymétrie est une application quasisymétrique bijective. Son inverse est aussi quasisymétrique.
- Toute application quasisymétrique est Hölder continue.
- L'ensemble des applications η -quasisymétriques de (Z_1, ρ_1) dans (Z_2, ρ_2) est un compact pour la quasidistance $\rho(f, g) = \sup\{\rho_2(f(z), g(z)) / z \in Z_1\}$.

Deux quasimétriques ρ et ρ' sur Z sont dites *quasisymétriques* si l'identité $\text{Id} : (Z, \rho) \rightarrow (Z, \rho')$ est une quasisymétrie. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des quasimétriques sur Z . Une *structure quasisymétrique sur Z* est une classe de cette relation d'équivalence.

Le fait suivant assure que toute structure quasisymétrique est représentée par au moins une distance.

Fait 4.1 Soient $c \geq 1$ et (Z, d) un espace c -quasimétrique.

- a) Pour tout $\varepsilon > 0$, la puissance ρ^ε est une c^ε -quasidistance qui est quasisymétrique à ρ .
- b) On pose, pour tout z, z' dans Z ,

$$d_\varepsilon(z, z') = \inf \sum_{1 \leq i \leq n} \rho^\varepsilon(z_{i-1}, z_i) \quad (11)$$

où cet inf est pris sur toutes les suites finies z_0, \dots, z_n telles que $z_0 = z$ et $z_n = z'$. Si $c^\varepsilon \leq \sqrt{2}$, d_ε est une distance sur Z et on a, pour tout z, z' dans I ,

$$(3 - 2c^\varepsilon)\rho^\varepsilon(z, z') \leq d_\varepsilon(z, z') \leq \rho^\varepsilon(z, z'). \quad (12)$$

Démonstration Ce fait est bien classique (voir [24] proposition 14.5 ou [20] proposition 7.10). Néanmoins nous le détaillons pour la commodité du lecteur. Seule la première

inégalité de (12) est délicate. Pour cela, on va montrer, par récurrence sur n , que, pour toute suite z_0, \dots, z_n , on a

$$(3 - 2c^\varepsilon)\rho^\varepsilon(z_0, z_n) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \rho^\varepsilon(z_{i-1}, z_i). \quad (13)$$

Notons a le membre de droite et choisissons un entier p tel que

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \rho^\varepsilon(z_{i-1}, z_i) \leq \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{p+1 \leq i \leq n} \rho^\varepsilon(z_{i-1}, z_i) \leq \frac{a}{2}.$$

On a alors

$$\rho^\varepsilon(z_0, z_p) \leq \frac{a}{2(3 - 2c^\varepsilon)} \quad , \quad \rho^\varepsilon(z_p, z_{p+1}) \leq a \quad \text{et} \quad \rho^\varepsilon(z_{p+1}, z_n) \leq \frac{a}{2(3 - 2c^\varepsilon)}.$$

D'où on obtient à l'aide du a),

$$\rho^\varepsilon(z_0, z_n) \leq \max\left(\frac{c^{2\varepsilon}}{2(3 - 2c^\varepsilon)}, c^{2\varepsilon}\right) a \leq \frac{a}{3 - 2c^\varepsilon}.$$

C'est ce que l'on voulait. □

Voici quelques propriétés des espaces quasimétriques compacts qui sont des invariants de quasisymétrie. Autrement dit, si ils sont vrais pour une quasidistance ils sont vrais pour toutes les quasidistances quasisymétriques.

- (Z, ρ) est dit *uniformément parfait* si il existe $\lambda < 1$ tel que, pour tout z dans Z et $n \geq 0$, il existe y dans Z tel que $\lambda^{n+1} \leq \rho(z, y) \leq \lambda^n$.
- (Z, ρ) est dite *doublante* si il existe $C > 1$ tel que toute boule de rayon R peut-être recouverte par au plus C boules de rayon $R/2$.
- (Z, ρ) est dite *linéairement connexe* si il existe $c > 1$ tel que tout couple (z, z') de points de Z peuvent être reliés par un lacet de diamètre au plus $c\rho(z, z')$.

Exemples

- Un espace métrique compact connexe est toujours uniformément parfait.
- Un compact de \mathbb{R}^m muni de la distance euclidienne est toujours doublant.

On appelle *arc* un espace quasimétrique homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ et *courbe* un espace quasimétrique homéomorphe au cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Bien que nous n'en aurons pas besoin, signalons le fait suivant (théorème 4.9 de [37]) qui décrit quand cet homéomorphisme peut être choisi quasisymétrique.

Fait 4.2 (Tukia, Väisälä) *Un arc ou une courbe est quasisymétrique à un intervalle ou à un cercle euclidien si et seulement si il est doublant et linéairement connexe.*

Exemples Voici trois exemples d'arc.

- Pour $\varepsilon > 0$, les quasidistances sur $[0, 1]$ $\rho^\varepsilon : (z, z') \rightarrow |z - z'|^\varepsilon$ sont deux à deux

quasisymétriques. Ce ne sont des distances que pour $\varepsilon < 1$.

- Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite de points de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ donnée par $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, x_∞ son point limite et Z la réunion du point x_∞ et des segments $[x_n, x_{n+1}]$, pour $n \geq 1$. Cet arc Z a toutes ses boules connexes mais n'est pas doublant.

- L'espace $[-1, 1]$ muni de la distance $d(z, z') = \max(|z - z'|, |\sqrt{|z|} - \sqrt{|z'|}|)$ n'est pas linéairement connexe.

4.2 Le bord d'un espace hyperbolique

Nous décrivons dans cette section le produit de Gromov, le bord de Gromov et la distance de Gromov sur ce bord pour un espace métrique X Gromov hyperbolique. Ceci munit canoniquement ce bord d'une structure quasisymétrique. Nous renvoyons à [23], [20] ou [16] pour plus de détails sur ces rappels.

Pour tout espace métrique (X, d) et tous points x_0, x et y de X , on introduit le *produit de Gromov* par

$$(x|y) = (x|y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)) \quad (14)$$

On suppose X géodésique et propre. Rappelons (proposition 21 de [20]) que X est Gromov hyperbolique si et seulement si il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tout x, y, z dans X , on a

$$(x|z) \geq \min((x|y), (y|z)) - 2\delta. \quad (15)$$

On suppose désormais X Gromov hyperbolique. On introduit alors le *bord de Gromov* $\partial X = \partial_G X$. C'est le quotient $\partial X = Q/\sim$ de l'ensemble Q des suites $\xi = (x_i)_{i \geq 1}$ telles que $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i|x_j) = \infty$ par la relation d'équivalence $(x_i) \sim (y_i)$ donnée par $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i|y_j) = \infty$. On écrit alors $\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$.

Signalons qu'il existe de nombreuses autres définitions équivalentes du bord ∂X . En voici quelques unes:

- l'ensemble des rayons quasigéodésiques, c'est à dire des applications quasiisométriques $\varphi : [0, \infty[\rightarrow X$, où deux rayons φ et φ' sont identifiés quand leurs images sont à distance de Hausdorff borné,
- l'ensemble des rayons géodésiques, c'est à dire des isométries $\varphi : [0, \infty[\rightarrow X$, où deux rayons φ et φ' sont identifiés quand $\sup_{t \geq 0} d(\varphi(t), \varphi'(t)) < \infty$,
- l'ensemble des fonctions de Buseman nulles en x_0 , c'est à dire des fonctions obtenues comme limite de fonctions $f_i := d(x_i, \cdot) - d(x_0, \cdot)$ pour une suite x_i tendant vers l'infini.

On prolonge le produit de Gromov au bord ∂X par la formule, pour ξ, η dans ∂X

$$(\xi|\eta) := \sup \liminf_{i, j \rightarrow \infty} (x_i|y_j) \quad (16)$$

où le sup est pris sur toutes les suites de X telles que $\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ et $\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i$.

Le sup et le liminf servent à donner un sens précis mais ne jouent pas de rôle important car, d'après (15), pour toutes suites de X telles que $\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ et $\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i$, on a

$$(\xi|\eta) - 4\delta \leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i|y_j) \leq (\xi|\eta) \quad (17)$$

Ce produit satisfait les propriétés suivantes, pour tout ξ, η, ζ dans ∂X :

$$\begin{aligned} (\xi|\eta) &= (\eta|\xi) \\ (\xi|\eta) &= \infty \iff \xi = \eta \\ (\xi|\zeta) &\geq \min((\xi|\eta), (\eta|\zeta)) - 2\delta. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $\rho : (\xi, \eta) \rightarrow e^{-(\xi|\eta)}$ est une $e^{2\delta}$ -quasidistance sur ∂X .

La formule (11) du fait 4.1 définit alors, pour ε inférieur à une constante $\varepsilon_0 = \frac{\log(2)}{4\delta}$, des distance d_ε sur ∂X qui sont quasimétriques à ρ . Cette quasidistance ρ est appelée quasidistance de Gromov et les distances d_ε sont appelées distances de Gromov. Les distances de Gromov d_ε définissent donc une même topologie sur ∂X . Cet espace topologique ∂X est compact. Mieux, comme la quasidistance ρ et les distances de Gromov d_ε sont deux à deux quasimétriques, elles munissent le bord de Gromov ∂X d'une structure quasimétrique.

4.3 Quasiisométries

Nous expliquons dans cette section pourquoi cette structure quasimétrique sur ∂X joue un rôle important.

Nous renvoyons à [12] pour plus de détails sur cette section.

Un espace métrique géodésique propre et Gromov hyperbolique (X, d) est dit *quasiétoilé* si il existe un point x_0 de X et une constante $C > 0$, tel que tout élément x de X soit à distance au plus C d'un rayon géodésique issu de x_0 .

Le fait suivant affirme que la structure quasimétrique du bord d'un espace Gromov hyperbolique ne dépend que de cet espace à quasiisométrie près et que, réciproquement le bord d'un espace hyperbolique et sa structure quasimétrique détermine cet espace hyperbolique à quasiisométrie près. Le point a) est dû à Gromov dans [23] généralisant des résultats antérieurs de Mostow dans [31]. Les points b) et c) sont sous cette forme dans le chapitre 2 de l'article [12] de Bourdon et Pajot. Ils généralisent des résultats antérieurs de Tukia dans [35], de Paulin dans [33] et de Bonk, Heinonen et Koskela dans [9].

Fait 4.3 *Soient X_1 et X_2 deux espaces métriques géodésiques propres qui sont Gromov hyperboliques.*

a) *Toute application quasiisométrique $f : X_1 \rightarrow X_2$ se prolonge par continuité en une*

application au bord $\partial f : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$. Cette application ∂f est quasisymétrique. Si f est quasisurjective alors ∂f est surjective.

b) Supposons que, pour $i = 1, 2$, les espaces X_i sont quasiétoilés et les bords ∂X_i sont uniformément parfaits. Alors toute application quasisymétrique $F : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ est le prolongement $F = \partial f$ d'une application quasiisométrique $f : X_1 \rightarrow X_2$. Si $F = \partial f$ est surjective alors f est quasisurjective. En outre, si deux applications quasiisométriques f et g ont même prolongement au bord $\partial f = \partial g$, alors elles sont à distance bornée, i.e. $\sup_{x_1 \in X_1} d(f(x_1), g(x_1)) < \infty$.

c) Tout espace métrique compact uniformément parfait Z est quasisymétrique au bord ∂X d'un espace métrique géodésique propre X qui est Gromov hyperbolique et quasiétoilé. Cet espace X est unique à quasiisométrie près.

4.4 Convexes hyperboliques

Rappelons maintenant le critère qui assure que la métrique de Hilbert d_Ω d'un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{S}^m est Gromov hyperbolique.

Nous renvoyons à [7] pour les rappels de cette section.

Pour deux fonctions positives f et g dépendant d'une variable x , nous écrirons

$$f(x) \asymp g(x)$$

si il existe une constante $L > 1$ telle que, pour tout x , on a $L^{-1}f(x) \leq g(x) \leq Lf(x)$.

Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^N et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 . Pour x et y dans U , on note $D_x(y) := \Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)(y - x)$. La fonction Φ est dite *quasisymétriquement convexe*¹ si

$$D_x(y) \asymp D_y(x) \tag{18}$$

uniformément pour x, y dans U (voir figure 3).

Lorsque $N = 1$, une fonction convexe est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si sa dérivée $f = \Phi'$ est une fonction quasisymétrique sur tout compact (proposition 5.2 de [7]).

Recouvrons le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert convexe borné Ω de \mathbb{R}^m par des ouverts \mathcal{G}_i , chacun d'eux s'identifiant, dans un système de coordonnées projectives convenable, au graphe d'une application convexe $\Phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ où U_i est un ouvert convexe de \mathbb{R}^{m-1} . Le convexe Ω est dit *quasisymétriquement convexe* si les fonctions Φ_i sont quasisymétriquement convexes sur tout compact de U_i . Cette définition ne dépend ni du choix des ouverts \mathcal{G}_i ni des systèmes de coordonnées projectives. Voici une autre définition équivalente. Notons d_E la distance associée à une norme euclidienne $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^m . Pour ξ dans $\overline{\Omega}$ et η dans $\partial\Omega$, on pose

$$D_\eta(\xi) = d_E(\xi, T_\eta\partial\Omega) \tag{19}$$

¹La définition de [7]: " $D_x(x+h) \asymp D_x(x-h)$ " est légèrement différente. Néanmoins les notions de "quasisymétriquement convexe sur tout compact" avec l'une ou l'autre définition sont équivalentes. Cela résulte du lemme 5.3 de [7] et du lemme 5.3 ci-dessous.

la distance euclidienne du point ξ à l'espace tangent au bord $\partial\Omega$ en η . Dire que Ω est quasisymétriquement convexe équivaut à

$$D_\eta(\xi) \asymp D_\xi(\eta) \quad (20)$$

uniformément pour ξ, η dans $\partial\Omega$. (voir figure 3)

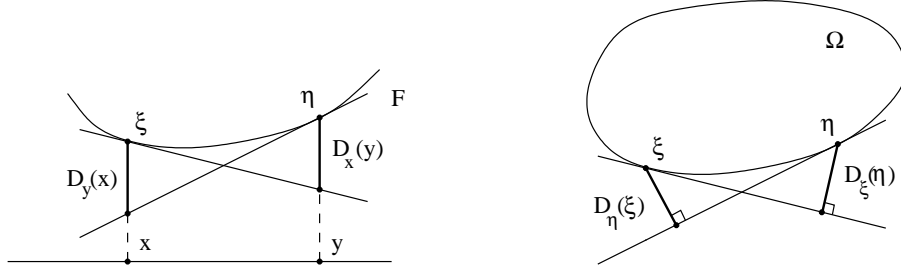


Figure 3: Fonction et ouvert quasisymétriquement convexes

Lorsque $m = 2$, un ouvert convexe borné Ω de \mathbb{R}^2 est donc quasisymétriquement convexe si et seulement si l'application normale $n_{\partial\Omega} : (\partial\Omega, d_E) \rightarrow (\mathbb{S}^1, d_E)$ est quasisymétrique.

Le fait suivant est le théorème 1.4 de [7].

Fait 4.4 *Soit Ω un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^m et d_Ω sa métrique de Hilbert. L'espace métrique (Ω, d_Ω) est Gromov hyperbolique si et seulement si Ω est quasisymétriquement convexe.*

Remarque Dans ce cas, les rayons géodésiques de Ω sont des segments $[x_0, \xi[$ avec x_0 dans Ω et ξ dans le bord $\partial_E\Omega$ de Ω dans \mathbb{R}^m . Le bord de Gromov $\partial_G\Omega$ de (Ω, d_Ω) s'identifie donc, comme espace topologique au bord $\partial_E\Omega$. Cette identification naturelle $\partial_G\Omega \simeq \partial_E\Omega$ n'est pas en général quasisymétrique. Nous verrons dans la proposition 5.1 ci-dessous qu'elle l'est lorsque $m = 2$.

5 Convexes hyperboliques de dimension 2

Le but de cette partie est la proposition suivante qui affirme l'existence d'une quasiisométrie entre tout ouvert proprement convexe Gromov hyperbolique Ω de \mathbb{P}^2 et l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 .

Proposition 5.1 *Soient Ω un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^2 et d_Ω sa métrique de Hilbert. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) Ω est quasisymétriquement convexe.
- (ii) (Ω, d_Ω) est Gromov hyperbolique.
- (iii) (Ω, d_Ω) est quasiisométrique au plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

En outre, dans ce cas, la métrique de Gromov d_ε sur le bord $\partial\Omega$ est quasisymétrique à la distance euclidienne d_E .

5.1 La structure quasisymétrique du bord

Le point clef de la démonstration est une estimation du produit de Gromov valable en toute dimension:

Lemme 5.2 *Soient Ω un ouvert strictement convexe borné de \mathbb{R}^m dont le bord est de classe C^1 , d_Ω sa métrique de Hilbert, x_0 un point de Ω .*

a) *Le produit de Gromov $(x|y) = \frac{1}{2}(d_\Omega(x_0, x) + d_\Omega(x_0, y) - d_\Omega(x, y))$ se prolonge continuellement à $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\overline{\Omega}}$ où $\Delta_{\overline{\Omega}}$ est la diagonale. On note encore $(\cdot|\cdot)$ ce prolongement.*

b) *On a*

$$e^{-(\xi|\eta)} \asymp D_\eta(\xi)^{\frac{1}{2}} D_\xi(\eta)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

uniformément pour ξ, η distincts dans $\partial\Omega$.

c) *Si Ω est quasisymétriquement convexe, on a*

$$e^{-(\xi|\eta)} \asymp D_\eta(\xi) \asymp D_\xi(\eta) \asymp d_E\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \partial\Omega\right) \quad (22)$$

uniformément pour ξ, η distincts dans $\partial\Omega$.

d) *Si $m = 2$ et Ω est quasisymétriquement convexe, on a*

$$e^{-(\xi|\eta)} \asymp \|\xi - \eta\| \|n_{\partial\Omega}(\xi) - n_{\partial\Omega}(\eta)\| \quad (23)$$

uniformément pour ξ, η distincts dans $\partial\Omega$.

Remarque Le lemme 5.2 donne aussi une nouvelle démonstration du résultat de Colbois et Verovic dans [15]:

Tout ouvert convexe borné Ω de \mathbb{R}^m dont le bord est C^2 à Hessien défini positif est quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m .

En effet, dans ce cas on a $D_\xi(\eta) \asymp D_\eta(\xi) \asymp \|\xi - \eta\|^2$ donc, par le lemme 5.2.b, la distance de Gromov d_ε sur le bord $\partial\Omega$ est quasisymétrique à la distance euclidienne et donc, par le fait 4.3.b, (Ω, d_Ω) est quasiisométrique à \mathbb{H}^m .

Pour montrer le lemme 5.2, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3 *Soient $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 .*

a) *Si la dérivée F' est quasisymétrique, alors on a, uniformément pour s, t dans $[0, 1]$,*

$$D_s(t) \asymp D_t(s) \asymp |t - s| |F'(t) - F'(s)| \asymp \frac{F(s) + F(t)}{2} - F\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad (24)$$

b) *Réciproquement, si $D_s(t) \asymp D_t(s)$, alors F' est quasisymétrique.*

Remarque Les constantes L qui interviennent dans les majorations (24) ne dépendent que de la constante H de quasisymétrie. Et réciproquement.

Démonstration du lemme 5.3 a) Montrons par exemple que

$$D_s(t) \asymp |t - s| |F'(t) - F'(s)| .$$

Pour cela rappelons que

$$D_s(t) = F(t) - F(s) - F'(s)(t - s) = \int_s^t (F'(u) - F'(s))du .$$

Par invariance affine, il suffit donc de montrer que pour toute fonction H -quasisymétrique $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a

$$(2(H + 1))^{-1} \leq \int_0^1 f(u)du \leq 1 - (2(H + 1))^{-1} .$$

Ces inégalités résultent de la croissance de f et des estimations:

$$(H + 1)^{-1} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 - (H + 1)^{-1} .$$

Ce qui termine la preuve du lemme 5.3.

b) Notons L une constante telle que $D_s(t) \leq L D_t(s)$, pour tout s, t . Supposons $F'(0) = 0$ et $F'(1) = 1$. Par invariance affine, il suffit de minorer $F'\left(\frac{1}{2}\right)$ par une constante strictement positive ne dépendant que de L . Pour cela, on calcule, pour tout ε dans $[0, 1]$,

$$1 = D_0(1) + D_1(0) \leq (L + 1)D_0(1) \leq (L + 1)(F'(1 - \varepsilon) + \varepsilon) .$$

En prenant $\varepsilon = \varepsilon_L := (2(L + 1))^{-1}$, on obtient la minoration $F'(1 - \varepsilon_L) \geq \varepsilon_L$. Si on note n_L le plus petit entier tel que $(1 - \varepsilon_L)^{n_L} \leq \frac{1}{2}$, on obtient en appliquant n_L fois la minoration précédente,

$$F'\left(\frac{1}{2}\right) \geq F'((1 - \varepsilon_L)^{n_L}) \geq \varepsilon_L^{n_L} .$$

C'est ce que l'on voulait. □

Démonstration du lemme 5.2 a) Soient x, y dans Ω et notons a et b (resp. a_0 et a_1 , resp. b_0 et b_1) les deux points de $\partial\Omega$ qui sont sur la droite $\langle x, y \rangle$ (resp. $\langle x, x_0 \rangle$, resp. $\langle y, x_0 \rangle$) (voir figure 4). Par définition de la distance de Hilbert en 2.4 et par le théorème de Thalès, on a les égalités

$$e^{-2\langle x|y \rangle} = \frac{D_{a_0}(x)D_{a_1}(x_0)}{D_{a_0}(x_0)D_{a_1}(x)} \frac{D_{b_0}(y)D_{b_1}(x_0)}{D_{b_0}(x_0)D_{b_1}(y)} \frac{D_a(y)D_b(x)}{D_a(x)D_b(y)}$$

ce que l'on réécrit,

$$e^{-2\langle x|y \rangle} = \frac{D_{a_1}(x_0)}{D_{a_1}(x)} \frac{D_{b_1}(x_0)}{D_{b_1}(y)} \frac{D_a(y)}{D_{a_0}(x_0)} \frac{D_b(x)}{D_{b_0}(x_0)} \frac{D_{a_0}(x)}{D_a(x)} \frac{D_{b_0}(y)}{D_b(y)} \quad (25)$$

Quand les points x et y s'approchent de points distincts ξ et η de $\bar{\Omega}$, chacun des six facteurs du produit ci-dessus converge.

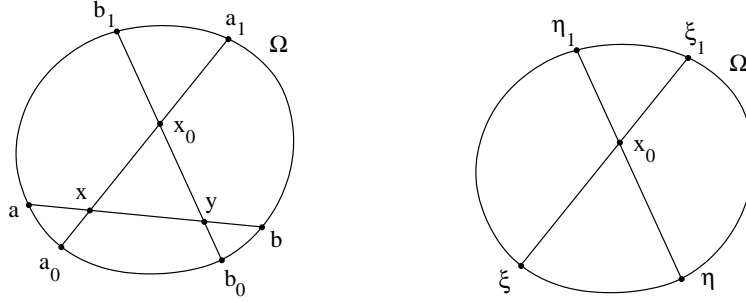


Figure 4: Estimation du produit de Gromov sur $\partial\Omega$

b) En particulier, lorsque ξ et η sont dans $\partial\Omega$, les points a et a_0 s'approchent de ξ , les points b et b_0 s'approchent de η (voir figure 4) et les deux derniers facteurs de l'égalité (25) convergent vers 1. Notons ξ_1 (resp. η_1) le deuxième point du bord $\partial\Omega$ qui est sur la droite $\langle \xi, x_0 \rangle$ (resp. $\langle \eta, x_0 \rangle$) et passons à la limite dans (25).

On obtient alors l'égalité.

$$e^{-2(\xi|\eta)} = \frac{D_{\xi_1}(x_0)}{D_{\xi_1}(\xi)} \frac{D_{\eta_1}(x_0)}{D_{\eta_1}(\eta)} \frac{D_{\xi}(\eta)}{D_{\xi}(x_0)} \frac{D_{\eta}(\xi)}{D_{\eta}(x_0)}$$

Six des huit termes de cette expression restent dans un compact de $]0, \infty[$. On en déduit aussitôt l'estimation annoncée

$$e^{-2(\xi|\eta)} \asymp D_{\xi}(\eta)D_{\eta}(\xi)$$

c) Si en plus Ω est quasisymétriquement convexe, on en déduit grâce à (20) l'estimation

$$e^{-(\xi|\eta)} \asymp D_{\eta}(\xi) \asymp D_{\xi}(\eta).$$

La dernière estimation de (22) est laissée au lecteur car elle ne nous sera pas utile.

d) Lorsqu'en plus Ω est de dimension 2 et que l'on regarde dans un système de coordonnées euclidiennes un ouvert \mathcal{G} du bord de Ω comme le graphe d'une fonction quasisymétriquement convexe $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\|F'\|_{\infty} \leq 1$:

$$\mathcal{G} \simeq \{\xi_t := (t, F(t))/t \in I\},$$

on a grâce au lemme 5.3,

$$e^{-(\xi_t|\xi_s)} \asymp |t - s| |F'(t) - F'(s)| \asymp \|\xi_t - \xi_s\| \|n_{\partial\Omega}(\xi_t) - n_{\partial\Omega}(\xi_s)\| \quad (26)$$

uniformément pour t, s distincts dans I . Les estimations (23) s'en déduisent. \square

5.2 Une courbe quasisymétrique au cercle

Pour montrer la proposition 5.1 nous aurons aussi besoin du lemme suivant qui nous permettra de comprendre la structure quasisymétrique donnée par la formule (26).

Lemme 5.4 Soient $H \geq 1$, $c := 2(H+1)$, I un intervalle compact de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction H -quasisymétrique non constante.

a) L'application $\rho : (s, t) \rightarrow |t - s| |f(t) - f(s)|$ est une c -quasidistance sur I .

c) Cette quasidistance ρ sur I est quasisymétrique à la distance euclidienne d_E sur I .

Démonstration du lemme 5.4 a) On doit montrer $\rho(s, u) \leq c \max(\rho(s, t), \rho(t, u))$, pour tout s, t, u dans I . On peut supposer que $s \leq t \leq u$ et, par symétrie, que $t \geq (s + u)/2$. Comme f est H -quasisymétrique, on a alors $|f(u) - f(s)| \leq (H + 1)|f(t) - f(s)|$ d'où $\rho(s, u) \leq 2(H + 1)\rho(s, t)$.

b) Comme f est quasisymétrique, il existe un homéomorphisme η de $[0, \infty[$ tel que, pour tout r, s, t distincts dans I , on a

$$\frac{|f(r) - f(s)|}{|f(r) - f(t)|} \leq \eta \left(\frac{|r - s|}{|r - t|} \right).$$

La formule $\eta_1(u) = u \eta(u)$ définit donc un homéomorphisme croissant de $[0, \infty[$ tel que

$$\frac{\rho(r, s)}{\rho(r, t)} \leq \eta_1 \left(\frac{|r - s|}{|r - t|} \right).$$

Ce qui prouve bien que l'identité est une quasisymétrie de (I, ρ) sur (I, d_E) . \square

Démonstration de la proposition 5.1

D'après le fait 4.4, l'assertion (i) équivaut à (ii).

D'après le fait 2.4, l'assertion (iii) implique (ii).

Il reste à montrer que les deux premières assertions (i) et (ii) impliquent (iii). Remarquons que l'espace Gromov hyperbolique Ω est quasiétoilé et son bord $\partial_G \Omega \simeq \partial_E \Omega$ est topologiquement un cercle. En particulier, ce bord est uniformément parfait. D'après les lemmes 5.2.d et 5.4, le bord $\partial \Omega$ muni d'une distance de Gromov d_ε est quasisymétrique au cercle \mathbb{S}^1 qui est le bord de Gromov du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . D'après le fait 4.3.b, cette quasisymétrie est le bord d'une quasiisométrie F de (Ω, d_Ω) sur le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

La dernière affirmation résulte encore des lemmes 5.2.d et 5.4. \square

6 Convexes hyperboliques de dimension ≥ 3

Pour tout $m \geq 3$, nous construisons dans cette partie, des ouverts proprement convexes Gromov hyperboliques de \mathbb{P}^m qui ne sont pas quasiisométriques à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m (proposition 6.3).

6.1 Convexes hyperboliques de révolution

La construction de ces exemples est basée sur le lemme suivant

Lemme 6.1 Soient ω un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^2 qui est symétrique par rapport à l'axe vertical. On note Ω le convexe de \mathbb{R}^m obtenu par révolution de ω :

$$\Omega := \{(x, z) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} / (\|x\|, z) \in \omega\} .$$

Alors, (Ω, d_Ω) est Gromov hyperbolique si et seulement si (ω, d_ω) est Gromov hyperbolique.

Pour le démontrer, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 6.2 Soient $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 convexe telle que $F'(0) = 0$, $B := \{x \in \mathbb{R}^m / \|x\| \leq 1\}$ et $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $\Phi(x) := F(\|x\|)$. Pour x, y dans B , on écrit $x = s\sigma$ et $y = t\tau$ avec s, t dans $[0, 1]$ et σ, τ de norme 1.

a) On a, pour tout x, y dans B ,

$$D_x(y) = D_s(t) + \frac{1}{2}\|\sigma - \tau\|^2 t F'(s) . \quad (27)$$

b) Si F est quasisymétriquement convexe alors Φ aussi et on a

$$D_x(y)^{\frac{1}{2}} \asymp |t - s|^{\frac{1}{2}} |F'(t) - F'(s)|^{\frac{1}{2}} + \|\sigma - \tau\| . \quad (28)$$

uniformément pour x, y dans un anneau $A_{\varepsilon_0} := \{x \in \mathbb{R}^m / \varepsilon_0 \leq \|x\| \leq 1\}$, avec $\varepsilon_0 > 0$.

Démonstration du lemme 6.2 a) On calcule

$$\begin{aligned} D_x(y) &= \Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)(y - x) \\ &= [F(t) - F(s) - (t - s)F'(s)] + (1 - \sigma \cdot \tau)t F'(s) \\ &= D_s(t) + \frac{1}{2}\|\sigma - \tau\|^2 t F'(s) . \end{aligned}$$

b) D'après le fait 4.4, on doit montrer l'estimation $D_x(y) \asymp D_y(x)$. Or l'expression (27) est somme de deux termes positifs. Par hypothèse, on a $D_s(t) \asymp D_t(s)$. Pour étudier le second terme, on distingue trois cas.

1^{er} cas : $\frac{1}{2}s \leq t \leq 2s$. Comme F' est quasisymétrique et $F'(0) = 0$, on a alors $t F'(s) \asymp s F'(t)$. En sommant, on obtient bien l'estimation $D_x(y) \asymp D_y(x)$.

2^{ème} cas : $2s \leq t$. Les estimations (24) et l'égalité $F'(0) = 0$, donnent alors $D_s(t) \asymp D_t(s) \asymp |t - s| |F'(t) - F'(s)| \asymp t F'(t)$. Or $t F'(s)$ et $s F'(t)$ sont tous deux majorés par $t F'(t)$. En sommant, on obtient encore l'estimation $D_x(y) \asymp D_y(x)$.

3^{ème} cas : $t \leq \frac{1}{2}s$. C'est le deuxième cas après échange de s et t .

L'estimation (28) résulte du point a), de (24) et de l'estimation $(a + b)^{\frac{1}{2}} \asymp a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ uniforme pour $a, b \geq 0$. \square

Démonstration du lemme 6.1 Il est clair que si Ω est Gromov hyperbolique alors ω aussi.

Supposons à l'inverse que ω est Gromov hyperbolique. On doit montrer une estimation $D_\xi(\eta) \asymp D_\eta(\xi)$ uniforme pour ξ, η dans $\partial\Omega$. Le lemme 6.2, donne une telle estimation hors de tout voisinage de l'équateur de $\partial\Omega$. On se ramène à ce cas à l'aide d'une transformation projective de la forme $(x, y) \rightarrow (\frac{x}{a-y}, \frac{y}{a-y})$, avec $a > 0$ suffisamment grand. \square

6.2 Convexes hyperboliques non quasiisométriques à \mathbb{H}^m

Voici enfin la proposition qui assure, en toute dimension $m \geq 3$, l'existence d'ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^m qui sont Gromov hyperboliques mais qui ne sont pas quasiisométriques à \mathbb{H}^m .

Nous dirons qu'un arc $t \rightarrow \gamma(t)$ de classe C^1 de \mathbb{R}^2 est à *courbure singulière* si l'application unitaire tangente $t \rightarrow \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est presque partout dérivable à dérivée nulle.

Proposition 6.3 *Soient ω un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^2 qui est symétrique par rapport à l'axe vertical, $m \geq 3$, $\Omega := \{(x, z) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} / (\|x\|, z) \in \omega\}$, d_ω et d_Ω leurs métriques de Hilbert. On suppose que (ω, d_ω) est Gromov hyperbolique et que le bord de ω contient un arc dont la courbure est singulière.*

Alors (Ω, d_Ω) est Gromov hyperbolique mais n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^m .

Remarques - Il existe de nombreux tels ouverts ω car il existe de nombreuses fonctions quasisymétriques croissante $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dont la dérivée est presque partout nulle i.e. f est une primitive d'une mesure μ étrangère à la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$.

- Je conjecture que *tout ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^m dont le bord est analytique réel est quasiisométrique à \mathbb{H}^m .*

Démonstration de la proposition 6.3 D'après le fait 4.3, il suffit de vérifier que le bord de Gromov $\partial\Omega$ n'est pas quasisymétrique à la sphère euclidienne. On choisit un ouvert de ce bord égal au graphe d'une fonction Φ comme dans le lemme 6.2. D'après la formule (28), dans un système de coordonnées $(s, \sigma) \rightarrow \Phi(s\sigma)$, la quasidistance de Gromov $\rho^{\frac{1}{2}}$ sur le bord est donnée par $\rho(\Phi(s\sigma), \Phi(t\tau))^{\frac{1}{2}} \asymp d((s, \sigma), (t, \tau))$ avec :

$$d((s, \sigma), (t, \tau)) := |t - s|^{\frac{1}{2}} |f(t) - f(s)|^{\frac{1}{2}} + \|\sigma - \tau\|$$

où f est une fonction quasisymétrique sur un intervalle à dérivée presque partout nulle et $\|\cdot\|$ est une norme. Notre assertion est alors une conséquence des lemmes 6.4 et 6.5.c ci-dessous. \square

6.3 Une quasidistance non euclidienne

Une quasidistance ρ sur l'espace topologique $[0, 1]$ est dite *de longueur nulle* si

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \rho(t_{i-1}, t_i) = 0, \quad (29)$$

où la limite est prise sur tous les découpages $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ dont le pas $\varpi := \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ tend vers 0.

Lemme 6.4 *Soit ρ une quasidistance de longueur nulle sur l'espace topologique $A = [0, 1]$. Soient $m \geq 1$, $B := [0, 1]^m$ et d la quasidistance sur $A \times B$ donnée par $d((s, \sigma), (t, \tau)) = \rho(s, t) + \|\sigma - \tau\|$. Alors il n'existe pas d'application quasisymétrique non constante de $(A \times B, d)$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{m+1} .*

Ce lemme et sa démonstration est une variante d'un résultat de Tukia et Väisälä (voir lemme 4 de [34]), où la même conclusion est obtenue sous l'hypothèse que ρ est une distance de longueur infinie sur $[0, 1]$.

Démonstration Supposons par l'absurde qu'il existe une application $\varphi : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^m$ quasisymétrique et non constante. Cette application φ est donc continue et injective.

Comme ρ est une c -quasidistance sur A , pour une constante $c > 1$, on peut trouver, pour tout n assez grand, un découpage $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{2p_n} = 1$ tel que, pour tout $j = 1, \dots, 2p_n$, on a

$$\rho(t_{j-1}, t_j) \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \text{diam}([t_{j-1}, t_j]) \leq \frac{c^4}{n}$$

L'hypothèse ρ "de longueur nulle" assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 0. \quad (30)$$

Recouvrons le cube B par n^m cubes B_ν de côtés n^{-1} et notons, pour $i = 1, \dots, p_n$, $B_{i,\nu} := [t_{2i-2}, t_{2i}] \times B_\nu$, z_ν le centre de B_ν , $z_{i,\nu} := (t_{2i-1}, z_\nu)$ et $w_{i,\nu} := \varphi(z_{i,\nu})$ de sorte que, pour tout z dans $\partial B_{i,\nu}$, on ait

$$\frac{1}{2n} \leq d(z_{i,\nu}, z) \leq \frac{m + c^4}{n}$$

Comme φ est quasisymétrique, il existe une constante $H > 1$ qui ne dépend pas de n et des rayons $r_{i,\nu} > 0$ tels que, pour tout w dans $\varphi(\partial B_{i,\nu})$ on ait

$$r_{i,\nu} \leq \|w - w_{i,\nu}\|_\infty \leq H r_{i,\nu}.$$

Par invariance du domaine, φ est ouverte. L'image $\varphi(B_{i,\nu})$ contient donc la boule de centre $w_{i,\nu}$ et de rayon $r_{i,\nu}$. On note V le volume de $\varphi(A \times B)$ de sorte que

$$\sum_{i,\nu} r_{i,\nu}^{m+1} \leq V.$$

On note $\delta > 0$ la plus petite distance entre un point de $\varphi(\{0\} \times B)$ et un point de $\varphi(\{1\} \times B)$ de sorte que, pour tout ν , on ait

$$\delta \leq 2H \sum_i r_{i,\nu}.$$

L'inégalité de Hölder donne alors pour tout ν ,

$$\left(\frac{\delta}{2H}\right)^{m+1} \leq \left(\sum_i r_{i,\nu}\right)^{m+1} \leq (p_n)^m \sum_i r_{i,\nu}^{m+1}.$$

En sommant ces n^m inégalités, on obtient

$$n^m \left(\frac{\delta}{2H}\right)^{m+1} \leq (p_n)^m V.$$

Ce qui contredit l'égalité (30). □

6.4 Une courbe quasisymétrique

Rappelons que toute fonction continue croissante sur $[0, 1]$ est presque partout dérivable.

Lemme 6.5 Soient f une fonction continue croissante sur $[0, 1]$ et, pour s, t dans $[0, 1]$, $\rho(s, t) := |t - s|^{\frac{1}{2}} |f(t) - f(s)|^{\frac{1}{2}}$.

a) Pour tout $s \leq t \leq u$ dans $[0, 1]$, on a $\rho(s, t) + \rho(t, u) \leq \rho(s, u)$.

b) Si f est presque partout dérivable à dérivée nulle, alors l'égalité (29) est vérifiée.

c) En particulier, si f est quasisymétrique presque partout dérivable à dérivée nulle, ρ est une quasidistance sur $[0, 1]$ de longueur nulle.

Remarques - Il résulte du a) que, pour f non affine, ρ n'est jamais une distance. Cela explique pourquoi le langage des quasidistances nous est indispensable.

- Signalons que la quasidistance ρ du lemme 6.5 s'appelait $\rho^{\frac{1}{2}}$ dans le lemme 5.4.

Démonstration du lemme 6.5 a) Cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) On peut supposer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Notons μ la probabilité sur $[0, 1]$ dont f est la primitive. Cette probabilité est sans atome et est étrangère à la mesure de Lebesgue λ . On veut montrer l'égalité (29), c'est-à-dire, en notant $\mu_i := \mu([t_{i-1}, t_i])$ et $\lambda_i := \lambda([t_{i-1}, t_i])$,

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i \mu_i)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{31}$$

où ϖ est le pas du découpage. Fixons $\varepsilon > 0$ et notons $E := \{i \in [1, n] / \mu_i \geq \varepsilon \lambda_i\}$. Montrons tout d'abord que

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} \sum_{i \in E} \lambda_i = 0. \tag{32}$$

Introduisons pour cela les fonctions

$$h := \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i[} \quad \text{et} \quad g := \sum_{i \in E} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i[}.$$

On a $h \geq \varepsilon g$ et la famille de probabilités $h dt$ converge faiblement vers μ quand le pas tend vers 0. Si l'égalité (32) n'était pas satisfaite, on trouverait une suite de découpages dont le pas tend vers 0 telle que $\int g dt$ est uniformément minorée par une constante strictement positive. Par compacité faible, comme les fonctions g sont uniformément bornées, on peut supposer, quitte à extraire, que cette suite de fonctions g converge faiblement dans L^2 vers une fonction g_∞ . D'une part, on a $\int g_\infty dt > 0$, et, d'autre part, la mesure $\mu - g_\infty dt$ est positive. La mesure μ n'est donc pas étrangère à dt . Cette contradiction prouve l'égalité (32).

On calcule alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i \mu_i)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i \in E} (\lambda_i \mu_i)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i \notin E} (\lambda_i \mu_i)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i \in E} \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in E} \mu_i \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{i \notin E} \lambda_i \\ &\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

si le pas est assez petit, d'après (32). Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient bien l'égalité (31) cherchée.

c) Le fait que ρ est une quasidistance résulte du lemme 5.4. □

Références

- [1] L.AHLFORS - Lectures on quasiconformal mappings, Wadthworth (1966).
- [2] L.AHLFORS, A.BEURLING - The boundary correspondance under quasiconformal mappings, Acta Math. 96 (1956) p.125-142.
- [3] Y.BENOIST - Convexes divisibles I, in Algebraic Groups and Arithmetics, Tata Inst. Fund. Res. Stud. in Math. 17, Narosa (2004) p.339-374.
- [4] Y.BENOIST - Convexes divisibles II, Duke Math. J. 120 (2003) p.97-120.
- [5] Y.BENOIST - Convexes divisibles III, Comp. Rend. Ac. Sc. 332 (2001) p.387-390 et Ann. Sc. ENS (à paraître).
- [6] Y.BENOIST - Convexes divisibles IV, Inv. Math. (à paraître).
- [7] Y.BENOIST - Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques, Publ. Math. IHES 97 p.181-237 (2004).
- [8] J.P.BENZECRI - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.
- [9] M.BONK, J.HEINONEN, P.KOSKELA - Uniformizing Gromov Hyperbolic Spaces, Asterisque 270 (2001).
- [10] M.BONK, B.KLEINER - Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres, Inv. Math. 150 (2002) p.127-183.
- [11] N.BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie ch. 4,5 et 6, Masson (1981).
- [12] M.BOURDON, H.PAJOT - Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov, J.Reine Angew. Math. 558 (2003) p.85-108.
- [13] J.CANNON, D.COOPER - A characterization of cocompact hyperbolic and finite-volume hyperbolic groups in dimension three, Trans. Am. Math. Soc. 330 (1992) p.419-431.
- [14] B.COLBOIS, C.VERNICOS, P.VEROVIC - L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert, Enseign. Math. 50 (2004) p.203-237.

- [15] B.COLBOIS, P.VEROVIC - Hilbert geometry for strictly convex domains, *Geom. Dedicata* 105 (2004) p.29-42.
- [16] M.COORNAERT, A.PAPADOPOULOS - Symbolic dynamics and hyperbolic groups, LN 1539 Springer (1993).
- [17] M.DAVIS - Non positive curvature and reflection groups, *Handbook of geometry and topology* (2002) p.373-424.
- [18] M.DAVIS, G.MOUSSONG - Notes on non positively curved polyhedra, *Bolyai Soc. Math. Stud.* 8 (1998) p.11-94.
- [19] B.FARB - The quasi-isometry classification of lattices in semisimple Lie groups, *Math. Res. Lett.* 4 (1997) p.705-717.
- [20] E.GHYS, P. DE LA HARPE - Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, PM 83 Birkhäuser(1990).
- [21] W.GOLDMAN - Projective Geometry, Notes de cours à Maryland (1988).
- [22] M.GROMOV - Infinite groups as geometric objects, *Proc Int. Cong. Math. Warsaw PWN* (1984) p.385-392.
- [23] M.GROMOV - Hyperbolic groups, in "Essays in group theory" MSRI Publ. 8 (1987) p.75-263.
- [24] J.HEINONEN - Lectures on analysis on metric spaces, Springer (2001).
- [25] T.JANUSZKIEWICZ, J.SWIATKOWSKI - Hyperbolic Coxeter groups of large dimension, *Comm. Math. Helv.* 78 (2003) p.555-583.
- [26] D.JOHNSON, J.MILLSON - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhäuser(1984) p.48-106.
- [27] V.KAC, E.VINBERG - Quasihomogeneous cones, *Math. Notes* 1 (1967) p.231-235.
- [28] M.KAPOVICH - Hyperbolic manifolds and discrete groups, PM 183 Birkhäuser (2001).
- [29] A.KARLSSON, G.NOSKOV - The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity, *l'Ens. Math* 48 (2002) p.73-89.
- [30] J.L.KOSZUL - Déformation des connexions localement plates, *Ann. Inst. Fourier* 18 (1968) p.103-114.
- [31] G.MOSTOW - Quasiconformal mappings in n -space and rigidity of hyperbolic space forms, *Publ. Math. IHES* 33 (1968).
- [32] G.MOUSSONG - Some non symmetric manifolds, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 56 (1989) p.535-546.
- [33] F.PAULIN - Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord, *Journ. Lond. Math. Soc.* 54 (1996) p.50-74.
- [34] P.TUKIA - A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group, *Ann. Acad. Sc. Fenn.* 6 (1981) p.149-160.
- [35] P.TUKIA - Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group, *Acta Math.* 154 (1985) p.153-193.
- [36] P.TUKIA - On quasiconformal groups, *Journal d'Analyse Math.* 46 (1986) p.318-346.
- [37] P.TUKIA, J.VÄISÄLÄ - Quasisymmetric embeddings of metric spaces, *Ann. Acad. Sc. Fenn.* 5 (1980) p.97-114.
- [38] E.VINBERG - Discrete linear groups that are generated by reflections, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 35 (1971) p.1072-1112.
- [39] E.VINBERG - Geometry II, *Encyclopedia of Math. Sc.* 29 Springer (1993).
- [40] E.VINBERG - The absence of crystallographic groups of reflections in Lobachevsky spaces of large dimension, *Trans. Mosc. Math. Soc.* 47 (1985) p.75-112.

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris
 benoist@dma.ens.fr, www.dma.ens.fr/~benoist