

Cette thèse est dédiée à la mémoire
d'Ernest Doudart de Lagrée (1823-1868)

Remerciements

*Call me morbid, call me pale,
I've spent six years on your trail,
Six full years of my life on your trail
And if you have five seconds to spare,
Then I'll tell you the story of my life*

The Smiths, *Half a person*

J'ai maintenant l'impression que ce mémoire de thèse n'est qu'un projecteur, fait de trois cents pages noircies afin de renvoyer le lecteur aux quelques-unes qui les précèdent. Ces pages-là, encore blanches, sont la scène sur laquelle je cherche les paroles empreintes de la gravité qu'impose le point final que je mets à mes études ; comme toute scène, elles sont avant tout une occasion exceptionnelle de dire merci et je constate que j'ai bien des gens à remercier.

Messieurs Gostiaux et Massias, professeurs antinomiques, sont les deux enseignants qui m'ont le plus marqué durant ma carrière préuniversitaire et je ressens encore leur influence à la fois comme scientifique et comme enseignant.

De l'Institut Fourier, je crois pouvoir remercier tous les membres pour le riche environnement de travail qu'ils ont constitué pendant ces années. Je suis particulièrement reconnaissant à Agnès Coquio, qui a contribué à me faire entrer dans le monde des probabilités quantiques, et à Sylvestre Gallot qui m'a surpris par la sincérité qu'il met à jouer son rôle administratif et a ainsi contribué à me faire arriver jusqu'ici.

Parmi les thésards je n'en citerai que quelques-uns, faute de pouvoir les citer tous : d'abord mes collègues de bureau, Stéphane et Sophie, grands architectes d'intérieur, puis Vidian, Olivier et Eric. Ces derniers surtout ont subi la rédaction de ma thèse et mes répétitions. Ensuite je ne peux pas ne pas remercier Sébastien Boucksom, que j'ai vu avec plaisir assiéger mon salon à mi-temps pendant trois ans et Guillemette Reviron, que je remercie pour sa présence et qui évite ainsi d'être remerciée plus bas.

J'ai beaucoup voyagé durant cette thèse et ai ainsi eu l'occasion d'apprendre beaucoup scientifiquement et humainement. Je remercie Kalyan Sinha pour son invitation en Inde et toute l'équipe de l'ISI, et plus spécialement Debashish Gos-

wami et Partha Sarathi Chakraborty, pour leur accueil. J'ai surtout eu l'occasion de fréquenter la "Católica" de Santiago du Chili et tiens à remercier tout particulièrement Carlos Mora et Rely Pellicer pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée. Rolando Rebolledo a été là-bas le grand animateur de ma vie scientifique et je suis particulièrement heureux de le retrouver dans mon jury.

J'ai d'ailleurs la chance d'être jugé par mon jury idéal ; j'ai eu l'occasion de rencontrer tous ses membres dans le passé et peux tous les assurer de mon admiration et de ma sympathie.

Je n'ai pas encore mentionné Stéphane Attal, qui trouve naturellement sa place en cette fin de paragraphe. Depuis qu'il a commencé à m'enseigner les probabilités quantiques, il n'a cessé de m'encourager et je lui dois énormément pour son soutien. Je ne lui suis pas moins redevable de l'exemple qu'il constitue et tous ceux qui m'ont fréquenté ces dernières années savent que l'influence qu'il a eue sur moi déborde le cadre mathématique ; bien que sa tutelle s'arrête ici, il restera "le Maître" et a droit à toute ma gratitude.

J'en arrive à ceux qui ont été plus directement exposés à mon mauvais caractère. Je pense tout d'abord à Gaën ; j'aurais peut-être plus travaillé à cette thèse sans elle et pourtant, même dans ces pages, je la remercie du fond du cœur pour sa présence. Enfin, je tiens à remercier mes parents, premières victimes de mon ingratitude quotidienne ; puisque l'occasion m'est ici fournie de peser mes mots je veux dire que je sais tout ce que je leur dois et ajouter le plus sincère des *merci*.

Table des matières

Mode d'emploi de cette thèse	8
Bibliographie	10
Introduction	14
I Présentation des résultats obtenus	21
1 Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock à temps discret	23
1.1 Motivations pour l'étude de $T\Phi$	24
1.1.1 Une motivation physique	24
1.1.2 Une motivation probabiliste	25
1.2 Calcul d'Itô abstrait sur l'espace de Fock à temps discret	26
1.3 Définition du calcul stochastique quantique à temps discret	30
1.3.1 Opérateurs fondamentaux	30
1.3.2 Définition de l'intégrale stochastique à temps discret	33
1.4 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1	38
1.4.1 Espace de Fock associé à une marche aléatoire	38
1.4.2 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité quelconque	39
2 Représentations intégrales et nucléaires sur l'espace de Fock à temps discret	45
2.1 Représentations nucléaires	46
2.1.1 Une première approche	46
2.1.2 Transformations de noyaux	49
2.1.3 Une condition suffisante de représentabilité nucléaire	55
2.2 Application aux questions de représentations intégrales	57
2.2.1 Représentations nucléaires et intégrales	58
2.2.2 Une condition suffisante de représentabilité intégrale	59
2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	61

3	Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock	63
3.1	Espaces de Fock	63
3.1.1	Définition de l'espace de Fock simple	63
3.1.2	Calcul d'Itô abstrait sur Φ	65
3.1.3	Espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	70
3.2	Définition de l'intégration stochastique quantique	71
3.2.1	Intégration stochastique quantique sur l'espace de Fock simple	71
3.2.2	Le cas de la multiplicité supérieure à 1	80
3.3	Représentations en noyaux de Maassen-Meyer	82
4	Approximations discrètes du calcul stochastique quantique	85
4.1	L'approximation de Attal	86
4.1.1	Approximation de l'espace de Fock simple	86
4.1.2	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	88
4.1.3	Tables d'Itô à temps discret et à temps continu	89
4.2	Les projections d'intégrales et de noyaux	90
4.2.1	Relations de commutation	91
4.2.2	Projections d'intégrales	91
4.2.3	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	95
4.2.4	Projections d'opérateurs à noyau	96
4.3	Convergence de la table d'Itô	98
4.3.1	Preuve de la formule d'Itô	98
4.3.2	Conséquences pour les probabilités classiques	103
5	Application à la représentation des opérateurs	105
5.1	Démarche générale	105
5.2	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification	108
5.2.1	Opérateurs de seconde quantification	108
5.2.2	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification différentielle	115
5.2.3	Le contre-exemple de Journé et Meyer	116
5.3	Extensions possibles de ces résultats	117
5.3.1	Représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E}	117
5.3.2	Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1	122
5.3.3	Secondes quantifications d'opérateurs non bornés	124
6	Approximations d'EDS quantiques et création de bruits quantiques	127
6.1	Dilatations d'évolutions complètement positives et EDS quantiques	128
6.1.1	Evolutions complètement positives et théorème de Lindblad	128
6.1.2	Equations différentielles stochastiques quantiques	130

6.2	Dilatations en temps discret et interactions répétées	133
6.2.1	Interactions répétées	133
6.2.2	Dilatations en temps discret	134
6.3	Résultats de convergence	135
6.3.1	Convergence de solutions d'équations différentielles stochas- tiques quantiques	135
6.3.2	Application aux problèmes d'évolution	140
6.3.3	Evolution Hamiltonienne et limite de couplage faible	142
6.4	Convergence des Lindbladiens et Hamiltoniens	143
6.4.1	Evolutions associées sur \mathcal{H}_0	143
6.4.2	Hamiltoniens associés à la dynamique	145

II Articles 149

A	Représentations intégrales et nucléaires des opérateurs sur l'espace de Fock à temps discret	151
B	Matrices de Pauli et formule d'Itô quantique	169
C	Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantifica- tion	211
D	Interactions quantiques répétées et continues : la production spon- tanée de bruits quantiques	245
E	Chaînes d'atomes à $(N + 1)$ niveaux et bruits quantiques de dimen- sion N	275

Mode d'emploi de cette thèse

La grande majorité des résultats que nous allons exposer ici ont donné lieu à des articles déjà rédigés. Nous en avons profité pour adopter une méthode de rédaction malhonnête mais dotée de nombreux attraits.

Dans les articles mathématiques, où il faut faire court, les aspects techniques incompressibles occupent un volume important au détriment des idées. Ici, à l'inverse, nous avons décidé de ne donner dans le corps du document que très peu de démonstrations ; cela permet de ne conserver que ce qui est au fond essentiel, de multiplier exemples et références culturelles et d'obtenir un texte facilement lisible. Cela risque en revanche de donner au lecteur une idée fautive de la complexité des résultats énoncés ici ; on s'apercevra bien vite qu'en tout cas cela attribue à chaque chapitre un volume qui n'est proportionnel ni à la taille des articles correspondant, ni à la longueur des preuves de ce qu'il contient. Si cela signifie que tout ce que nous exposons peut sembler également simple et naturel, nous nous en réjouissons.

Puisque nous faisons des mathématiques, il faut bien fournir des démonstrations à nos résultats. Nous avons joint à cette thèse les articles rédigés ; la plupart des preuves se trouve dans ces articles. Cependant, ceux-ci sont à prendre comme des annexes. Nous entendons par là que le corps possède en propre ses notations, sa bibliographie et sa numérotation mais surtout nous incitons le lecteur à se préoccuper avant tout du texte de la thèse. Hormis mention explicite du contraire toute référence renvoie à un élément du corps lui-même. Les articles utilisent parfois des notations différentes des parties de la thèse qui lui correspondent ; lorsque nous renvoyons le lecteur à l'un des articles nous signalons les aménagements de notation à prendre en compte. La bibliographie générale a été placée en avant du texte pour éviter qu'elle se confonde avec la bibliographie des articles. L'article [AP2], qui n'a pas de liste de références indépendantes, utilise la bibliographie du corps du texte.

Enfin, les démonstrations les plus importantes et les plus instructives sont ébauchées dans le texte ; les démonstrations des résultats qui n'apparaissent pas dans les articles sont données *in extenso* dans le corps.

Bibliographie

- [At1] S. ATTAL : Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock, *Séminaire de Probabilités XXVI* (1992), Springer Verlag, pp. 619-632.
- [At2] S. ATTAL : Semimartingales non commutatives et applications aux endomorphismes browniens, *thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur*, Strasbourg (1994).
- [At3] S. ATTAL : An algebra of non commutative bounded semimartingales, square and angle quantum brackets, *Journal of Functional Analysis* 124 (1994), Academic Press, pp. 292-332.
- [At4] S. ATTAL : Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space, *Communications in Mathematical Physics* 175 (1996), Springer Verlag, pp. 43-62.
- [At5] S. ATTAL : Classical and quantum stochastic calculus, *Quantum Probability and Related Topics X* (1998), World Scientific, pp. 1-52.
- [At6] S. ATTAL : The structure of the quantum semimartingale algebras, *Journal of Operator Theory* 46 (2001), pp. 391-410.
- [At7] S. ATTAL : Approximating the Fock space with the toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVI* (2003), Springer Verlag, pp.477-491 .
- [A-E] S. ATTAL et M. EMERY : Equations de structure pour des martingales vectorielles, *Séminaire de Probabilités XXVIII* (1994), Springer Verlag, pp.256-278.
- [A-L] S. ATTAL et J.M. LINDSAY : Quantum stochastic calculus with maximal operator domain, *The Annals of Probability*, à paraître.
- [A-M] S. ATTAL et P.A. MEYER : Interprétations probabilistes et extension des intégrales stochastiques non commutatives, *Séminaire de Probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, pp. 312-327.
- [AP1] S. ATTAL et Y.PAUTRAT : From repeated to continuous quantum interactions : the spontaneous production of quantum noises, *Prépublication de l'Institut Fourier*.

- [AP2] S. ATTAL et Y. PAUTRAT : From $(n+1)$ -level atom chains to n -dimensional noises : some remarks, en préparation.
- [Bel] V.P BELAVKIN : A quantum non-adapted Ito formula and non stationary evolution in Fock scale, *Quantum Probability and Related Topics VI* (1991), World scientific, pp. 137-180.
- [B-L] V.P BELAVKIN et J.M. LINDSAY : The kernel of a Fock space operator II, *Quantum Probability and Related Topics VIII* (1993), World scientific, pp. 87-94.
- [Bia] P. BIANE : Calcul stochastique non commutatif, *Lectures on Probability Theory, école d'été de Saint-Flour 1993*, Lecture Notes in Mathematics. 1608 (1995), Springer-Verlag.
- [Co1] A. COQUIO : Why are there only three quantum noises ?, *Probability Theory and Related Fields* 118 (2001), pp. 349-364.
- [Co2] A. COQUIO : Stochastic integral representations of unbounded operators in Fock spaces, soumis au *Journal of the London Mathematical Society*.
- [Dav] E.B.DAVIES : *Quantum theory of open systems*, Academic Press (1976).
- [F-R] F.FAGNOLA et R.REBOLLEDO : A view on stochastic differential equations derived from quantum optics, *Aportaciones Matemáticas 14* (1998), Sociedad Matemática Mexicana, pp. 193-214.
- [Gre] M. GREGORATTI : The Hamiltonian operator associated to some quantum stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 222 (2001), pp. 181-200.
- [Gui] A.GUICHARDET : *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lecture Notes in Mathematics 261 (1970), Springer Verlag.
- [H-P] R.L. HUDSON et K.R. PARTHASARATHY : Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 93 (1984), no. 3, pp. 301-323.
- [J-O] U.C. JI et N. OBATA : A role of Bargmann-Segal spaces in characterization and expansion of operators on Fock space, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, à paraître.
- [J-M] J.L. JOURNÉ et P.A. MEYER : Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique, *Séminaire de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 313-316.
- [KM1] B.KÜMMERER et H.MAASSEN : Elements of quantum probability, *Quantum Probability Communications X* (1998), pp.73-100.
- [KM2] B.KÜMMERER et H.MAASSEN : An ergodic theorem for quantum counting processes, *Journal of Physics A* 30 (2003), pp.1-7.

- [Li1] J.M. LINDSAY : The kernel of a Fock space operator I, *Quantum Probability and Related Topics VIII* (1993), World scientific, pp. 271-280.
- [Li2] J.M. LINDSAY : Quantum and non-causal stochastic calculus, *Probability Theory and Related Fields* 97 (1993), pp.65-80.
- [LeM] M.LEITZ-MARTINI : Quantum stochastic calculus using infinitesimals, *Dissertation der Eberhard-Karls-Universität* (2001).
- [Ma1] H.MAASSEN : Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels, *Quantum Probability and Related Topics II*, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics. 1136 (1985), pp. 361-374.
- [M-R] H.MAASSEN et P.ROBINSON : Quantum stochastic calculus and the dynamical Stark effect, *Reports on Mathematical Physics* 30 (1991), pp. 185-203.
- [Me1] P.A.MEYER : A finite approximation to boson Fock space, *Stochastic processes in classical and quantum systems*, Proceedings Ascona (éditeurs S.Albeverio, G.Casati, D.Merlin), Lecture Notes in Physics 262 (1993), Springer-Verlag.
- [Me2] P.A.MEYER : *Quantum probability for probabilists*, Lecture Notes in Mathematics 1538 (1993), Springer-Verlag.
- [Me3] P.A.MEYER : Représentations de martingales d'opérateurs, d'après Parthasarathy-Sinha, *Séminaire de Probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, pp. 97-106.
- [vNe] J.VON NEUMANN : *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press (1955).
- [Py1] K.R.PARTHASARATHY : A remark on the paper "Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique", *Séminaire de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 317-320.
- [Py2] K.R.PARTHASARATHY : *An introduction to quantum stochastic calculus*, Monographs in Mathematics (1992), Birkhäuser.
- [P-S] K.R.PARTHASARATHY et K.B. SINHA : Representation of bounded quantum martingales in Fock space, *Journal of Functional Analysis* 67 (1986), pp. 126-151.
- [Pt1] Y.PAUTRAT : Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, à paraître.
- [Pt2] Y.PAUTRAT : From Pauli matrices to quantum Ito formula, soumis au *Journal of the London Mathematical Society*.
- [Pt3] Y.PAUTRAT : Stochastic integral representations of second quantization operators, *Journal of Functional Analysis*, à paraître.
- [Reb] R.REBOLLEDO : Complete positivity and open quantum systems, *Informe Técnico de la Pontificia Universidad Católica*.

Introduction

Pourquoi des probabilités quantiques ?

On peut s'intéresser aux probabilités quantiques pour des raisons purement mathématiques ; celles-ci sont en effet l'une des extensions non commutatives possibles de la théorie classique des probabilités. Elles sont, plus précisément, l'extension qui suit le formalisme hilbertien de la mécanique quantique tel que l'a défini von Neumann (voir [vNe] ou [Dav]).

Nous préférons justifier l'introduction des probabilités quantiques par la raison peu élégante de la nécessité. En effet, on sait que la théorie physique de la mécanique quantique est intrinsèquement aléatoire ; on a donc essayé d'utiliser les probabilités classiques pour modéliser les aléas liés à toute mesure de grandeur physique. Les expériences d'Aspect ("expérience d'Orsay") et les inégalités de Bell ont cependant montré que des situations même extrêmement simples fournissent des observations qui ne peuvent être décrites par la théorie probabiliste classique (voir à ce sujet [KM1]). Il a donc été nécessaire de créer une nouvelle théorie *ad hoc*.

La mécanique quantique associe à tout système physique un espace de Hilbert, appelé *espace d'état* ; les grandeurs mesurables du système sont alors représentées par les opérateurs autoadjoints sur l'espace d'état. En accord avec ce formalisme, les probabilités quantiques auront donc pour nouvelles "variables aléatoires" des opérateurs sur des espaces de Hilbert.

Calcul stochastique quantique

Les probabilités classiques prennent leur véritable ampleur une fois que l'on définit les intégrales stochastiques et que l'on a un vrai calcul stochastique ; la situation est identique dans le cas quantique. Les intégrales stochastiques quantiques ont été définies initialement par Hudson et Parthasarathy (dans [H-P]) afin de formaliser les "équations de Langevin quantiques" des physiciens, où apparaissent des termes de bruit de nature quantique. Une intégrale stochastique quantique est, dans ce cadre, une intégrale du type $\int H_s da_s^\epsilon$ où les H_s sont des opérateurs sur l'espace de Hilbert considéré, et les *bruits quantiques* da^ϵ sont des "différentielles" d'opérateurs a^ϵ . Le calcul stochastique quantique, qui a été amélioré par les travaux de Attal, Meyer, Belavkin et Lindsay entre autres, est maintenant un outil robuste :

on dispose d'une formule d'Itô, de critères d'existences de solutions aux équations différentielles stochastiques, etc. (on pourra consulter [At5] pour un exposé général).

Il est donc particulièrement intéressant de pouvoir écrire un opérateur donné sous la forme d'une intégrale stochastique quantique ; il se pose alors naturellement la question de savoir si cela est possible. On sait depuis le contre-exemple de Journé (voir [J-M]) que cela n'est pas possible en général et que les facteurs déterminants ne se limitent pas à des considérations de domaine ; les résultats positifs à cette question sont cependant en nombre très limité (voir [P-S], [At3], [Co2]). Un autre type de représentation possède un intérêt équivalent : les représentations en opérateurs à noyaux de Maassen-Meyer. Les réponses connues à la question de la représentabilité nucléaire ne sont cependant pas plus nombreuses que pour les représentations intégrales.

Au début de cette thèse, le thème de nos travaux était spécifiquement celui-ci : apporter des éléments de réponse à ces questions de représentabilité.

Approximations discrètes du calcul stochastique quantique

Un outil développé par Attal à cette époque est cependant venu perturber nos occupations : il s'agit d'une méthode explicite d'approximation du calcul stochastique quantique par un analogue "à temps discret", définie dans [At7].

Cette approximation était considérée depuis longtemps par les physiciens ; parmi les mathématiciens elle était en général considérée comme une source d'inspiration (voir [Me1]). Leitz-Martini a entièrement défini le calcul stochastique quantique par des techniques d'analyse non-standard à partir du calcul à temps discret (voir [LeM]) mais le cadre de sa construction semble disjoint de celui qui nous intéresse en général. La méthode de Attal, en revanche, fait cohabiter les deux théories dans un même cadre.

De plus, la méthode de Attal est complètement explicite en termes de calcul d'Itô abstrait. Ce calcul est un outil particulièrement maniable et évocateur et est à la base de l'approche Attal-Meyer de la théorie de l'intégration stochastique. Cette nouvelle méthode semble donc bien se prêter à l'approximation des intégrales stochastiques quantiques.

Il a évidemment fallu commencer par donner un sens précis à l'intégration stochastique quantique à temps discret puisque cela n'avait été fait que dans le cadre de la dimension finie ; cette théorie de l'intégration est présentée dans le chapitre 1 et dans l'article [Pt2] que l'on trouve en annexe B.

Questions de représentations en temps discret

Cette méthode d'approximation montrait que des critères en temps discret de représentabilité en intégrales stochastiques ou en opérateurs à noyau pouvaient mener à des éléments de réponse pour le cadre à temps continu. De plus, trouver

des critères en temps discret semblait plus facile. Nous avons donc commencé par chercher de tels éléments de réponse ; notre première approche a été d'utiliser le fait que, en temps discret, les propriétés d'adaptabilité des opérateurs permettent essentiellement de se ramener à des situations de dimension finie.

Il apparut bien vite que les résultats obtenus suivant cette approche ne sont pas suffisants. Nous avons donc adopté une autre méthode : celle-ci, utilisant des outils définis par Lindsay et certaines propriétés spécifiques au temps discret, nous a permis d'obtenir des réponses satisfaisantes à la question de la représentabilité en opérateurs à noyau dans ce cadre, et cela avec des formules explicites pour le noyau associé à un opérateur. Par ailleurs, à partir de ces résultats nous avons pu obtenir des résultats analogues et tout aussi explicites pour les représentations intégrales.

Ces résultats sont présentés dans le chapitre 2 et font l'objet de la publication [Pt1], jointe en annexe A.

Formules d'Itô à temps discret et à temps continu

On s'aperçoit en définissant l'intégration stochastique à temps discret que celle-ci présente une différence majeure avec le calcul stochastique à temps continu : celle-ci réside dans les formules d'Itô exprimant la composition de deux intégrales. On a considéré cette différence, que l'on observe immédiatement en dimension finie, comme rendant impossible l'utilisation efficace du calcul stochastique à temps discret comme moyen d'approcher son analogue à temps continu. Puisque nos résultats de représentation nous permettaient d'exprimer l'approximation d'une intégrale stochastique $\int H_s da_s^\varepsilon$, nous nous sommes proposé le but suivant : redémontrer la formule d'Itô à temps continu en n'utilisant rien d'autre que notre méthode d'approximation (dans laquelle la formule d'Itô n'intervient pas) et la formule d'Itô à temps discret. C'est ce que nous exposons dans le chapitre 4 et dans l'article [Pt2] présenté en annexe B, montrant ainsi que la différence entre formules d'Itô n'est en rien une obstruction à ce que l'approximation de Attal soit un outil utile.

Dans ce chapitre 4 nous rappelons par ailleurs entièrement la méthode de Attal, avec de rares modifications qui simplifient légèrement son utilisation.

Retour sur la représentabilité des opérateurs

Nous avons par la suite essayé d'utiliser nos résultats de représentabilité en temps discret pour obtenir des résultats en temps continu. Malheureusement, les conditions analytiques nécessaires pour que nous puissions appliquer nos résultats et que les représentations soient conservées dans le passage à la limite sont telles que nous avons pu, suivant cette méthode, redémontrer des résultats connus mais hélas rien de nouveau.

Nous avons donc adopté une autre approche, qui consiste à considérer nos formules explicites de représentation et les formules obtenues par passage à la li-

mite comme des informations *a priori* sur les intégrandes apparaissant dans une représentation intégrale d'un opérateur donné. On peut alors, à partir de ces informations, chercher des conditions pour pouvoir définir rigoureusement ces intégrandes, pour que l'on puisse considérer les intégrales stochastiques associées et enfin pour que les intégrales obtenues représentent bien l'opérateur qui nous intéresse. Cette méthode présente un inconvénient : pour estimer les formules *a priori* des intégrandes il faut que l'opérateur considéré permette des calculs explicites.

Nous avons donc appliqué cette méthode aux opérateurs de *seconde quantification* et de *seconde quantification différentielle*, opérateurs très utilisés en physique. Nous en avons tiré une caractérisation simple de ceux de ces opérateurs qui admettent une représentation intégrale, avec des formules explicites pour les intégrandes.

Ces résultats, ainsi que notre première approche, sont présentés dans le chapitre 5. Les critères de représentabilité pour les opérateurs de seconde quantification (différentielle ou non) sont par ailleurs exposés dans l'article [Pt3] que l'on trouve en annexe C.

Equations différentielles stochastiques quantiques et interactions répétées en mécanique quantique

Nous avons ensuite cherché à voir si nos résultats étaient assez puissants pour que l'on puisse obtenir la convergence de solutions d'équations aux différences vers les solutions des équations différentielles obtenues en passant formellement à la limite. Nous avons obtenu des résultats très généraux de convergence.

Nous nous sommes aperçus par la suite que ces résultats avaient une portée bien plus grande en termes physiques : en effet, ils montrent que l'opérateur d'évolution associé en mécanique quantique à une interaction répétée (ce qui couvre un cadre très large) est donné, à la limite, comme la solution d'une équation différentielle stochastique quantique que l'on peut expliciter. Nous pouvons ainsi décrire le passage d'évolutions discrètes à des évolutions continues en un sens plus précis que dans les résultats de convergence connus jusqu'alors : notre passage à la limite prend en compte l'évolution des deux entités entrant en interaction et pas seulement l'une des deux.

Ces résultats sont présentés dans le chapitre 6 et dans l'article [AP1], écrit en collaboration avec Stéphane Attal et présenté en annexe D.

Nous n'avons pu, pour des raisons de volume et d'unité de sujet, rappeler autant que nous l'aurions voulu le formalisme des évolutions dans les systèmes quantiques ouverts ni justifier notre intérêt pour les objets que nous étudions. Nous renvoyons donc le lecteur à [Dav] ou [Reb].

Convergences de marches aléatoires et équations de structure

Nous n'avons pas parlé encore des résultats contenus dans l'article [AP2], écrit en collaboration avec Stéphane Attal : c'est que nous nous sommes aperçus que, parmi les résultats qu'il contient, ceux que l'on ne retrouve pas dans d'autres de nos articles sont déjà connus.

Cet article garde cependant un intérêt en ce qu'il adopte un point de vue nouveau. Il provient de la question des interprétations probabilistes à donner aux espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure au classique "bébé Fock". Nous nous sommes aperçus que, lorsque l'on considère des marches aléatoires dans \mathbb{R}^n , on peut tout écrire dans une structure algébrique qui est complètement indépendante de la loi de la marche ; tout le contenu probabiliste est alors contenu dans des équations de structure à temps discret. Nos techniques d'approximation permettent alors d'observer que, suivant la forme des équations de structure associées à une marche aléatoire, une renormalisation de cette marche converge vers un processus qui s'explique comme une somme d'un mouvement brownien et de processus de Poisson.

Ces résultats sont évoqués tout au long de cette thèse, dans des exemples ; ils sont par ailleurs présentés sous une forme non définitive dans l'article [AP2] que l'on trouve en annexe E.

Première partie

Présentation des résultats obtenus

Chapitre 1

Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock à temps discret

Dans ce chapitre, nous définissons l'espace de Fock “à temps discret” et le calcul stochastique quantique qui lui est associé.

Dans la section 1.1, nous justifions très rapidement l'apparition de cet espace par des raisons complètement indépendantes de l'idée d'approximation de l'espace de Fock à temps continu. L'une de ces justifications provient de la physique quantique, l'autre des probabilités classiques.

Dans la section 1.2, nous définissons le calcul d'Itô abstrait et la théorie de l'intégration stochastique quantique à temps discret. Ces outils sont intuitivement plus simples à manier que leurs analogues à temps continu ; il est cependant évident que, pour que nous puissions utiliser de manière efficace le procédé d'approximation, il faut des énoncés précis. C'est ce qui justifie le développement de la théorie telle que nous la présentons. Nous n'y décrivons pas les représentations en noyaux : le sens à donner à ces représentations est discuté dans le chapitre suivant.

Ces deux sections correspondent approximativement à la première partie de l'article [Pt2].

Dans la section 1.4, nous décrivons les espaces de Fock à temps discret “de multiplicité supérieure à 1”, que nous appellerons ainsi puisqu'ils sont en fait les espaces qui serviront à approcher les espaces de Fock à temps continu de multiplicité supérieure à 1. Nous verrons que, tout comme l'espace de Fock $\mathbb{T}\Phi$ est associé à des marches aléatoires sur \mathbb{Z} , ces espaces sont associés à des martingales à temps discret à valeurs vectorielles.

Cette section correspond à la première moitié de l'article [AP2].

1.1 Motivations pour l'étude de $\mathbb{T}\Phi$

Avant d'aborder l'étude technique de l'espace $\mathbb{T}\Phi$ et du calcul stochastique qui lui est associé, nous allons justifier cette étude et montrer pourquoi cet espace est un objet intéressant en soi et pas uniquement comme moyen d'approcher l'espace de Fock à temps continu.

1.1.1 Une motivation physique

L'un des postulats de la physique quantique veut qu'à chaque système physique soit associé un espace de Hilbert qui représente les états (à prendre ici au sens intuitif du terme) du système. Si l'on considère par exemple un système constitué d'une seule particule qui n'a que deux états différents (par exemple deux niveaux d'énergie, deux états de polarisation, etc.) alors l'espace d'état associé est \mathbb{C}^2 . Si l'on veut considérer un ensemble infini dénombrable de telles particules et que l'on suppose celles-ci distinguables et indépendantes, alors l'espace d'état à considérer est le produit tensoriel des espaces associés à chaque particule.

Cet espace d'état $\mathbb{T}\Phi$ est donc

$$\mathbb{T}\Phi = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^2.$$

Notons $\{\Omega_i, X_i\}$ la base canonique de la i -ème copie de \mathbb{C}^2 . Pour simplifier les notations on choisit de ne pas faire apparaître le vecteur Ω_i dans les produits tensoriels : par exemple $X_{i_1} \otimes X_{i_2}$ représente

$$\Omega_0 \otimes \dots \otimes \Omega_{i_1-1} \otimes X_{i_1} \otimes \Omega_{i_1+1} \otimes \dots \otimes \Omega_{i_2-1} \otimes X_{i_2} \otimes \Omega_{i_2+1} \otimes \dots$$

Ce choix est motivé par l'idée que Ω_i représente l'état "vide" ou "au repos" du i -ème site.

On a alors une base hilbertienne naturelle, constituée d'un vecteur Ω

$$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \dots$$

appelé *vecteur vide*, et par tous les vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ pour $i_1 < \dots < i_n$. Chaque un de ces vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ correspond à un état du système dans lequel par exemple les particules du système qui sont excitées sont exactement les particules indexées i_1, \dots, i_n . Notons $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} , que l'on munit de la mesure de dénombrement. Ce qui précède montre que l'espace $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^2$ admet un isomorphisme explicite avec $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$: on identifie simplement chaque $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ avec l'indicatrice de l'élément $\{i_1, \dots, i_n\}$ de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$. L'objet physique que nous considérons, cet ensemble dénombrable de particules à deux niveaux, est appelé *chaîne de spins* ; nous lui avons associé naturellement l'espace d'état $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$.

1.1.2 Une motivation probabiliste

Supposons que l'on veuille considérer une suite $(\nu_i)_{i \geq 0}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre p . Pour construire une telle suite, on considère une réalisation quelconque d'une variable de Bernoulli ν_1 sur un espace E_1 muni d'une mesure *ad hoc* $\mu_1(p)$. La suite de variables indépendantes de même loi que ν_1 peut être réalisée sur le produit $E = \bigotimes_{\mathbb{N}} E_i$ où chaque E_i est une copie de E_1 , E étant muni de la mesure produit $\mu(p) = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mu_1(p)$,

On veut évidemment pouvoir considérer des fonctionnelles de notre processus ; on s'intéresse donc plutôt à l'espace $L^2(E, \mu(p))$ associé à E , espace que l'on notera encore $T\Phi$. On a naturellement et de manière explicite

$$L^2(E, \mu(p)) \simeq \bigotimes_{\mathbb{N}} L^2(E_1, \mu_1(p)). \quad (1.1.1)$$

Par ailleurs, chaque $L^2(E_i, \mu_1(p))$ est un espace complexe de dimension 2 dont une base est donnée par la variable déterministe égale à 1, que l'on note Ω_i , et la variable aléatoire de Bernoulli ν_i de paramètre p . Cette base peut être orthonormalisée en considérant Ω_i et la variable aléatoire centrée réduite X_i obtenue en normalisant ν_i en $X_i = (\nu_i - p)/\sqrt{p(1-p)}$. On obtient ainsi une base orthonormale de $L^2(E)$ faite de vecteurs $X_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ comme précédemment.

Venons-en à l'intérêt de cette construction : quelle que soit la loi des variables aléatoires de Bernoulli $(\nu_i)_{i \geq 0}$, l'espace $L^2(E)$ associé est naturellement isomorphe à $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$. On a donc perdu les propriétés probabilistes qui leur étaient associées. Ces propriétés cependant sont entièrement déterminées par le paramètre p et l'on voit bien que celui-ci est déterminé par la loi produit qui est définie sur $L^2(E)$: cette loi est en effet entièrement déterminée par les formules

$$X_i^2 = 1 + c_p X_i, \quad (1.1.2)$$

valables pour tout i , où $c_p = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$ est une fonction biunivoque de p .

En définissant sur notre espace $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$ une famille de lois produits – un produit pour chaque p de $]0, 1[$ – on a donc une structure abstraite commune permettant de rendre compte des différentes structures probabilistes, suivant la loi produit que l'on ajoute à cette structure hilbertienne. Dans la suite, nous ne parlerons pas de choix d'une loi produit associée à une relation (1.1.2) mais de choix d'une *interprétation probabiliste*.

Dans le cas de la multiplicité supérieure, la question des interprétations probabilistes sera plus complexe mais évidemment plus intéressante. Nous y reviendrons dans la section 1.4.1.

1.2 Calcul d'Itô abstrait sur l'espace de Fock à temps discret

A partir de maintenant, l'espace de Fock à temps discret est défini comme l'espace $L^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$, que nous noterons simplement $l^2(\mathcal{P})$, la notation l^2 devant suffire à rappeler que l'espace \mathcal{P} considéré est discret. On notera aussi $\mathbb{T}\Phi$ l'espace $l^2(\mathcal{P})$ pour souligner l'analogie avec l'espace de Fock à temps continu Φ (le T vient de l'anglais : l'espace de Fock discret, ou suivant la terminologie plus sympathique de Meyer, bébé Fock, est appelé en anglais *toy Fock*). Remarquons encore que nous appellerons $\mathbb{T}\Phi$ l'espace de Fock à temps discret *simple* par opposition aux espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure que nous définirons en 1.4.

Fixons une base $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$ de $\mathbb{T}\Phi$. Le vecteur X_{\emptyset} sera en général noté Ω et appelé le vecteur vide. Les variables dans \mathcal{P} seront notées M, N, \dots . Fixons tout de suite une notation à propos de ces variables : pour tout M de \mathcal{P} , tout i de \mathbb{N} on notera M_i l'ensemble $M \cap \{0, \dots, i-1\}$ et $M_{\geq i}$ l'ensemble $M \cap \{i, \dots\}$. Nous noterons par ailleurs $M < i$ (respectivement $M \leq i$) à la place de $M \subset \{0, \dots, i-1\}$ (respectivement $M \subset \{0, \dots, i\}$).

L'espace de Fock possède une propriété importante de décomposition tensorielle explicite qui va nous permettre de retranscrire la notion probabiliste de prévisibilité et plus loin d'utiliser cet espace pour obtenir des dilatations de processus d'opérateurs. Détaillons cette propriété : de même que nous avons considéré dans notre présentation probabiliste un espace de Fock $\mathbb{T}\Phi$ associé à une suite de variables de Bernoulli indépendantes, nous aurions pu considérer un espace $\mathbb{T}\Phi_i$ associé aux variables ν_1, \dots, ν_{i-1} et un autre, $\mathbb{T}\Phi_{\geq i}$, associé aux variables ν_i, ν_{i+1}, \dots . L'isomorphisme (1.1.1) montre alors immédiatement que l'on a

$$\mathbb{T}\Phi \simeq \mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\geq i}; \quad (1.2.1)$$

Cet isomorphisme est encore explicite et nous le détaillons ci-dessous. De plus, il est clair que nous aurions pu regrouper autrement les indices des variables, ce qui fait que l'on a de manière très générale le résultat suivant :

Proposition 1.2.1 *Soit $\mathbb{N} = \cup_i I_i$ une partition disjointe de \mathbb{N} ; on a alors l'isomorphisme explicite suivant :*

$$\mathbb{T}\Phi \simeq \bigotimes_i \mathbb{T}\Phi_{I_i}.$$

qui est donné pour toute famille $(A_i)_i$, où chaque A_i est une partie finie de I_i , par

$$X_{\cup_i A_i} \longleftarrow \bigotimes_i X_{A_i}.$$

Nous utiliserons principalement des décompositions du type (1.2.1). Faisons deux commentaires à ce sujet : d'abord, on voit qu'un espace $\mathbb{T}\Phi_i$ s'identifie à l'espace L^2 construit sur la tribu i -prévisible naturellement associé à la marche de Bernoulli. Ceci justifie l'intérêt probabiliste des opérateurs du calcul d'Itô abstrait que nous définissons un peu plus loin. Par ailleurs, nous avons parlé du fait que la structure produit est entièrement définie par les X_i^2 , qui font apparaître la valeur de p . Nous n'avons pas parlé de la nature des produits $X_i X_j$, $i \neq j$; on voit ici que l'indépendance au sens probabiliste des variables X_i et X_j se traduit par une indépendance algébrique qui fait du produit $X_i X_j$ un produit tensoriel.

Dans la suite nous identifierons tout espace $\mathbb{T}\Phi_I$ à un sous-espace de $\mathbb{T}\Phi$ et omettrons d'écrire les signes \otimes , étant entendu que nous ne considérerons pas de produit autre que tensoriel. Autrement dit, sauf mention explicite, nous ne considérerons pas de produit qui dépendrait du choix d'une interprétation probabiliste. Remarquons par ailleurs que le point de vue que nous adoptons mène naturellement à voir l'indice i comme une variable de temps, alors que notre présentation physique en faisait plutôt une variable d'espace; voir l'indice i comme une variable de temps mène naturellement à l'inspiration probabiliste et c'est justement la coexistence des points de vue qui fait l'originalité de notre approche.

Avec ce point de vue probabiliste, les définitions suivantes sont naturelles; notons que l'on appelle *processus* une suite (que ce soit une suite de vecteurs ou d'opérateurs) lorsque l'on veut mettre l'accent sur le fait que l'indice est vu comme une variable de temps.

Définition 1.2.2 Soit $i \geq 0$;

- Un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi$ qui appartient à $\mathbb{T}\Phi_i$ est dit i -prévisible.
- Un processus de vecteurs $(f_i)_{i \geq 0}$ est dit *prévisible* si pour tout i de \mathbb{N} , le vecteur f_i est i -prévisible.
- On appelle *projection prévisible au temps i* l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace $\mathbb{T}\Phi_i$.

Un opérateur p_i s'exprime de la manière suivante :

$$p_i f(M) = \begin{cases} f(M) & \text{si } M \subset \{0, \dots, i-1\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Par ailleurs si l'on considère un élément f de $\mathbb{T}\Phi$, on voit facilement que pour tout i , des vecteurs $(p_{i+1} - p_i)f$ associés à des i distincts sont orthogonaux et que chacun s'écrit $d_i f X_i$ pour un certain $d_i f$ de $\mathbb{T}\Phi_i$ dont on obtient facilement l'expression explicite. Ceci justifie la définition suivante et les propriétés (1.2.4) et (1.2.5) :

Définition 1.2.3 Pour tout $i \geq 0$, on définit un opérateur d_i sur $l^2(\mathcal{P})$, appelé *gradient prévisible au temps i* , par les formules

$$d_i f(M) = \begin{cases} f(M \cup i) & \text{si } M \subset \{0, \dots, i-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Cela définit bien un opérateur d_i sur $l^2(\mathcal{P})$ qui vérifie, pour tout f , les égalités

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_i d_i f X_i \quad (1.2.4)$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_i \|d_i f\|^2. \quad (1.2.5)$$

A tout vecteur f est ainsi associé un processus i -prévisible $(d_i f)_{i \geq 0}$.

On remarque par ailleurs que pour tout processus prévisible $(g_i)_{i \geq 0}$ on a pour tout f dans $l^2(\mathcal{P})$

$$\sum_{i \geq 0} \langle g_i, d_i f \rangle = \left\langle \sum_{i \geq 0} g_i X_i, f \right\rangle \quad (1.2.6)$$

si l'on peut définir la série $\sum_i g_i X_i$, et que la série $\sum_{i \geq 0} \|g_i X_i\|^2$ a un sens si et seulement si

$$\sum_{i \geq 0} \|g_i\|^2 < \infty.$$

Il est donc naturel de définir l'opération adjointe de celle qui à un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi$ associe le processus prévisible $(d_i f)_{i \geq 0}$. Encore une fois il est facile d'obtenir l'expression de $\sum_{i \in \mathbb{N}} g_i X_i$ comme fonction sur \mathcal{P} :

$$\left(\sum_{i \geq 0} g_i X_i \right) (M) = g_{\vee M} (M \setminus \vee M) \quad (1.2.7)$$

où $\vee M$ représente le plus grand élément de M .

L'objet que nous avons défini ainsi s'appelle l'intégrale d'Itô :

Définition 1.2.4 Soit $(g_i)_{i \geq 0}$ un processus prévisible vérifiant $\sum_{i \geq 0} \|g_i\|^2 < \infty$. Ce processus est alors dit Itô intégrable et son intégrale d'Itô est définie comme l'élément de $l^2(\mathcal{P})$ égal à $\sum_{i \geq 0} g_i X_i$; cet élément vérifie l'équation (1.2.7) et la relation de dualité (1.2.6).

Il est facile de vérifier que l'on a, pour tout i ,

$$p_i \sum_{j \geq 0} g_j X_j = \sum_{j=0}^{i-1} g_j X_j \quad \text{et} \quad d_i \sum_{j \geq 0} g_j X_j = g_i.$$

Pour illustrer ces notions nous allons maintenant définir une classe d'éléments de $l^2(\mathcal{P})$: la classe des *vecteur exponentiels*. A toute fonction u de $l^2(\mathbb{N})$ on associe un élément $e(u)$ de $l^2(\mathcal{P})$ de la manière suivante :

$$e(u)(M) = \prod_{i \in M} u(i)$$

et en particulier $e(u)(\emptyset) = 1$. La fonction $e(u)$ ainsi définie est bien un élément de $l^2(\mathcal{P})$ d'après l'inégalité

$$n! \sum_{|A|=n} \left| \prod_{i \in A} |u(i)| \right|^2 \leq \left(\sum_{i \geq 0} |u(i)|^2 \right)^n,$$

valable pour tout n et qui entraîne que $\|e(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$. Remarquons que l'on n'a pas en revanche de formule simple pour un produit scalaire $\langle e(u), e(v) \rangle$.

La décomposition tensorielle (1.2.1) de $e(u)$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$ s'écrit aussi très simplement : en effet, un vecteur exponentiel $e(u)$ vérifie pour tout i

$$e(u) = e(u_i) e(u_{[i]}),$$

où, comme pour les ensembles, nous notons u_i la restriction de u à $\{0, \dots, i-1\}$ et $u_{[i]}$ sa restriction à $\{i, \dots\}$.

On a par ailleurs pour tout i

$$p_i e(u) = e(u_i) \quad \text{et} \quad d_i e(u) = u(i) e(u_i),$$

d'où la représentation prévisible de $e(u)$:

$$e(u) = \Omega + \sum_{i \geq 0} u(i) e(u_i) X_i.$$

On notera \mathcal{E} l'ensemble des vecteurs exponentiels.

Remarque

Le lecteur familier avec l'espace de Fock à temps continu Φ sait que, outre leur facilité de manipulation, les vecteurs exponentiels ont l'avantage de former une famille totale et libre. On voit facilement que les vecteurs exponentiels de $\mathbb{T}\Phi$ tels que nous les avons définis forment une famille totale dans Φ (tout vecteur X_A s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs exponentiels ; voir par exemple 4.2.2 dans le chapitre 4). En revanche une famille finie de vecteurs exponentiels n'est plus forcément linéairement indépendante. Si par exemple on prend $u = 0$, v égal à la suite dont tous les termes sont nuls sauf le premier qui vaut 1 et w égal à $2v$, on a

$$e(u) - 2e(v) + e(w) = 0.$$

On voit facilement que c'est l'atomicité de la mesure considérée dans $l^2(\mathbb{N})$ qui cause cette différence : ici u, v, w sont distincts mais ne diffèrent qu'en un point (ce qui ne pourrait se produire s'ils étaient éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$). On peut voir qu'en revanche si une famille de n vecteurs sépare au moins $n-1$ points alors les

vecteurs exponentiels qui leur sont associés sont linéairement indépendants. De la même manière, c'est l'atomicité de la mesure qui fait qu'on n'a qu'une inégalité $\|e(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$ et pas de formule simple pour $\langle e(u), e(v) \rangle$: contrairement à ce qui se passe en temps continu, les diagonales de \mathbb{N}^2 par exemple ne sont pas de mesure nulle.

1.3 Définition du calcul stochastique quantique à temps discret

Le calcul d'Itô abstrait que nous avons défini est une structure pratique pour parler des vecteurs de l'espace de Fock ; nous allons nous tourner à présent vers les opérateurs de cet espace.

1.3.1 Opérateurs fondamentaux

Nous commençons par définir une famille particulière, appelée à jouer un rôle important : les opérateurs de *création* $(a_i^+)_{i \geq 0}$, *annihilation* $(a_i^-)_{i \geq 0}$ et *conservation* $(a_i^\circ)_{i \geq 0}$.

Définition 1.3.1 *Pour tout entier naturel i on définit trois opérateurs bornés a_i^+ , a_i^- , a_i° sur $\mathbb{T}\Phi$ par*

$$\begin{aligned} a_i^+ X_A &= \begin{cases} X_{A \cup \{i\}} & \text{si } i \notin A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_i^- X_A &= \begin{cases} X_{A \setminus \{i\}} & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_i^\circ X_A &= \begin{cases} X_A & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Les opérateurs ainsi définis sont bornés, de norme 1 ; on les étend donc à $\mathbb{T}\Phi$ tout entier. Pour des raisons d'homogénéité des notations on notera parfois a_i^\times l'opérateur identité Id.

On remarque immédiatement que a_i° s'exprime simplement comme le produit $a_i^+ a_i^-$ et que ces opérateurs a_i^+ , a_i^- vérifient une relation d'*anticommutation*

$$a_i^+ a_i^- + a_i^- a_i^+ = \text{Id},$$

ce qu'il faut relier au fait que $\mathbb{T}\Phi$ peut aussi être construit comme un espace de Fock antisymétrique. On peut remarquer que les opérateurs de création et annihilation que nous avons définis ne sont en fait pas exactement les opérateurs usuels définis

sur un espace de Fock antisymétrique ; ils n'en diffèrent cependant que par un signe, et cela de telle manière que la relation d'anticommutation reste satisfaite.

L'intérêt de définir ces a_i^ϵ , $\epsilon = +, \circ, -$ vient des observations suivantes : dans une décomposition de l'espace $\mathbb{T}\Phi$ de la forme

$$\mathbb{T}\Phi = \mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}} \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i+1]},$$

les opérateurs a_i^ϵ , $\epsilon \in \{+, -, \circ, \times\}$ s'écrivent $\text{Id} \otimes a_i^\epsilon \otimes \text{Id}$. De plus, $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ est isomorphe à \mathbb{C}^2 ; l'ensemble des opérateurs linéaires de la forme $\text{Id} \otimes a_i^\epsilon \otimes \text{Id}$ dans cette décomposition tensorielle est donc de dimension 4 et, si on leur adjoint l'identité, les opérateurs a^+ , a^- , a° forment une base de cet ensemble. Ils s'identifient respectivement, dans la base Ω, X de \mathbb{C}^2 , aux matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute partie finie B de \mathbb{N} , tout $\epsilon \in \{+, -, \circ\}$ on définit $a_B^\epsilon = \prod_{i \in B} a_i^\epsilon$. Ces opérateurs vérifient

$$\begin{aligned} a_B^+ X_A &= \begin{cases} X_{A \cup B} & \text{si } B \cap A = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_B^- X_A &= \begin{cases} X_{A \setminus B} & \text{si } B \subset A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_B^\circ X_A &= \begin{cases} X_A & \text{si } B \subset A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Nous allons simplifier l'écriture de ces opérateurs en faisant une convention de notation supplémentaire qui nous servira tout au long de cette thèse. Nous noterons simplement

$$\begin{aligned} a_B^+ X_A &= X_{A+B} \\ a_B^- X_A &= X_{A-B} \end{aligned}$$

en considérant que toute quantité dans laquelle intervient $A + B$ (respectivement $A - B$) est nulle si $A \cap B \neq \emptyset$ (respectivement $B \not\subset A$) ; en pratique cela reviendra simplement à restreindre des ensembles de sommation : par exemple, C étant fixé, une somme $\sum_{A+B=C}$ est l'ensemble des sommes sur les A, B disjoints et de réunion C .

On observe facilement deux propriétés de ces familles d'opérateurs, propriétés qui seront fondamentales dans la suite.

Tout d'abord, du calcul

$$a_A^+ a_B^\circ a_C^- X_M = \begin{cases} X_{M+A-C} & \text{si } B \subset M, \\ \text{zéro} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un triplet A, B, C disjoint, on déduit facilement que la famille

$$\{a_A^+ a_B^\circ a_C^-, A, B, C \text{ disjoints et dans } \{0, \dots, i-1\}\} \quad (1.3.3)$$

forme une base de l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur $\mathbb{T}\Phi_i$ (nous devrions écrire : de l'ensemble des $h \otimes \text{Id}$ pour h borné sur $\mathbb{T}\Phi_i$).

En utilisant le fait que $a_A^+ a_B^\circ a_C^- = a_{A+B}^+ a_{B+C}^-$ pour tous A, B, C on voit par ailleurs que

$$\{a_A^+ a_B^-, A, B \text{ dans } \{0, \dots, i-1\}\} \quad (1.3.4)$$

constitue une autre base du même espace.

Par ailleurs, on remarque facilement diverses relations, d'une part concernant les opérateurs a_i^ϵ entre eux :

$$(a_i^+)^* = a_i^- \quad \text{et} \quad (a_i^\circ)^* = a_i^\circ,$$

et d'autre part entre ces opérateurs et les opérateurs du calcul d'Itô abstrait : on a $d_i = p_i a_i^-$. Nous pourrions donc simplifier nos notations et réduire le nombre d'objets considérés ; nous conservons cependant tous ces objets pour souligner les analogies avec le cas du temps continu.

En combinant les deux remarques ci-dessus, on remarque encore que $(d_i)^* = a_i^+ p_i$. Comme pour tout f dans $\mathbb{T}\Phi$ on a $a_i^+ p_i f = (p_i f) X_i$, on a un éclaircissement sur l'identité (1.2.6) et sur d'autres relations de dualité que nous observerons plus tard.

Exemples

- Un opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{X_i}^p$ par X_i pour le produit associé à une valeur de p se décompose lui aussi en $\text{Id} \otimes \mathcal{M}_{X_i}^p \otimes \text{Id}$. Il est facile de vérifier à partir des formules (1.3.1) et de (1.1.2) que $\mathcal{M}_{X_i}^p$ peut s'écrire

$$\mathcal{M}_{X_i}^p = a_i^+ + a_i^- + c_p a_i^\circ.$$

- Une autre base de \mathbb{C}^2 est plus classique : c'est la base formée des *matrices de Pauli*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

et de la matrice identité. Si l'on note a^+, a^-, a° les opérateurs a_i^+, a_i^-, a_i° vus comme agissant sur \mathbb{C}^2 , alors on a

$$a^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) \quad a^- = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) \quad a^\circ = \frac{1}{2}(\text{Id} - \sigma_z) \quad (1.3.6)$$

On va s'intéresser dans la suite à un analogue, pour les opérateurs, de la représentation prévisible (1.2.4).

1.3.2 Définition de l'intégrale stochastique à temps discret

Nous allons discuter un type de représentation analogue aux représentations prévisibles mais concernant les opérateurs. Pour cela nous devons d'abord définir la notion de *prévisibilité d'un opérateur*.

Considérons le cas d'une variable classique f , ou plutôt de l'opérateur de multiplication \mathcal{M}_f qui lui est associé dans une interprétation probabiliste quelconque ; on voit facilement que, si f est i -prévisible, alors l'opérateur \mathcal{M}_f s'écrit $\mathcal{M}_f \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_i$. C'est de cette propriété que nous nous inspirons pour définir la prévisibilité au temps i d'un opérateur de $\mathbb{T}\Phi$; cette définition peut paraître étonnamment simple en regard de celle qu'il faut considérer en temps continu pour ne pas restreindre son domaine de validité. La différence est qu'ici la prévisibilité permet de se ramener essentiellement à la dimension finie, et que considérer, en dimension finie, des opérateurs non bornés tient d'une subtilité qui serait ici gratuite.

Le Lemme 1.3.3 qui suit la définition fait le lien entre notre définition de la prévisibilité et la définition plus algébrique que l'on obtiendrait en retranscrivant mécaniquement les définitions considérées par Attal et Lindsay.

Définition 1.3.2 *Un opérateur h de $\mathbb{T}\Phi_i$ est dit i -prévisible s'il est de la forme $h \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_i$.*

On voit en particulier que tout opérateur i -prévisible peut être étendu en un opérateur borné ; c'est pourquoi, dans la suite (à l'exception du lemme suivant), tout opérateur i -prévisible sera considéré comme borné.

Lemme 1.3.3 *Un opérateur h sur $\mathbb{T}\Phi$ qui satisfait aux conditions suivantes :*

- *Son domaine $\text{Dom } h$ est stable par p_i et par tous les opérateurs d_j , $j \geq i$.*
- *Les égalités suivantes sont vérifiées sur $\text{Dom } h$:*

$$\begin{aligned} hp_i &= p_i h \text{ et} \\ hd_j &= d_j h \text{ pour tout } j \geq i \end{aligned}$$

peut être étendu en un opérateur prévisible au sens de la Définition 1.3.2.

Exemples

- Tout opérateur de multiplication dans une interprétation probabiliste quelconque par une variable aléatoire i -prévisible est un opérateur i -prévisible.
- Tout opérateur qui est combinaison linéaire d'opérateurs $a_A^+ a_B^0 a_C^-$ pour A, B, C contenus dans $\{0, \dots, i-1\}$ est i -prévisible. On peut voir grâce à la remarque (1.3.3) qu'inversement tout opérateur i -prévisible (borné) est de cette forme.

On voit déjà à quel point la combinaison des notions d'adaptation et du temps discret permet de simplifier les problèmes par rapport au cas usuel.

Nous allons maintenant définir de manière rigoureuse les intégrales stochastiques quantiques à temps discret. On veut que de telles intégrales forment des analogues, pour les opérateurs, de la représentation prévisible des vecteurs ; on veut donc pouvoir écrire des opérateurs sous la forme de séries $\sum_i h_i a_i$ où le terme $h_i a_i$ représente l'action "au temps i ". Il est alors naturel de vouloir que a_i soit un opérateur agissant sur $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ uniquement, et que les opérateurs intégrés h_i n'agissent que sur $\mathbb{T}\Phi_i$; or nous avons déjà vu que la famille $\text{Id}, a_i^+, a_i^-, a_i^\circ$ forme une base de l'ensemble des opérateurs qui s'écrivent $\text{Id} \otimes a_i \otimes \text{Id}$ dans $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}} \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i+1]}$.

Nous considérons donc les représentations qui nous intéressent comme des "séries" (en un sens à préciser) d'opérateurs $h_i a_i$ où h_i est i -prévisible et a_i est $\text{Id}, a_i^+, a_i^-, a_i^\circ$. Ceci explique l'intérêt de notre convention de notation $a_i^\times = \text{Id}$ pour tout i .

On appelle *processus prévisible* un processus d'opérateurs $(h_i)_{i \geq 0}$ tel que chaque h_i est i -prévisible. Rappelons que nous considérerons toujours un opérateur i -prévisible comme borné.

Définition 1.3.4 Soit ϵ dans $\{+, -, \circ, \times\}$. Pour tout processus prévisible $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$, on définit l'intégrale de $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$ par rapport à a^ϵ comme la série $\sum_{i \geq 0} h_i^\epsilon a_i^\epsilon$, au sens où :

- $\text{Dom} \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ est l'ensemble des $f \in \mathbb{T}\Phi$ tels que

$$\begin{cases} \text{pour tout } M \in \mathcal{P}, \sum_{i \geq 0} |h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(M)| < +\infty \\ M \mapsto \sum_{i \geq 0} h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(M) \text{ est alors de carré intégrable.} \end{cases}$$

- $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon f$ est défini par

$$\left(\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon f \right) (M) = \sum_{i \geq 0} h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(M)$$

pour tout M de \mathcal{P} .

Remarquons – cela nous sera utile dans la suite – que la condition de sommabilité à M fixé $\sum_i |h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(M)| < +\infty$ est triviale pour ϵ égal à $+$ ou \circ .

Il sera pratique, pour énoncer certains des théorèmes à venir, de considérer des *intégrales restreintes*, aux propriétés analytiques plus maniables.

Définition 1.3.5 Soit ϵ dans $\{+, -, \circ, \times\}$. Pour un processus prévisible $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$ on définit l'intégrale restreinte $\sum_i^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ comme la restriction de l'intégrale $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ à l'ensemble des vecteurs f de $\text{Dom} \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ tels que

$$M \mapsto \sum_{i \geq 0} |h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(M)|$$

est une fonction de carré intégrable sur \mathcal{P} .

Lien avec une définition Attal-Lindsay des intégrales

Il est facile de voir à partir des formules (1.3.1), que

- la quantité $a_i^+ f(M)$ est non nulle seulement si $i \in M$ et qu'alors $a_i^+ f(M) = f(M - i)$. On a donc pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^+ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M - i),$$

c'est-à-dire que $\sum_i h_i^+ a_i^+ f$ est "l'intégrale de Skorohod" (voir [Bel] ou [A-L]) de $(h_i^+ f)_{i \geq 0}$.

- l'opérateur de gradient prévisible d_i est égal à $p_i a_i^-$, donc pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^- f(M) = \sum_i h_i f(M + i),$$

- l'égalité $a_i^\circ = a_i^+ a_i^-$ et les deux remarques impliquent que pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^\circ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M)$$

et dans ces trois égalités il est équivalent que l'un ou l'autre des termes forme une série sommable et définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$. Les intégrales que nous avons définies sont donc exactement les traductions en temps discret des intégrales au sens de Attal et Lindsay (voir [A-L]). De même, les intégrales restreintes que nous définissons sont les analogues des intégrales restreintes de Attal et Lindsay.

En particulier, ces intégrales se manipulent exactement de la même manière que les intégrales à temps continu du type Attal-Lindsay, avec ceci de différent que nous considérons nos intégrandes h_i comme bornés et qu'une condition de domaine est par conséquent supprimée. Cette condition est cependant la condition la "moins liée" à l'intégrale elle-même : on peut tout autant, en temps continu, se restreindre à des intégrales de processus d'opérateurs bornés. Il est donc possible de retranscrire mécaniquement des preuves concernant les intégrales stochastiques quantiques à temps continu et d'obtenir ainsi à peu de frais des propriétés importantes satisfaites par nos intégrales.

Nous donnerons trois telles propriétés. La première est la formule d'Hudson et Parthasarathy décrivant l'action d'une intégrale stochastique sur le domaine exponentiel ; ces formules nous seront utiles dans nos procédures d'approximation. La seconde de ces propriétés est une caractérisation des intégrales restreintes comme solutions d'espèces d'équations différentielles, qui montre que nos intégrales restreintes sont les transcriptions en temps discret des intégrales stochastiques au sens de la définition Attal-Meyer. Cette formulation a le défaut de donner une expression moins explicite de l'action d'une intégrale stochastique mais condense de manière particulièrement pratique les conditions de domaine. La troisième propriété que nous

énoncerons est la *formule d'Itô* qui donne une expression de la composition de deux intégrales stochastiques quantiques et nous intéressera particulièrement dans le chapitre 4.

Il est facile, dans notre cadre à temps discret, d'obtenir à chaque fois, les expressions voulues par des calculs formels; la difficulté porte sur des questions de domaine qui alourdissent les démonstrations de discussions peu instructives. Il n'y avait donc que peu d'intérêt à donner les preuves ici. Puisque par ailleurs celles-ci se déduisent de manière systématique du cas à temps continu, elles n'apparaissent pas non plus dans l'article [Pt2]. Le lecteur qui voudra des démonstrations complètes pourra se reporter à [A-L]; il n'y a presque aucun changement à effectuer pour obtenir des preuves dans notre cadre à temps discret.

Proposition 1.3.6 (Proposition 1.7 de [Pt2]) *Soit $\epsilon \in \{+, \circ, -, \times\}$ et soit un processus prévisible $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$. Supposons qu'un vecteur exponentiel $e(u)$ soit dans le domaine de l'intégrale restreinte $\sum_i^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon$; alors pour tout v de $l^2(\mathbb{N})$ on a*

$$\begin{aligned} \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \overline{u(i)} \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^+ e(v) \rangle & \text{si } \epsilon = + \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^- a_i^- e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} v(i) \langle e(u), h_i^- e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle & \text{si } \epsilon = - \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \overline{u(i)} v(i) \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^\circ e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle & \text{si } \epsilon = \circ \\ \langle e(u), \sum_{i \geq 0} h_i^\times a_i^\times e(v) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \langle e(u), h_i^\times e(v) \rangle & \text{si } \epsilon = \times \end{aligned}$$

où, dans chaque cas, la série est sommable et où $u \mathbb{1}_{\neq i}$ par exemple représente la suite égale à u , sauf pour le i -ème terme qui vaut zéro.

La propriété suivante est la caractérisation de type Attal-Meyer de nos intégrales restreintes :

Proposition 1.3.7 (Proposition 1.8 de [Pt2]) *Soit ϵ dans $\{+, \circ, -, \times\}$ et soit $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$ un processus d'opérateurs prévisibles sur $\mathcal{T}\Phi$. Alors $\sum_i^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ peut aussi être décrit comme l'unique opérateur h vérifiant*

$$\begin{aligned} hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^+ p_i f X_i & \text{si } \epsilon = +, \\ hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^- d_i f & \text{si } \epsilon = -, \\ hf &= \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^\circ d_i f X_i & \text{si } \epsilon = \circ, \end{aligned}$$

$$hf = \sum_{i \geq 0} h_i d_i f X_i + \sum_{i \geq 0} h_i^\times p_i f \quad \text{si } \epsilon = \times,$$

où $h_i = \sum_{j < i} h_j^\epsilon a_j^\epsilon$ et où une égalité ci-dessus signifie que

- un vecteur f est dans le domaine de h si et seulement si
 - $(h_i d_i f)_{i \geq 0}$ est Itô-intégrable et
 - la condition similaire de sommabilité (Itô intégrabilité ou sommabilité suivant ϵ) de la seconde somme est vérifiée
- l'égalité est vérifiée.

Avec nos définitions de l'intégrale stochastique on obtient la formule fondamentale suivante, qui donne la représentation intégrale de la composition de deux intégrales stochastiques quantiques. Cette formule, la formule d'Itô, étend la formule de composition de deux variables aléatoires classiques si on identifie celles-ci à des opérateurs de multiplication.

Théorème 1.3.8 (Théorème 1.9 de [Pt2]) Soient $\epsilon, \eta \in \{+, \circ, -, \times\}$; soient $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$ et $(k_i^\eta)_{i \geq 0}$ deux processus d'opérateurs prévisibles sur $\mathcal{T}\Phi$. Alors

$$\sum_{i \geq 0}^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon \sum_{i \geq 0}^R k_i^\eta a_i^\eta - \sum_{i \geq 0}^R h_i^\epsilon k_i a_i^\epsilon - \sum_{i \geq 0}^R h_i k_i^\eta a_i^\eta - \sum_{i \geq 0}^R h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon, \eta}, \quad (1.3.7)$$

est une restriction de l'opérateur nul, où $a^{\epsilon, \eta}$ est simplement $a^\epsilon a^\eta$. Si les deux premières intégrales sont partout définies, alors l'opérateur (1.3.7) est l'opérateur nul.

Dans le cas où $\epsilon = -$ et $\eta = +$, on a $a^{\epsilon, \eta} = a^\times - a^\circ$, et le résultat est vrai *a fortiori* si la dernière intégrale est remplacée par deux intégrales.

Un calcul formel sur le produit de séries $\sum_i h_i a_i^\epsilon \sum_j k_j a_j^\eta$ permet d'obtenir immédiatement la formules ci-dessus. Il est cependant évident que l'on ne peut éviter de discuter les domaines de validité des diverses séries; pour cela, la caractérisation sous forme Attal-Meyer (voir (1.3.7)) est nécessaire.

Notons que $a^{\epsilon, \eta}$ est donné par le tableau suivant :

$\vec{\Gamma}$	-	o	+	×	(1.3.8)
-	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-	
o	0	a°	a^+	a°	
+	a°	0	0	a^+	
×	a^-	a°	a^+	a^\times	

sur lequel nous reviendrons au chapitre 4.

1.4 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1

Nous définissons dans cette section les espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1.

Il est facile de motiver physiquement l'introduction d'un espace de Fock à temps discret de multiplicité N : si l'on veut considérer une chaîne de particules qui n'ont plus seulement deux niveaux d'énergie mais, par exemple, $N+1$ niveaux, il nous faut considérer l'espace d'état

$$\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1},$$

que nous appellerons espace de Fock à temps discret de multiplicité N (et pas de multiplicité $N + 1$). L'intérêt de faire apparaître ces espaces dans un cadre probabiliste est en revanche moins évident ; c'est ce que nous allons discuter dans la partie 1.4.1, où nous nous cantonnons aux espaces de Fock de multiplicité finie pour rappeler les résultats exposés dans [AP2]. Dans la partie 1.4.2 en revanche nous donnons en revanche les définitions les plus générales et décrivons l'analogue, sur ces espaces, de la théorie que nous avons détaillée en multiplicité 1.

1.4.1 Espace de Fock associé à une marche aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace (A, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^N qui prend $N + 1$ valeurs exactement (au sens où elle prend chacune de ces valeurs avec une probabilité non nulle), ces valeurs engendrant tout l'espace \mathbb{R}^N ; nous noterons X^1, \dots, X^N les variables coordonnées de X dans la base canonique. Pour normaliser le problème on suppose que cette variable aléatoire est centrée et réduite, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}(X^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N$$

$$\mathbb{E}(X^i X^j) = \delta_{i,j}.$$

Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de copies indépendantes de X réalisée par exemple sur $(A^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$; on voit alors (Proposition 4 de [AP2]) que l'on obtient naturellement une base de l'espace $L^2(A^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$ en considérant les variables aléatoires

$$X_M = \prod_{(n_k, i_k) \in M} X_{i_k}^{n_k}$$

où M décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N} \times \{1, \dots, N\}$. On a donc bien fait apparaître l'espace de Fock à temps discret de multiplicité N , analogue à l'espace de Fock à temps discret simple.

Dans le cas simple cependant, l'intérêt de cette construction résidait dans le fait qu'elle permettait de faire cohabiter toutes les interprétations probabilistes qui correspondaient aux différentes valeurs prises par un paramètre $p \in]0, 1[$. Il est moins clair que l'on va pouvoir conserver une distinction entre les différents choix de la variable X ; cela découle en fait des résultats suivants (exposés comme Théorèmes 2 et 3 dans [AP2] mais prouvés initialement dans [A-E]) :

Théorème 1.4.1 *Soit X une variable aléatoire comme ci-dessus. Alors il existe une famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k=1,\dots,N}$ de scalaires telle que pour tout i, j dans $1, \dots, n$,*

$$X^i X^j = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^N T_k^{i,j} X^k \quad (1.4.1)$$

et la famille $(T_j^{i,j})$ a les deux propriétés de symétrie suivantes :

- la fonction $(i, j, k) \mapsto T_k^{i,j}$ est symétrique,
- la fonction $(i, j, l, m) \mapsto \sum_{k=1}^N T_k^{i,j} T_k^{l,m} + \delta_{i,j} \delta_{l,m}$ est symétrique.

Inversement toute famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k}$ vérifiant ces propriétés définit une unique variable aléatoire X centrée réduite comme ci-dessus.

C'est donc la famille $(T_k^{i,j})_{i,j,k}$ qui va jouer le rôle du paramètre p du cas simple (ou plutôt de c_p : l'équation (1.1.2) est l'analogie dans l'espace $\mathbb{T}\Phi$ simple de (1.4.1)) ; en particulier à toute telle famille – nous dirons encore *interprétation probabiliste* – sera associée un produit différent. Nous donnons plus loin la représentation intégrale d'un opérateur de multiplication par X_k^i dans une interprétation probabiliste, de même que nous l'avons fait en 1.3.1 pour le cas simple.

1.4.2 Espaces de Fock à temps discret de multiplicité quelconque

Nous définissons de manière plus générale les espaces de Fock à temps discret de multiplicité supérieure à 1. Un tel espace est associé à un *espace de multiplicité* qui sera un espace de Hilbert \mathcal{K} , éventuellement de dimension infinie mais toujours séparable. Le cas de multiplicité finie N se retrouvera en choisissant $\mathcal{K} = \mathbb{C}^N$.

On fixe une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de \mathcal{K} ; nous supposons par commodité que l'indice zéro 0 n'apparaît pas dans Λ . On peut identifier \mathcal{K} à \mathbb{C}^Λ ; il est alors naturel de définir $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ comme l'ensemble des fonctions sur \mathcal{P}_Λ , où \mathcal{P}_Λ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N} \times \Lambda$ sur lesquelles la projection sur la première coordonnée est injective : autrement dit, un élément de \mathcal{P}_Λ est un ensemble fini

$$\{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$$

avec $i_1 < \dots < i_n$ dans \mathbb{N} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ quelconques dans Λ .

Une base naturelle est ainsi donnée par l'ensemble $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$; pour $i \geq 0$ et $\lambda \in \Lambda$, nous noterons X_i^λ plutôt que $X_{\{i,\lambda\}}$, cela à la fois pour des questions de lisibilité et pour souligner l'idée que les $(X_{i,\lambda})_{i \geq 0}$ devraient pouvoir être interprétés comme des processus indépendants dans une interprétation probabiliste. Pour simplifier les notations dans la suite on notera parfois $X_{i,0}$ ou X_0^i le vecteur Ω .

On a exactement comme avant une décomposition tensorielle

$$\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K}) \simeq \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i \otimes \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{[i]}.$$

Ici $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ qui ont un support dans $\{0, \dots, i-1\} \times \Lambda$, c'est-à-dire qu'un élément f de $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ si et seulement si f vérifie

$$f(A) = 0 \text{ dès que } A \not\subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda;$$

l'espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{[i]}$ s'identifie de même à l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ à support dans $\{i, \dots\} \times \Lambda$.

On définit donc comme dans le cas précédent un opérateur p_i de projection orthogonale sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ et on appelle processus prévisible de vecteurs toute famille $(f_i)_{i \geq 0}$ avec $f_i \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$ pour tout $i \geq 0$. Il doit exister à la place du gradient prévisible d_i , toute une famille d'opérateurs : en effet, si l'on considère un vecteur f de $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$, tout $(p_{i+1} - p_i)f$ va s'écrire sous la forme

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} d_i^\lambda f X_i^\lambda.$$

Il faut donc, si l'on veut conserver une représentation prévisible de la même forme que dans le cas de l'espace de Fock simple, définir une famille d'opérateurs d_i^λ . Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on notera ainsi d_i^λ l'opérateur défini par

$$d_i^\lambda f(A) = \begin{cases} f(A \cup \{i, \lambda\}) & \text{si } A \subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur p_i , que l'on notera parfois d_i^0 pour simplifier nos notations, s'exprime par

$$p_i f(A) = \begin{cases} f(A) & \text{si } A \subset \{0, \dots, i-1\} \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors les formules suivantes, qui expriment la propriété de représentation prévisible dans $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$: pour tout $f \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$,

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} d_i^\lambda f X_i^\lambda.$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \mathbb{N}} \|d_i^\lambda f\|^2.$$

Nous n'avons pas détaillé la définition de l'intégrale d'Itô ; celle-ci ne pose cependant pas de problème analytique : pour $f_i \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_i$, $f_j \in \mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_j$ et $\kappa, \lambda \in \Lambda$, les vecteurs $f_i X_i^\lambda$ et $f_j X_j^\kappa$ sont orthogonaux à moins que $(i, \kappa) = (j, \lambda)$.

Il existe aussi plus d'opérateurs fondamentaux que dans le cadre de l'espace de Fock simple : pour tout i on définit des opérateurs de création, annihilation et conservation associés à chaque $\lambda \in \Lambda$ ainsi que des opérateurs *d'échange*. Nous allons utiliser à nouveau des conventions de notation du type $A + B$, $A - B$ pour des éléments A, B de \mathcal{P}_Λ . Pour toute paire d'éléments A, B de \mathcal{P}_Λ , on note $A + B$ l'élément $A \cup B$ si les *projections sur* \mathbb{N} de A et B sont disjointes, la grandeur qui porte $A + B$ en indice étant nulle sinon. C'est-à-dire que si

$$A = \{(i_1, \kappa_1), \dots, (i_m, \kappa_m)\}$$

et

$$B = \{(j_1, \lambda_1), \dots, (j_n, \lambda_n)\}$$

alors $A + B$ est $A \cup B$ si $\{i_1, \dots, i_m\}$ et $\{j_1, \dots, j_n\}$ sont disjoints. On notera $A - B$ l'élément $A \setminus B$ si $B \subset A$, la grandeur qui porte $A - B$ en indice étant nulle sinon.

Avec ces notations nous pouvons définir plus simplement les opérateurs fondamentaux : pour $i \geq 0$, $\lambda \in \Lambda$, on définit $a_{i,\lambda}^+$, $a_{i,\lambda}^-$, $a_{i,\lambda}^\circ$ comme dans le cas simple par

$$a_{i,\lambda}^+ X_A = X_{A+\{i,\lambda\}},$$

$$a_{i,\lambda}^- X_A = X_{A-\{i,\lambda\}}$$

$$a_{i,\lambda}^\circ X_A = a_{i,\lambda}^+ a_{i,\lambda}^- X_A,$$

ce qui donne

$$a_{i,\lambda}^\circ X_A = X_A \text{ si } (i, \lambda) \in A \text{ et zéro sinon.}$$

Ces opérateurs sont alors bornés de norme 1 et on peut les étendre à l'ensemble de $\mathbb{T}\Phi$. On définit par ailleurs, pour $\kappa \neq \lambda$ dans Λ , i fixé, les opérateurs *d'échange* de λ à κ par $a_{i,\kappa}^+ a_{i,\lambda}^-$; ces opérateurs agissent encore sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})_{\{i\}}$ uniquement et transforment X_i^λ en X_i^κ , annihilant tout autre vecteur de $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$.

Il sera utile d'homogénéiser les notations : nous noterons $a_i^{0,\lambda}$ les opérateurs de création, $a_i^{\lambda,0}$ les opérateurs d'annihilation et $a_i^{\lambda,\kappa} = a_i^{0,\kappa} a_i^{\lambda,0}$ les opérateurs de conservation ou d'échange. On souhaite alors définir une intégrale par rapport aux processus $(a_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0}$. Ici cependant l'existence d'une infinité de types d'intégrales nous oblige à définir

$$\sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_i h_i^{\kappa,\lambda} a_i^{\kappa,\lambda}$$

comme un tout pour prendre en compte les questions de sommabilité suivant κ, λ . Pour une famille $\left((h_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0} \right)_{\{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}\}}$ de processus d'opérateurs prévisibles,

l'intégrale associée est définie, comme en 1.3.4, comme l'opérateur

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ i \in N}} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda},$$

au sens où, comme précédemment, le domaine est l'ensemble des f de $\mathbf{T}\Phi(\mathcal{K})$ tels que

- pour tout $A \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$,

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ i \geq 0}} h_i^{\kappa, \lambda} \left| a_i^{\kappa, \lambda} f(A) \right| < +\infty$$

- la grandeur

$$\sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} f(A)$$

définit une fonction de carré sommable en A .

Comme précédemment on définit l'intégrale restreinte

$$\sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \in N}^R h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda},$$

comme la restriction de l'intégrale précédente au domaine constitué de l'ensemble des f tels que

$$A \mapsto \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0} \left| h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} f(A) \right|$$

est de carré intégrable.

Exemple

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire dans \mathbb{R}^N comme dans la section 1.4.1. L'opérateur de multiplication par X_n^i dans l'interprétation probabiliste associée à $(X_n)_{n \geq 0}$ s'écrit

$$a_n^{0,i} + a_n^{i,0} + \sum_{j,k} T_i^{j,k} a^{j,l}. \quad (1.4.2)$$

Nous n'allons pas énoncer les analogues dans ce cas de tous les résultats que nous avons mentionnés dans le cas de l'espace de Fock à temps discret simple mais allons nous contenter de donner la formule d'Itô dans ce cadre, formule qui prend une forme agréablement compacte avec nos conventions de notation.

Théorème 1.4.2 (Formule d'Itô pour les intégrales sur $\mathbf{T}\Phi(\mathcal{K})$) Soient

$$h = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda}$$

et

$$k = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R k_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda}$$

deux intégrales restreintes sur $T\Phi(\mathcal{K})$. Alors l'opérateur

$$\begin{aligned} h k - \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i k_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\kappa, \lambda} - \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{i \geq 0}^R h_i^{\kappa, \lambda} k_i a_i^{\kappa, \lambda} \\ - \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0}^R (h_i^{\kappa, \lambda} k_i^{\mu, \kappa}) a_i^{\kappa, \lambda} a_i^{\mu, \kappa} \end{aligned}$$

est une restriction de l'opérateur nul.

Chapitre 2

Représentations intégrales et nucléaires sur l'espace de Fock à temps discret

Dans ce chapitre, nous abordons la question de la représentabilité des opérateurs de $\mathbb{T}\Phi$ sous la forme d'intégrales stochastiques ou d'opérateurs à noyau, c'est-à-dire de séries (en un sens à préciser) de la forme $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$ où A, B, C décrivent \mathcal{P} et où le noyau k est une fonction à valeurs scalaires.

Dans la section 2.1 nous présentons une approche naïve de la question de la représentabilité. Cette approche, si elle ne permet pas d'obtenir de caractérisation satisfaisante, est intéressante pour deux raisons. D'abord, elle montre que l'on a de bonnes chances d'obtenir des résultats de représentabilité sur $\mathbb{T}\Phi$; par ailleurs, elle permet de préciser ce que l'on attend d'une représentation nucléaire et d'en donner une bonne définition. Nous introduisons ensuite les outils qui nous permettront d'étudier les conditions de représentabilité nucléaire puis obtenons une caractérisation des opérateurs représentables, avec des formules explicites pour les noyaux.

Dans la section 2.2 nous établissons un lien entre représentations nucléaires et représentations intégrales puis utilisons les résultats précédents pour obtenir des critères de représentabilité intégrale avec des expressions explicites des coefficients $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$, $(h_i^0)_{i \geq 0}$ apparaissant dans la représentation intégrale d'un opérateur h .

Enfin, dans la section 2.3, nous donnons les résultats analogues dans le cas des espaces de Fock discrets de multiplicité supérieure.

Ce chapitre reprend essentiellement l'article [Pt1].

2.1 Représentations nucléaires

2.1.1 Une première approche

L'idée fondamentale de cette approche est extrêmement simple et s'appuie sur les remarques (1.3.3) et (1.3.4) : sur notre espace de Fock à temps discret, la prévisibilité permet de se ramener à un cadre vectoriel de dimension finie. Nous avons dit alors que pour tout i la famille

$$\{a_A^+ a_B^\circ a_C^-, A, B, C \text{ disjoints dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

constitue une base de $\mathbb{T}\Phi_i$, et qu'en particulier tout opérateur i -prévisible h_i admet une représentation de la forme

$$h_i = \sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-, \quad (2.1.1)$$

où k est une fonction $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ (qui n'est définie en fait que sur les triplets (A, B, C) disjoints, les autres termes étant simplement inutiles). Une telle somme est finie ; il n'y a donc pas encore de problème d'ordre analytique.

Si maintenant nous nous intéressons à l'existence de représentations analogues pour un opérateur donné, sans hypothèse de prévisibilité, nous devons faire un choix du sens à donner à une telle représentation mais essayons d'exploiter le résultat ci-dessus portant sur les opérateurs prévisibles. Considérons donc un opérateur h de $\mathbb{T}\Phi$; pour la discussion à venir nous nous autorisons des hypothèses très confortables et le supposons borné. Notons $\mathbb{E}_i h$ l'opérateur égal à $p_i h p_i \otimes \text{Id}$; il est clair que $\mathbb{E}_i h$ converge fortement vers h lorsque i tend vers l'infini. De plus cet opérateur est i -prévisible donc il existe une fonction $k_i : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\mathbb{E}_i h = \sum_{A+B+C < i} k_i(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-.$$

On voit facilement par ailleurs pour $j > i$, d'une part que $\mathbb{E}_i(\mathbb{E}_j h) = \mathbb{E}_i h$, et d'autre part que

$$\mathbb{E}_i \sum_{A+B+C < j} k_j(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- = \sum_{A+B+C < i} k_j(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-.$$

Cela implique que le noyau k_j coïncide avec le noyau k_i sur les triplets de parties de $\{0, \dots, i-1\}$. Il existe donc une fonction k telle que pour tout i ,

$$\mathbb{E}_i h = \sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$$

et par conséquent

$$h \text{ est la limite forte de } \sum_{A+B+C < i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \text{ lorsque } i \rightarrow \infty.$$

On obtient ainsi une espèce de représentation en noyau pour tout opérateur borné. On a cependant plusieurs raisons de ne pas être satisfait de cette représentation : tout d'abord, ce raisonnement utilise l'hypothèse que l'opérateur h est borné, ce qui réduit considérablement le domaine d'application ; par ailleurs, et là est le plus grave, on voudrait que la série $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$, même si elle reste une écriture formelle, soit "indépendante de l'ordre de sommation". Cela semble en effet être une exigence minimale si l'on veut que cette écriture en série ait de bonnes propriétés. Notre approche naïve, elle, a fourni une série qui n'est *a priori* que semi-convergente.

Observons quelles conditions cette exigence impose : on veut qu'une représentation $h = \sum_{A, B, C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$ où l'on somme sur les triplets A, B, C de \mathcal{P} deux à deux disjoints, soit telle que pour tout f dans son domaine, pour tout N de \mathcal{P} , $hf(N)$ coïncide avec l'expression que l'on obtient après calcul formel de l'action de

$$\sum_{A, B, C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \quad \text{sur} \quad \sum_M f(M) X_M$$

et que l'expression obtenue soit indépendante de l'ordre de sommation suivant A, B, C et M (cela car la série $\sum_M f(M) X_M$ est naturellement absolument convergente).

L'égalité

$$a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- X_M = X_{M+A-C} \text{ si } B \subset M, \text{ zéro sinon}$$

montre que

$$\sum_{A, B, C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \sum_M f(M) X_M = \sum_{A, B, C} \sum_{M \supset B} k(A, B, C) f(M) X_{M+A-C}.$$

La sommation en M ne se fait que sur les M qui contiennent B et C ; on effectue donc un changement de variable qui permet de réécrire l'égalité ci-dessus en

$$\sum_M k(A, B, C) f(M+B) X_{A+B+M}.$$

Ce qui nous intéresse dans cette expression est la coordonnée suivant un X_M . Après un changement de variable supplémentaire on voit que l'expression ci-dessus se réécrit

$$\sum_M \left(\sum_{U+V+W=M} \sum_N k(U, V, N) f(V+W+N) \right) X_M,$$

de sorte que l'on doit avoir $hf(M)$ égal à

$$\sum_{U+V+W=M} \sum_N k(U, V, N) f(V + W + N).$$

Pour que cette quantité soit indépendante de l'ordre de sommation, il faut donc que pour chaque M de \mathcal{P} , cette série soit absolument convergente, ce qui revient à dire que pour tout triplet U, V, W , d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{P} on a

$$\sum_N |k(U, V, N) f(V + W + N)| < +\infty.$$

Cela sera l'une des conditions définissant les opérateurs à noyau.

Dans ce qui précède nous avons utilisé le fait que la famille

$$\{a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-, A, B, C \text{ disjoints dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

est une base de de $\mathbb{T}\Phi_i$ pour justifier l'intérêt que nous portons aux écritures en séries $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$. Nous avons vu cependant que la famille

$$\{a_A^+ a_B^-, A, B \text{ quelconques dans } \{0, \dots, i-1\}\}$$

constitue une autre base du même espace; nous aurions pu en suivant le même cheminement que précédemment arriver à la conclusion qu'il existe une fonction $k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ telle que

$$h \text{ est la limite forte de } \sum_{A \cup B < i} k(A, B) a_A^+ a_B^-$$

(notons que les arguments A et B ne sont plus disjoints).

On peut donc tout aussi légitimement s'intéresser à des représentations de la forme $h = \sum_{A,B \in \mathcal{P}} k(A, B) a_A^+ a_B^-$. Comme précédemment il est naturel d'exiger qu'une telle représentation soit telle que pour tout f du domaine de h , tout N de \mathcal{P} , $hf(N)$ soit donné par le développement formel de

$$\sum_{A,B} k(A, B) a_A^+ a_B^- \quad \sum_M f(M) X_M$$

et que le résultat soit indépendant de l'ordre de sommation. En examinant comment se traduisent ces exigences nous arrivons cette fois-ci à

$$hf(M) = \sum_{U+V=M} \sum_N k(U, N) f(V + N)$$

et la condition associée est maintenant que pour tous U, V disjoints de \mathcal{P} ,

$$\sum_N |k(U, N) f(V + N)| < +\infty.$$

Nous donnons donc les définitions suivantes :

Définition 2.1.1

- Soit une fonction $k_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; l'opérateur à noyau à trois arguments associé à k_3 est l'opérateur h dont le domaine est l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que pour tous U, V, W deux à deux disjoints de \mathcal{P} , on ait

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k_3(U, V, N)f(V + W + N)| < +\infty$$

et que l'expression

$$hf(M) = \sum_{U+V+W=M} k_3(U, V, N)f(V + W + N)$$

définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$.

- Soit une fonction $k_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; l'opérateur à noyau à deux arguments associé à k_2 est l'opérateur h dont le domaine est l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que pour tous U, V disjoints de \mathcal{P} , on ait

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k_2(U, N)f(V + N)| < +\infty$$

et que l'expression

$$hf(M) = \sum_{U+V=M} k_2(U, N)f(V + N)$$

définisse un élément de $l^2(\mathcal{P})$.

Nous allons étudier ces deux types de représentations. Nous verrons en particulier qu'elles sont strictement équivalentes ; de plus, l'écriture en noyau à deux arguments nous permettra de donner une interprétation simple des décompositions en opérateurs à noyau.

2.1.2 Transformations de noyaux

La première transformation que nous considérons est celle qui permet de passer d'une représentation à deux arguments à une représentation à trois arguments, du moins dans le cas des opérateurs prévisibles ou des opérateurs bornés, suivant l'approche que nous avons présentée en introduction. Cette transformation se déduit des égalités

$$a_A^+ a_B^- = a_{A \setminus B}^+ a_{A \cap B}^{\circ} a_{B \setminus A}^- \quad \text{et} \quad a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- = a_{A \cup B}^+ a_{B \cup C}^-$$

(la seconde étant valable pour A, B disjoints seulement) et s'exprime par

$$\begin{aligned} k_2(A, B) &= k_3(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A) \\ \text{et} & \\ k_3(A, B, C) &= k_2(A \cup B, B \cup C). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

La seconde transformation que nous considérons nous a été inspirée par les travaux de Lindsay (dans [Li1]). Dans notre cadre discret, on peut les définir pour les noyaux à deux ou trois arguments :

Définition 2.1.2

- Soit un noyau à trois variables $k_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; on définit sa transformée $k'_3 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$k'_3(A, B, C) = \sum_{V \subset B} k_3(A, V, C).$$

- Soit un noyau à deux variables $k_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$; on définit sa transformée $k'_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$k'_2(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} k_2(A \setminus B + V, B \setminus A + V).$$

Dans le cas des noyaux à trois arguments cette transformation est simplement la transformation de Möbius par rapport à la seconde variable ; dans le cas des noyaux à deux arguments l'expression en est un peu plus compliquée mais la transformation $k_2 \mapsto k'_2$ s'exprime encore grâce à la transformation de Möbius, de sorte que l'on peut inverser ces deux transformations :

$$k_3(A, B, C) = \sum_{V \subset B} (-1)^{|B-V|} k'_3(A, V, C) \tag{2.1.3}$$

dans le cas d'un noyau à trois variable et

$$k_2(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} (-1)^{|A \cap B - V|} k'_2((A \setminus B) \cup V, (B \setminus A) \cup V) \tag{2.1.4}$$

dans le cas d'un noyau à deux variables.

On peut par ailleurs vérifier qu'avec les définitions ci-dessus les noyaux k'_3, k'_2 sont reliés entre eux par des relations identiques à (2.1.2) :

$$k'_2(A, B) = k'_3(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A) \text{ et } k'_3(A, B, C) = k'_2(A \cup B, B \cup C). \tag{2.1.5}$$

On observe encore que les transformations que nous avons définies sont telles que le graphe suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k_2 & \longleftrightarrow & k_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ k'_2 & \longleftrightarrow & k'_3 \end{array},$$

et que toutes les correspondances sont bijectives. Cela signifie en particulier qu'une notation comme k'_3 est sans ambiguïté. Pour cette raison, nous supprimons les indices 2 ou 3 et notons simplement k, k' les différents noyaux, étant entendu qu'ils sont reliés par les relations ci-dessus.

Nous n'avons pas justifié la définition de la transformation $k \mapsto k'$ autrement que par son utilité dans les travaux de Lindsay. On se rendra pourtant compte *a posteriori* que c'était de prime abord un objet très naturel; nous choisissons malhonnêtement de ne pas encore dévoiler pourquoi.

La proposition suivante prouve l'équivalence entre représentations à deux et à trois arguments et montre en partie l'intérêt que présentent les transformations que nous avons définies :

Proposition 2.1.3 (Proposition 1 de [Pt1]) *Soit f un vecteur fixé de $l^2(\mathbb{N})$; on considère les conditions suivantes :*

- pour tous U, V, W deux à deux disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, V, N)f(V + W + N)| < +\infty \quad (2.1.6)$$

- pour tous U, V disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, N)f(V + N)| < +\infty \quad (2.1.7)$$

- pour tous U, V disjoints de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, V, N)f(V + N)| < +\infty \quad (2.1.8)$$

- pour tout U de \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, N)f(N)| < +\infty. \quad (2.1.9)$$

Alors les conditions sur les noyaux à trois arguments sont équivalentes aux conditions sur leurs analogues à deux arguments, c'est-à-dire que

(2.1.6) et (2.1.7) sont équivalents,

(2.1.8) et (2.1.9) sont équivalents.

De plus, les conditions sur des noyaux k impliquent les conditions sur leurs transformées k' , c'est-à-dire que

(2.1.6), (2.1.7) impliquent (2.1.8), (2.1.9).

Enfin, si toutes ces conditions sont vérifiées, les expressions suivantes sont égales :

$$\sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k(U, V, N) f(V + W + N) \quad (2.1.10)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k'(U, V, N) f(V + N) \quad (2.1.11)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k(U, N) f(V + N) \quad (2.1.12)$$

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} k'(M, N) f(N) \quad (2.1.13)$$

Remarque

Les conditions sur les noyaux transformés k' n'impliquent en revanche pas les conditions sur les noyaux k ; si par exemple on prend k de la forme

$$k(A, B, C) = (-1)^{|B|} j(A, C)$$

où $|B|$ est le cardinal de B et j est une fonction sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, alors

$$k'(A, B, C) = \mathbb{1}_{B=\emptyset} j(A, C).$$

La condition (2.1.8) devient

$$\text{pour tout } U \text{ de } \mathcal{P}, \sum_N |j(U, N) f(N)| < +\infty,$$

alors que (2.1.6) est

$$\text{pour tous } U, V \text{ de } \mathcal{P} \text{ disjoints, } \sum_N |j(U, N) f(V + N)| < +\infty.$$

On voit alors que si l'on considère

- une fonction j telle que $j(U, W) = 0$ si le cardinal de W est différent de 1,
- un vecteur f nul sur les singletons,

alors (2.1.8) est triviale tandis que (2.1.6) devient

$$\text{pour tous } U, V \text{ disjoints de } \mathcal{P}, \sum_{n \geq 0} |j(U, \{n\}) f(V + \{n\})| < +\infty. \quad (2.1.14)$$

ce qui impose encore des conditions sur les valeurs de j et de f . On peut donc construire de nombreux contre-exemples.

Dans son article [Li1], Lindsay, qui étudie des transformations analogues en temps continu pour des noyaux à trois arguments, affirme que la condition sur la transformée k' implique la condition sur k (la transcription en temps continu remplace simplement la somme par une intégrale). Notre contre-exemple cependant se traduit immédiatement au cas du temps continu et offre un contre-exemple à cette affirmation. Notons cependant que cette erreur n'a aucune conséquence sur le reste de l'article [Li1] ni sur l'article associé [B-L].

On peut par ailleurs identifier un domaine sur lequel les conditions (2.1.6), (2.1.7) sont équivalentes aux conditions plus simples (2.1.8), (2.1.9) :

Proposition 2.1.4 (Proposition 2 de [Pt1]) *Soit f un vecteur de $l^2(\mathcal{P})$ tel qu'il existe une fonction $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous A, B de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$,*

$$|f(A + B)| \leq |f(A)| \prod_{i \in B} \phi(i).$$

Pour ce vecteur f les conditions (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) sont équivalentes.

Définition 2.1.5 *Un vecteur f de $l^2(\mathcal{P})$ vérifiant la condition ci-dessus est dit sous-exponentiel; l'ensemble des vecteurs sous-exponentiels est noté $s\mathcal{E}$. Cet ensemble $s\mathcal{E}$ contient l'ensemble \mathcal{E} des vecteurs exponentiels ainsi que tous les vecteurs X_A , $A \in \mathcal{P}$.*

Cet ensemble $s\mathcal{E}$ n'est pas un espace vectoriel; tout ce qu'on peut en dire est que pour f, g dans $s\mathcal{E}$ et α, β dans \mathbb{C} , la fonction $|\alpha| |f| + |\beta| |g|$ est dans $s\mathcal{E}$.

Remarque

La Proposition 2.1.4 nous a montré en particulier qu'on a une stricte équivalence entre les noyaux à trois arguments et ceux à deux arguments, de sorte que nous ne nous soucierons plus de distinguer les deux types de représentations.

Les Propositions 2.1.3 et 2.1.4 donnent une expression simplifiée des conditions de représentabilité pour les opérateurs dont le domaine est inclus dans $s\mathcal{E}$. Nous allons voir cependant que, même lorsque l'on souhaite étudier la représentabilité d'un opérateur dont le domaine n'est pas inclus dans $s\mathcal{E}$, nos transformations restent utiles. L'équation (2.1.13) en particulier a une conséquence très importante : supposons que h soit un opérateur à noyau k et que la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ soit contenue dans le domaine de h . Alors pour tout M de \mathcal{P} ,

$$hX_A(M) = \sum_N k'(M, N) \mathbb{1}_{A=N},$$

et puisque $hX_A(M)$ est simplement $\langle X_M, hX_A \rangle$, on obtient la formule

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle \quad (2.1.15)$$

sous les conditions de domaine ci-dessus. Nous disposons donc théoriquement de tous les critères permettant de déterminer si un opérateur dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est représentable. L'expression de k' en fonction de k cependant n'est en général pas très maniable, de sorte que nous allons nous intéresser dans la suite à des critères plus directement accessibles.

Remarques

- Cette dernière formule éclaire le sens des conditions (2.1.8) et (2.1.9) : en effet, grâce à cette formule, la condition (2.1.9) devient

$$\text{pour tout } M, \sum_N |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty,$$

de sorte que, sous les conditions portant sur les transformées k' dans la Proposition 2.1.3, le développement en noyau est une simple réécriture de l'égalité

$$\text{pour tout } M \quad \langle X_M, h \sum_N f(N) X_N \rangle = \sum_N \langle X_M, hX_N \rangle f(N). \quad (2.1.16)$$

- La formule (2.1.15) nous permet aussi d'éclaircir le sens de cette représentation en noyaux. On a, du moins formellement,

$$h = \sum_{A, B} \langle X_A, hX_B \rangle |X_A\rangle \langle X_B|; \quad (2.1.17)$$

or $|X_A\rangle \langle X_B| = a_A^+ p_0 a_B^-$ et, comme nous allons le voir plus bas en (2.1.19),

$$p_0 = \sum_{N \in \mathcal{P}} (-1)^{|N|} a_N^\circ,$$

ce qui permet de déduire la forme de la représentation en noyau en substituant cette expression dans ce qui précède.

La justification que nous avons présentée dans la deuxième remarque ci-dessus se retrouve dans les questions de représentations en noyau dans les espaces de Fock à temps continu ; dans ce cas bien sûr les problèmes analytiques deviennent plus exigeants. Nous discuterons l'apparition de ces idées dans le chapitre suivant, dans la section 3.3.

Résumons la caractérisation que nous avons obtenue dans le cas d'opérateurs dont le domaine est contenu dans $s\mathcal{E}$:

Proposition 2.1.6 *Soit h un opérateur sur $T\Phi$ dont le domaine vérifie*

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}\} \subset \text{Dom } h \subset s\mathcal{E};$$

alors h peut être étendu en un opérateur à noyau si et seulement si pour tout f dans $\text{Dom } h$, tout M dans \mathcal{P} ,

$$\begin{cases} \sum_N |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty \text{ et} \\ \sum_N \langle X_M, hX_N \rangle f(N) = hf(M). \end{cases} \quad (2.1.18)$$

et le noyau k est alors donné par

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

Cette proposition n'est qu'une reformulation de notre définition utilisant 2.1.3 et 2.1.4; elle peut sembler décevante. En effet, il se comprend que l'hypothèse $\text{Dom } h \subset s\mathcal{E}$ soit nécessaire pour éviter que l'opérateur à noyau n'ait un domaine trop fantaisiste en regard de celui de h . Il peut sembler en revanche que la seconde condition de (2.1.18) puisse être remplacée par une hypothèse de fermabilité dans lesquelles on particulariserait la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$. L'énoncé ne peut se simplifier autant qu'on le croirait *a priori*. En effet, une condition de fermabilité usuelle s'écrit ainsi : si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments du domaine de K vérifie

$$\begin{cases} (u_n)_{n \geq 0} \text{ tend vers zéro et} \\ \text{la suite } (Ku_n)_{n \geq 0} \text{ converge,} \end{cases}$$

alors la limite de $(Ku_n)_{n \geq 0}$ est zéro. La deuxième condition de (2.1.18), elle, est à la fois plus faible que la fermabilité puisque les seules suites approchantes $(u_n)_{n \geq 0}$ considérées sont des sommes partielles de $\sum_N f(N)X_N$. Elle est en revanche plus forte que la fermabilité puisque l'hypothèse de convergence au sens faible disant que pour tout M de \mathcal{P} , $\langle X_M, Ku_n \rangle$ converge et définit une fonction de M de carré intégrable doit impliquer que, pour tout M , la limite est zéro.

2.1.3 Une condition suffisante de représentabilité nucléaire

Il est clair d'après la remarque montrant que les conditions de la Proposition 2.1.6 sont celles qui permettent d'écrire (2.1.16), qu'il existe un cas dans lequel la question de la représentabilité se simplifie grandement : c'est celui où l'on s'autorise des hypothèses sur l'adjoint de l'opérateur considéré. Nous prouvons ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.1.7 (Théorème 2 de [Pt1]) *Soit h un opérateur sur $T\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\} \subset \text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$; alors les formules (2.1.15) définissent un opérateur à noyau qui est une extension fermée de h .*

Il faut remarquer que, dans ce théorème, il n'y a plus d'hypothèse sur le domaine du type $Dom h \subset s\mathcal{E}$; nous ne nous servons plus en fait de la proposition 2.1.4 mais prouvons pour tout f de $\mathbb{T}\Phi$ les conditions plus fortes (2.1.6), (2.1.7) de la Proposition 2.1.3. Nous prouvons de plus que, dans ce cas, l'opérateur à noyau h_k obtenu est un opérateur fermé. Notons cependant que l'inclusion $\bar{h} \subset h_k$ n'est pas une égalité *a priori*.

Extensions de ces résultats

Il est à remarquer que, dans tout ce que nous avons fait, nous n'avons jamais utilisé l'ordre sur \mathbb{N} ; on peut donc transcrire nos résultats sans aucune modification au cas où l'on travaille sur un espace de Fock construit sur $l^2(\mathcal{A})$ pour \mathcal{A} dénombrable. Cela signifie que, si l'on considère un espace de Hilbert séparable et que l'on associe à une base hilbertienne quelconque des opérateurs de création, annihilation, conservation de la même manière qu'ici, on peut, sous des hypothèses analogues à celles de la Proposition 2.1.6 du Théorème 2.1.7, représenter tout opérateur de cet espace comme une série de produits de ces opérateurs a^+ , a^- , a° . En particulier, tout cela s'applique aux espaces de Fock de multiplicité supérieure et même de multiplicité finie. Nous détaillerons ces résultats en 2.3.

Exemples de représentations en noyaux

- Considérons un opérateur de projection adaptée p_i . Le Théorème 2.1.7 s'applique et l'on trouve

$$k'(A, B) = \langle X_A, p_i X_B \rangle$$

qui vaut 1 si $A = B \subset \{0, \dots, i-1\}$ et 0 sinon. En inversant cette formule nous trouvons des représentations

$$p_i = \sum_{B \geq i} (-1)^{|B|} a_B^\circ = \sum_{B \geq i} (-1)^{|B|} a_B^+ a_B^-. \quad (2.1.19)$$

- Pour α, β dans \mathcal{P} on peut considérer l'opérateur $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta|$. Alors $k'(A, B)$ vaut 1 pour $A = \alpha, B = \beta$, 0 sinon. On obtient

$$|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| = \sum_{B \in \mathcal{P}} (-1)^{|B|} a_\alpha^+ a_B^\circ a_\beta^-, \quad (2.1.20)$$

qui se déduit de l'exemple précédent et du fait que $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| = a_\alpha^+ p_0 a_\beta^-$ (voir la seconde remarque après la formule (2.1.15)).

- Définissons un opérateur h sur l'espace engendré par $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ par

$$hX_A = \sum_{B \subset A} X_B.$$

On voit facilement alors que h^* n'est pas défini sur l'ensemble $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ de sorte que l'on ne peut appliquer le Théorème 2.1.7 ; en revanche, la Proposition 2.1.6 s'applique et montre que h est étendu par l'opérateur $\sum_C a_C^-$.

2.2 Application aux questions de représentations intégrales

Nous allons utiliser à présent la structure d'ordre qui existe sur \mathbb{N} pour obtenir des représentations intégrales à partir de nos représentations nucléaires. Nous avons d'abord besoin de remarquer que, d'après nos calculs de

$$k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \sum_M f(M) X_M,$$

la Définition 2.1.1 revient à définir l'opérateur $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$ comme ayant pour domaine l'ensemble des f de $\mathbb{T}\Phi$ tels que

- pour tout M de \mathcal{P} ,

$$\sum_{A,B,C} |k(A, B, C) (a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- f)(M)| < +\infty$$

- la fonction

$$M \mapsto \sum_{A,B,C} (k(A, B, C) (a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- f))(M)$$

est de carré intégrable de M .

Grâce à cette remarque on voit qu'un opérateur à noyau est bien une série

$$\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$$

au sens où nous avons défini les séries d'opérateurs dans le cas des intégrales.

En particulier, les deux propriétés suivantes deviennent claires : d'abord, si l'on écrit k comme une somme $k_1 + \dots + k_n$ où les k_i ont deux à deux des supports disjoints, alors l'opérateur

$$\sum_{A,B,C} k_1(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- + \dots + \sum_{A,B,C} k_n(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$$

est une restriction de l'opérateur $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$. En effet, la première condition ci-dessus (sommabilité suivant A, B, C) est vérifiée de manière équivalente par une écriture et par l'autre et la propriété que l'expression donne une fonction

l^2 de M est plus forte pour la seconde écriture. Par ailleurs, si l'on écrit \mathcal{P} comme une réunion disjointe $\mathcal{P} = \cup_{i \geq 0} P_i$ alors

$$\sum_i \left(\sum_{A,B,C \in P_i} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \right)$$

est une extension de l'opérateur $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$ puisque la condition de sommabilité suivant i dans l'écriture ci-dessus est plus faible que la condition de sommabilité suivant A, B, C dans l'écriture en noyau, la condition l^2 étant ensuite équivalente dans un cas et dans l'autre.

2.2.1 Représentations nucléaires et intégrales

Supposons qu'un opérateur h sur $\mathbb{T}\Phi$ admette une représentation en noyau au sens de la Définition 2.1.1. Comme, pour tout $(A, B, C) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, le plus grand élément de $A \cup B \cup C$ est dans un et un seul des ensembles A, B, C , on peut réécrire la représentation en noyau de deux manières différentes : d'après les remarques faites ci-dessus, la somme des trois séries

$$\begin{aligned} & k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A, B, C < i}} k(A + i, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^+ \\ & + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A, B, C < i}} k(A, B + i, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^{\circ} + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ A, B, C < i}} k(A, B, C + i) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^- \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

est étendue par l'opérateur à noyau $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^-$, qui est à son tour étendu par

$$\begin{aligned} & k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i \left(\sum_{A,B,C < i} k(A + i, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^+ \right. \\ & \left. + \sum_{A,B,C < i} k(A, B + i, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^{\circ} + \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C + i) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- a_i^- \right). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Si l'on définit par ailleurs trois processus prévisibles $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^{\circ})_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$ par

$$\begin{cases} h_i^+ = \sum_{A,B,C < i} k(A + i, B, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \\ h_i^{\circ} = \sum_{A,B,C < i} k(A, B + i, C) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \\ h_i^- = \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C + i) a_A^+ a_B^{\circ} a_C^- \end{cases} \quad (2.2.3)$$

alors (2.2.2) se réécrit en

$$k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i (h_i^+ a_i^+ + h_i^{\circ} a_i^{\circ} + h_i^- a_i^-), \quad (2.2.4)$$

et l'on voit de la même manière que l'intégrale

$$k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i h_i^+ a_i^+ + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ + \sum_i h_i^- a_i^-$$

est elle-même une extension de (2.2.1) et une restriction de (2.2.4).

On a donc obtenu une intégrale stochastique quantique qui coïncide avec l'opérateur h sur leur domaine commun et on peut expliciter une partie de ce domaine commun. En particulier, si la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est dans le domaine de h alors elle est aussi dans celui de (2.2.1) puisque seule l'une des trois séries porte sur un nombre infini de termes.

De plus, les coefficients de l'intégrale sont donnés sous la forme d'opérateurs à noyau par (2.2.3) ; nous savons relier le noyau à l'expression de l'opérateur grâce à la formule (2.1.15), de sorte que nous pouvons déduire une forme plus explicite des opérateurs h_i^ϵ si nous supposons que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est inclus dans le domaine de h . Ces opérateurs s'expriment de manière particulièrement simple grâce aux opérateurs du calcul d'Itô abstrait :

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = d_i h p_i \\ h_i^- p_i = p_i h a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = d_i h a_i^+ p_i - p_i h p_i. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

2.2.2 Une condition suffisante de représentabilité intégrale

Dans la section précédente nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (Théorème 3 de [Pt1]) *Soit h un opérateur sur $T\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est contenu dans $Dom h \cap Dom h^*$, et notons \bar{h} la fermeture de h ; alors si l'on note h_i^ϵ les opérateurs définis par (2.2.5) et $\mu = \langle \Omega, h\Omega \rangle$, l'opérateur*

$$\left(\mu Id + \sum_i h_i^+ a_i^+ + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ + \sum_i h_i^- a_i^- \right) - \bar{h}$$

est une restriction de l'opérateur nul dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$.

Les p_i à droite des expressions (2.2.5) ne sont là que pour mettre en valeur la symétrie ; puisque $d_i = p_i a_i^-$ et que a_i^+ , a_i^- sont mutuellement adjoints, ces formules entraînent que

$$(k^*)_i^+ = k_i^-, \quad (k^*)_i^- = k_i^+ \quad \text{et} \quad (k_i^*)^\circ = k_i^\circ,$$

où les $(k^*)^\epsilon$ sont les coefficients de la représentation intégrale de h^* .

Représentation des processus

Dans ce qui précède, nous ne nous sommes intéressés qu'à la représentation d'un opérateur isolé. Si l'on souhaite considérer un processus d'opérateurs $(h_i)_{i \geq 0}$, que l'on suppose prévisible, on peut bien sûr déduire des formules précédentes une représentation intégrale de chaque h_i mais les coefficients de ces représentations dépendront de i , or nous aimerions avoir des écritures compatibles entre elles. On obtient facilement, à partir des formules précédentes, une représentation intégrale commune du processus à condition d'y intégrer une intégrale par rapport au temps : il suffit pour cela de remarquer que tout $h_{i+1} - h_i$ se décompose en une partie $h_i^+ a_i^+ + h_i^- a_i^- + h_i^\circ a_i^\circ$ et une partie i -prévisible. Remarquons qu'ici on n'a plus aucun problème de domaine puisque les opérateurs prévisibles sont bornés et que toutes les sommes sont finies.

Corollaire 2.2.2 *Soit (h_i) un processus prévisible d'opérateurs sur $\mathcal{T}\Phi$. Alors il existe quatre familles $(h_i^+)_{i \geq 0}$, $(h_i^-)_{i \geq 0}$, $(h_i^\circ)_{i \geq 0}$, $(h_i^\times)_{i \geq 0}$ telles que pour tout i on ait*

$$h_i = \mu Id + \sum_{j < i} h_j^+ a_j^+ + \sum_{j < i} h_j^- a_j^- + \sum_{j < i} h_j^\circ a_j^\circ + \sum_{j < i} h_j^\times a_j^\times$$

où $\mu = \langle \Omega, h_0 \Omega \rangle$ et les intégrandes sont données par

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = & d_i h_{i+1} p_i \\ h_i^- p_i = & p_i h_{i+1} a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = & d_i h_{i+1} a_i^+ p_i - p_i h_{i+1} p_i \\ h_i^\times p_i = & p_i (h_{i+1} - h_i) p_i. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Exemples de représentations intégrales

- les opérateurs de projection adaptée p_i pour $i \geq 0$ s'écrivent

$$p_i = Id + \sum_{j \geq i} h_j^\circ a_j^\circ \quad (2.2.7)$$

pour $h_j^\circ = -\sum_{N \subset \{i, \dots, j-1\}} (-1)^{|N|} a_N^\circ$ et cette représentation intégrale est nécessairement valable partout puisqu'on a une représentation nucléaire sur tout $\mathcal{T}\Phi$ qui est strictement équivalente à la restriction commune (2.2.1).

- Soient α, β dans \mathcal{P} et supposons par exemple que le plus grand élément de $\alpha \cup \beta$ est un élément $a \in \alpha$. Alors l'opérateur $|X_\alpha\rangle\langle X_\beta|$ admet la représentation intégrale

$$(a_{\alpha-a}^+ (Id + \sum_{j=0}^{a-1} h_j^\circ a_j^\circ) a_\beta^-) a_a^+ + \sum_{j \geq a} (|X_\alpha\rangle\langle X_\beta| h_j^\circ) a_j^\circ$$

où les opérateurs h_j° sont définis dans l'exemple précédent. Encore une fois cette représentation est valable sur tout $\mathbb{T}\Phi$.

2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans cette section, nous considérons le cas où l'on travaille sur un espace de Fock à temps discret $\mathbb{T}\Phi_{\mathcal{K}}$, pour un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} , dont une base hilbertienne est indexée par $\{0\} \cup \Lambda$, comme dans la section 1.4. On rappelle que \mathcal{P}_Λ est l'ensemble des parties finies M de $\mathbb{N} \times \Lambda$ telles qu'il n'existe pas dans M deux éléments de la forme (i, κ) et (i, λ) .

Dans un tel espace, une représentation en noyau est encore une série du type $\sum k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ où les a^+ , a^- , a° sont ceux que nous avons définis en 1.4 et A, B, C sont des éléments de \mathcal{P}_Λ ; ces ensembles A, B, C sont non seulement disjoints mais les projections sur \mathbb{N} de A, B sont disjointes, celles de B, C sont disjointes. En revanche on peut avoir par exemple des éléments (i, κ) dans A et (i, λ) dans C , avec $\lambda \neq \kappa$ cependant. Ceci cependant n'a rien à voir avec nos preuves combinatoires (de telles considérations n'apparaissent pas dans les représentations à deux arguments) et tous nos critères portant sur les représentations en noyaux restent valables si l'on considère des représentations en noyaux sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$; seuls les ensembles d'indexation vont changer.

Pour énoncer l'analogie de la Proposition 2.1.6 il faut dire que l'ensemble $s\mathcal{E}(\mathcal{K})$ se définit comme dans la Proposition 2.1.4 en considérant des fonctions ϕ de $\mathbb{N} \times \Lambda$ dans \mathbb{R}_+ .

Proposition 2.3.1 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ dont le domaine vérifie*

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\} \subset \text{Dom } h \subset s\mathcal{E}(\mathcal{K});$$

alors h peut être étendu en un opérateur à noyau si et seulement si pour tout f dans $\text{Dom } h$, tout M dans \mathcal{P}_Λ ,

$$\begin{cases} \sum_{N \in \mathcal{P}_\Lambda} |\langle X_M, hX_N \rangle f(N)| < +\infty \text{ et} \\ \sum_{N \in \mathcal{P}_\Lambda} \langle X_M, hX_N \rangle f(N) = hf(M). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

et le noyau k est alors donné par

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

Théorème 2.3.2 *Soit h un opérateur sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\} \subset \text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$; alors la formule*

$$k'(A, B) = \langle X_A, hX_B \rangle.$$

définit un opérateur à noyau qui est une extension fermée de h .

On peut à nouveau tirer formellement une représentation intégrale d'une représentation en noyaux; sans détailler les calculs, on peut voir que l'on obtient des intégrandes donnés par leur représentation en noyaux. On obtient ainsi le théorème suivant, qui est l'analogie du Théorème 2.2.1 :

Théorème 2.3.3 *Soit h un opérateur sur $\mathcal{T}\Phi$ tel que $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ est contenu dans $\text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$, et notons \bar{h} la fermeture de h . Si l'on définit des processus prévisibles $(h_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0}$ pour tout couple (κ, λ) d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ avec $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$ par*

$$\begin{cases} h_i^{\kappa,\lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0,\kappa} p_i & \text{pour } \kappa, \lambda \text{ distincts dans } \Lambda \cup \{0\}, \\ h_i^{\lambda,\lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0,\lambda} p_i - p_i h p_i & \text{pour } \lambda \text{ dans } \Lambda \end{cases}$$

et un scalaire μ par

$$\mu = \langle \Omega, h\Omega \rangle,$$

alors l'opérateur

$$\left(\mu Id + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa,\lambda} a_i^{\kappa,\lambda} \right) - h$$

est une restriction de l'opérateur nul dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$.

Enfin, on a pour corollaire le résultat de représentation des processus, analogue du Corollaire 2.2.2. Ici, cependant, une intégrale arrêtée au temps i n'est plus une somme finie puisqu'il existe une infinité de termes $h_i^{\kappa,\lambda}$; on ne peut donc pas, par rapport au Théorème 2.3.3, améliorer le domaine de validité de la représentation intégrale.

Corollaire 2.3.4 *Soit (h_i) un processus prévisible d'opérateurs sur $\mathcal{T}\Phi(\mathcal{K})$; il existe des processus prévisibles $(h_i^{\kappa,\lambda})_{i \geq 0}$ pour tout couple (κ, λ) d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ tels que pour tout i l'opérateur*

$$h_i - \mu Id + \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} h_i^{\kappa,\lambda} a_i^{\kappa,\lambda}$$

est une restriction de l'opérateur nul dont le domaine contient $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\Lambda\}$; les intégrandes sont donnés par

$$\begin{cases} h_i^{\kappa,\lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0,\kappa} p_i & \text{pour } \kappa, \lambda \text{ distincts dans } \Lambda \cup \{0\}, \\ h_i^{\lambda,\lambda} = d_i^\lambda h a_i^{0,\lambda} p_i - p_i h p_i & \text{pour } \lambda \text{ dans } \Lambda, \\ h_i^{0,0} = p_i (h_{i+1} - h_i) \end{cases}$$

et μ est donné par

$$\mu = \langle \Omega, h_0 \Omega \rangle.$$

Chapitre 3

Calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock

Dans ce chapitre, nous présentons rapidement la théorie du calcul stochastique quantique sur les espaces de Fock bosoniques construits sur des espaces $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace de Hilbert séparable.

Dans la section 3.1, nous définissons ces espaces de Fock et le calcul d'Itô abstrait qui lui est associé ; ce calcul d'Itô mène naturellement à la formulation Attal-Meyer de l'intégration stochastique quantique. Nous définissons cette formulation dans la section 3.2 ; nous donnons également des expressions du type Attal-Lindsay ou Hudson-Parthasarathy de l'action des intégrales qui nous seront utiles dans la suite. Nous n'entrerons cependant pas dans les subtilités des recoupements précis entre les diverses théories.

Dans la section 3.3 nous présentons rapidement un autre type de représentation des opérateurs : les noyaux de Maassen-Meyer.

Nous nous sommes efforcés, dans cette présentation, de mettre en avant les analogies entre théories à temps discret et à temps continu. Pour plus de détails sur la théorie de l'intégration stochastique quantique suivant cette approche on pourra consulter le livre de Meyer [Me2] ou le texte de présentation [At5].

3.1 Espaces de Fock

3.1.1 Définition de l'espace de Fock simple

Nous commençons par définir l'espace le plus couramment considéré en probabilités quantiques : l'espace de Fock bosonique sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous présenterons plus loin les analogues de multiplicité supérieure, c'est-à-dire les espaces de Fock bosoniques sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace de Hilbert séparable quelconque. Nous

avons fait ce choix afin d'alléger l'exposé : les résultats que nous énonçons dans l'espace de Fock simple s'étendent aux cas plus généraux sans grande difficulté mais les notations s'en trouvent alourdies.

Nous travaillerons donc principalement sur l'espace de Fock *simple*, noté Φ , qui est défini usuellement comme le complété de l'espace préhilbertien

$$\bigoplus_{n \geq 0} L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n},$$

où \circ représente le produit tensoriel symétrique, et où $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ 0} = \mathbb{C}$ par convention. Comme dans le cas de l'espace de Fock à temps discret, les manipulations seront grandement simplifiées par l'utilisation de la notation de Guichardet ; nous ne détaillerons pas la construction de l'isomorphisme explicite, que l'on peut trouver dans tous les ouvrages de référence. Disons simplement qu'il s'agit d'identifier les éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n}$ à l'ensemble des fonctions symétriques sur \mathbb{R}_+^n ou encore aux fonctions des n -uplets de \mathbb{R}_+ .

Nous nous appuyons sur l'analogie avec le temps discret pour définir directement l'espace de Fock Φ comme l'espace de fonctions de carré intégrable $L^2(\mathcal{P})$, où \mathcal{P} est l'ensemble des parties finies de \mathbb{R}_+ muni de la mesure qui coïncide avec la mesure de Lebesgue n -dimensionnelle sur le sous-ensemble \mathcal{P}_n de \mathcal{P} constitué des n -uplets, et telle que l'ensemble vide \emptyset est un atome de masse 1. Nous utiliserons donc indifféremment les notations Φ et $L^2(\mathcal{P})$.

Un élément de Φ sera donc une fonction $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ telle que

$$|f(\emptyset)|^2 + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} |f(\{s_1, \dots, s_n\})|^2 < +\infty.$$

L'élément canonique dans \mathcal{P} sera noté σ et l'élément infinitésimal $d\sigma$. Nous respecterons par ailleurs la convention qui veut qu'une partie $\{s_1, \dots, s_n\}$ soit toujours écrite sous forme ordonnée : les s_i sont supposés vérifier $s_1 < \dots < s_n$ hormis mention contraire.

L'indicatrice de l'ensemble vide est appelée le *vecteur vide* de $L^2(\mathcal{P})$ et est notée Ω . Pour tout n de \mathbb{N} , le sous-espace s'identifiant à $L^2(\mathcal{P}_n)$ est appelé le n -ième chaos. Cet espace est simplement le sous-espace de Φ formé des fonctions à support dans les n -uplets : pour toute fonction f de $L^2(\mathcal{P})$,

$$f \text{ appartient au } n\text{-ième chaos} \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma| \neq n.$$

On notera \circ le *produit de Wick* qui est simplement le produit symétrique dans $L^2(\mathcal{P})$: pour deux éléments f, g de $L^2(\mathcal{P})$, on définit $f \circ g(\sigma)$ pour tout σ par

$$f \circ g(\sigma) = \sum_{\tau \subset \sigma} f(\tau)g(\sigma \setminus \tau).$$

Le produit $f \circ g$ n'est pas *a priori* un élément de $L^2(\mathcal{P})$. Si cependant f et g appartiennent aux n -ième et m -ième chaos respectivement, alors $f \circ g$ est un élément de $L^2(\mathcal{P})$ et même un élément du $n + m$ -ième chaos. Il est clair alors que le n -ième chaos est exactement l'espace engendré par les vecteurs de la forme $u_1 \circ \dots \circ u_n$ pour u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

3.1.2 Calcul d'Itô abstrait sur Φ

Voyons d'abord que l'espace Φ a lui aussi une propriété intéressante de décomposition tensorielle explicite. Pour tout $I \subset \mathbb{R}_+$, on peut définir le sous-espace Φ_I des éléments de $L^2(\mathcal{P})$ à support dans I , c'est-à-dire que pour un élément f de Φ ,

$$f \text{ appartient à } \Phi_I \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ pour presque tout } \sigma \text{ tel que } \sigma \not\subset I.$$

La proposition suivante énonce la propriété de décomposition tensorielle de Φ :

Proposition 3.1.1 *Soit $\mathbb{R}_+ = \cup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ une partition en intervalles disjoints ; alors on a un isomorphisme explicite*

$$\Phi \simeq \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \Phi_{I_i}$$

obtenu en associant à toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $f_i \in \Phi_{I_i}$ une fonction f par

$$f(\sigma) = \prod_{i \in \mathbb{N}} f_i(\sigma \cap I_i).$$

Pour tout t de \mathbb{R}_+ on notera en particulier Φ_t ou $L^2(\mathcal{P}_t)$ le sous-espace de $L^2(\mathcal{P})$ constitué des fonctions à support dans $[0, t]$, et $\Phi_{[t, +\infty)}$ le sous-espace des éléments de $L^2(\mathcal{P})$ à support dans $[t, +\infty)$.

Il sera plus simple dans le cas de l'espace de Fock à temps continu de parler d'adaptation au lieu de prévisibilité. La notion d'adaptation pour les vecteurs de Φ reste par ailleurs similaire à la notion de prévisibilité de l'espace de Fock à temps discret :

Définition 3.1.2

- Un vecteur f de Φ qui appartient à $L^2(\mathcal{P}_t)$ est dit t -adapté.
- On appelle projection adaptée au temps t l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace Φ_t .

Un opérateur de projection adaptée P_t s'exprime de la façon suivante :

$$P_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On définit aussi une famille d'opérateurs appelés *gradients adaptés*. Cette définition pose cependant plus de problèmes que dans le cas à temps discret : on voudrait définir, pour f dans Φ , le vecteur $D_t f$ par

$$D_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma \cup \{t\}) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Il est cependant clair qu'une telle définition ne peut définir un opérateur D_t défini sur tout f de Φ puisque les éléments de $L^2(\mathcal{P})$ ne sont définis que presque partout : on ne peut espérer définir au mieux, pour un f donné, $D_t f$ que pour presque tout t . Nous reviendrons sur ce problème un peu plus loin. Il est en revanche évident que, s'il est défini, $D_t f$ est, comme $P_t f$, un vecteur t -adapté.

Dans ce cadre à temps continu nous devons être plus prudent avec les questions analytiques. Nous appellerons donc *processus* de vecteurs dans Φ toute famille $(f_t)_{t \geq 0}$ de vecteurs de Φ telle que $t \mapsto f_t$ est mesurable. Le premier processus de vecteurs qui nous intéressera sera le processus $(\chi_t)_{t \geq 0}$, par rapport auquel nous intégrerons pour obtenir l'intégrale d'Itô :

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \{s\} \text{ et } s < t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On souhaite définir une intégrale de processus adaptés $(f_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de vecteurs par rapport à la courbe $(\chi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Nous appuyant sur le cas discret, nous définissons directement l'intégrale sous forme algébrique : le vecteur $\int f_t d\chi_t$ est défini par

$$\int f_t d\chi_t(\sigma) = \begin{cases} f_{\vee \sigma}(\sigma \setminus \vee \sigma) & \text{si } \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Notons que l'on peut retrouver cette définition comme une limite en norme de sommes de Riemann $\sum_i f_{t_i} \otimes (\chi_{t_{i+1}} - \chi_{t_i})$, ce qui justifie la notation sous forme intégrale.

On voit facilement qu'avec cette définition

$$\int_{\mathcal{P}} \left| \int f_t d\chi_t(\sigma) \right|^2 d\sigma = \int \|f_t\|^2 dt \quad (3.1.3)$$

qui montre qu'il est nécessaire et suffisant, pour que la définition (3.1.2) définisse bien un élément de $L^2(\mathcal{P})$, que $\int \|f_t\|^2 dt < +\infty$. De plus on vérifie par un calcul analogue, que

$$\int_0^\infty \int_{\mathcal{P}_t} |f(\sigma \cup t)|^2 d\sigma dt = \|f\|^2$$

qui indique que $D_t f$ est bien défini pour presque tout t . On obtient alors facilement la proposition suivante :

Proposition 3.1.3 *Soit f un vecteur de Φ ; avec la définition (3.1.1), $D_t f$ est bien défini comme élément de $L^2(\mathcal{P})$ pour presque tout t . On a donc un processus adapté $(D_t f)_{t \geq 0}$ défini pour presque tout t , qui vérifie*

$$f = f(\emptyset)\Omega + \int D_t f d\chi_t \quad (3.1.4)$$

et

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \int \|D_t f\|^2 dt. \quad (3.1.5)$$

L'écriture (3.1.4) d'un vecteur de f est appelé sa *représentation prévisible*; nous reviendrons un peu plus loin sur cette appellation.

On peut remarquer que l'on a, pour tout f de Φ et presque tout t ,

$$P_t \int_0^\infty f_s d\chi_s = \int_0^t f_s d\chi_s \quad \text{et} \quad D_t \int_0^\infty f_s d\chi_s = f_t.$$

La Proposition 3.1.3 fait apparaître plus précisément le lien entre Φ et $\mathbb{T}\Phi$; en effet, la décomposition tensorielle 3.1.1 dans Φ montre que l'on a en quelque sorte

$$\Phi \simeq \bigotimes_{t \geq 0} \Phi_{[t, t+dt]}$$

et la représentation prévisible d'un vecteur (3.1.4) montre que $\Phi_{[t, t+dt]}$ est "engendré" par Ω et $d\chi_t$, donc peut être vu comme isomorphe à \mathbb{C}^2 . On a donc en quelque sorte

$$\Phi \simeq \bigotimes_{t \geq 0} \mathbb{C}^2.$$

et il est à prévoir que Φ puisse être approché d'une certaine manière par des "fonctions en escalier" qui pourront être vues comme éléments de $\mathbb{T}\Phi$. C'est l'idée sous-jacente à ce que nous verrons dans la section 4.

Remarquons par ailleurs que l'on peut itérer la représentation prévisible d'un opérateur f : les vecteurs $D_t f$ sont des éléments de l'espace de Fock et ont à leur tour une représentation prévisible, et ainsi de suite. On arrive ainsi à écrire tout élément de Φ comme

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) d\chi_{s_1} \dots d\chi_{s_n}$$

que l'on abrège en

$$f = \int_{\mathcal{P}} f(\sigma) d\chi_\sigma,$$

formule à laquelle est associée la formule d'isométrie

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Cette représentation est appelée *représentation chaotique* de f . Elle nous montre que notre espace de Fock est isomorphe à l'espace chaotique de toute martingale et à l'espace L^2 canoniquement associé à toute martingale normale. Par exemple Φ s'identifie à l'espace $L^2(\mu)$ où μ est la mesure de Wiener par l'identification de

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) d\chi_{s_1} \dots d\chi_{s_n}$$

à la variable aléatoire classique

$$f = f(\emptyset) + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) dW_{s_1} \dots dW_{s_n}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien ; il en serait de même si nous avions considéré une autre martingale normale, comme le processus de Poisson compensé ou celles des martingales d'Azéma qui ont la propriété de représentation chaotique. Remarquons que, dans le cas d'une martingale normale qui n'a pas la propriété de représentation chaotique, son espace chaotique est encore isomorphe à Φ mais pas l'espace L^2 qui lui est associé.

L'identification de Φ à un tel espace L^2 associé à une martingale classique est appelé une *interprétation probabiliste*. Comme dans le cas discret, l'espace Φ que nous avons construit offre une structure hilbertienne permettant de considérer de nombreuses situations probabilistes ; c'est encore en faisant le choix d'une loi produit sur cet espace que nous ferons réapparaître les propriétés véritablement probabilistes.

Remarquons encore que, dans toutes ces interprétations, les opérateurs P_t s'identifient aux espérances conditionnelles, les D_t donnent la représentation prévisible au sens classique de variables aléatoires, l'intégrale d'Itô abstraite s'identifie à l'intégrale par rapport à la martingale considérée ; notre formalisme traduit simplement le fait que ces opérateurs s'expriment, sur les décompositions chaotiques, de manière indépendante de l'interprétation probabiliste.

Sous-ensembles de Φ

Nous considérerons souvent trois sous-ensembles particuliers de $L^2(\mathcal{P})$: le premier est le *domaine exponentiel* \mathcal{E} , le deuxième est le sous-espace \mathcal{J} défini par Coquio dans [Co2] et le troisième est *l'espace à nombre fini de particules* \mathcal{F} .

A toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ on associe une fonction $\mathcal{E}(u)$ sur \mathcal{P} par

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u)(\emptyset) & = & 1 \\ \mathcal{E}(u)(\{s_1, \dots, s_n\}) & = & u(s_1) \dots u(s_n). \end{cases}$$

Cette fonction $\mathcal{E}(u)$ est un élément de $L^2(\mathcal{P})$, comme on peut le voir grâce à l'égalité

$$\int_{s_1 < \dots < s_n} |u(s_1) \dots u(s_n)|^2 ds_1 \dots ds_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} |u(s)|^2 ds$$

qui implique

$$\|\mathcal{E}(u)\|^2 = e^{\|u\|^2}.$$

L'ensemble de tous les vecteurs exponentiels est noté simplement \mathcal{E} , comme dans le cas à temps discret ; la notation pour les vecteurs est en revanche différente et il n'y aura pas de risque de confusion. Cet ensemble \mathcal{E} est total dans $L^2(\mathcal{P})$ et, de plus, toute famille finie de vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u_1), \dots, \mathcal{E}(u_n)$ associés à des fonctions u_1, \dots, u_n deux à deux distinctes est une famille libre (voir par exemple [Me2]). Ces vecteurs sont de plus particulièrement faciles à manier puisque, comme nous le verrons ci-dessous, les opérateurs du calcul d'Itô s'expriment simplement sur \mathcal{E} . Pour toutes ces raisons, le domaine exponentiel est un domaine particulièrement pratique et utile.

L'ensemble \mathcal{J} est le sous-espace de $L^2(\mathcal{P})$ engendré par le vecteur vide Ω et par les vecteurs $j(v, u)$ définis, pour tous u, v dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, par

$$\begin{cases} j(v, u)(\emptyset) & = & 0 \\ j(v, u)(\{s_1, \dots, s_n\}) & = & v(s_n) u(s_1) \dots u(s_{n-1}). \end{cases}$$

La relation $\mathcal{E}(u) = \Omega + j(u, u)$ implique que \mathcal{J} contient \mathcal{E} ; l'espace \mathcal{J} est donc dense dans Φ .

Enfin, l'espace à nombre de particules fini \mathcal{F} est défini comme la somme algébrique des chaos ; pour un vecteur f de $L^2(\mathcal{P})$ on a donc,

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma| \geq N.$$

Il est évident, de par la définition de Φ , que \mathcal{F} est un sous-ensemble dense de Φ et qu'il est engendré par Ω et les vecteurs de la forme $u_1 \circ \dots \circ u_n$.

On peut voir que les vecteurs exponentiels et vecteurs $j(v, u)$ vérifient les relations suivantes, au regard du calcul d'Itô abstrait. Pour toute fonction u nous noterons ici comme dans la suite u_t la fonction $u \mathbb{1}_{[0, t]}$.

$$\begin{aligned} P_t \mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(u_t) \\ D_t \mathcal{E}(u) &= u(t) \mathcal{E}(u_t) \\ \mathcal{E}(u) &= \Omega + \int_0^\infty u(t) \mathcal{E}(u_t) d\chi_t. \\ P_t j(v, u) &= j(v_t, u_t) \end{aligned}$$

$$D_t j(v, u) = v(t) \mathcal{E}(u_t)$$

$$j(v, u) = \int_0^\infty v(t) \mathcal{E}(u_t) d\chi_t.$$

3.1.3 Espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Nous allons maintenant présenter brièvement l'analogie de ce qui précède dans le cas d'un espace de Fock de multiplicité supérieure à 1.

Soit \mathcal{K} un espace de Hilbert ; on en fixe une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et on suppose pour simplifier les notations que Λ ne contient pas l'indice zéro. L'espace de Fock de multiplicité \mathcal{K} , que l'on note $\Phi_{\mathcal{K}}$, est usuellement défini comme le complété de

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})^{\otimes n}.$$

Encore une fois nous utilisons directement la notation de Guichardet ; on observe que $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_+ \times \lambda)$ si l'on munit $\mathbb{R}_+ \times \lambda$ du produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de dénombrement. Il est ensuite simple de voir que $\Phi_{\mathcal{K}}$ s'identifie à $L^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ où les éléments de \mathcal{P}_Λ sont les parties finies de $\mathcal{P} \times \Lambda$; un élément de $\Phi_{\mathcal{K}}$ est donc une fonction de variable σ , cette variable étant maintenant de la forme

$$\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}$$

où $n \in \mathbb{N}$, les s_k sont deux à deux distincts et appartiennent à \mathbb{R}_+ et les λ_k appartiennent à Λ . Nous appliquerons encore la convention que $\sigma = \{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}$ est implicitement écrit de manière à ce que $s_1 < \dots < s_n$. La condition d'intégrabilité pour qu'une fonction f sur \mathcal{P}_Λ appartienne à $\Phi_{\mathcal{K}}$ est maintenant la suivante :

$$\sum_n \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda} \int_{s_1 < \dots < s_n} \left| f(\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}) \right|^2 ds_1 \dots ds_n < +\infty.$$

Les intégrales d'Itô abstraites sont maintenant définies par rapport à une famille de courbes χ_t^λ , $\lambda \in \Lambda$, et on définit des opérateurs de gradient adapté D_t^λ pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Pour tout f de $\Phi_{\mathcal{K}}$, on pose

$$P_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \times \Lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$D_t^\lambda f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma \cup \{(t, \lambda)\}) & \text{si } \sigma \subset [0, t] \times \Lambda \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour homogénéiser nos notations nous noterons parfois D_t^0 l'opérateur de projection adaptée P_t . Pour définir les intégrales d'Itô abstraites on considère des familles

$(\chi_t^\lambda)_{t \geq 0}$ de vecteurs de $\Phi_{\mathcal{K}}$. Pour un processus adapté $(f_t)_{t \geq 0}$ de vecteurs de $\Phi_{\mathcal{K}}$, l'intégrale $\int_0^\infty f_t d\chi_t^\lambda$ est définie pour chaque i de λ par

$$\int_0^\infty f_t d\chi_t^\lambda(\sigma) = \begin{cases} f_{s_n}(\sigma \setminus (s_n, \lambda_n)) & \text{si } \sigma = \{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\} \text{ avec } \lambda_n = \lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et en particulier toutes les intégrales sont nulles sur l'ensemble vide. Nous noterons $\int f_t d\chi_t^0$ l'intégrale par rapport au temps $\int f_t dt$.

Tout vecteur f de $\Phi_{\mathcal{K}}$ a alors une représentation prévisible

$$f = f(\emptyset) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty D_t^\lambda f d\chi_t^\lambda$$

avec la formule d'isométrie

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty \|D_t^\lambda f\|^2 dt.$$

Les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u)$, les $j(v, u)$ et les vecteurs à nombre fini de particules sont eux aussi définis de manière analogue au cas de l'espace de Fock simple Φ : un vecteur exponentiel est maintenant associé à tout u de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ par

$$\mathcal{E}(u)(\{(s_1, \lambda_1), \dots, (s_n, \lambda_n)\}) = u(s_1, \lambda_1) \cdots u(s_n, \lambda_n),$$

on a un ensemble $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ de vecteurs $j(v, u)$ définis pour v, u dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ par

$$j(v, u) = \Omega + \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty v(s, \lambda) \mathcal{E}(u_s) d\chi_s^\lambda,$$

et le domaine à nombre fini de particules est engendré par Ω et par les vecteurs de la forme

$$u_1 \circ \dots \circ u_n$$

pour u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

3.2 Définition de l'intégration stochastique quantique

3.2.1 Intégration stochastique quantique sur l'espace de Fock simple

Il existe plusieurs définitions des intégrales stochastiques quantiques. Ces définitions diffèrent surtout par leur domaine de validité et le caractère plus ou moins

explicite de l'expression de l'action des intégrales. Nous n'aurons pas besoin du domaine de définition maximal qu'offre la définition de Attal et Lindsay (dans [A-L]); nous nous contenterons donc de donner la définition des intégrales au sens de Attal et Meyer (énoncée à l'origine dans [A-M]), dont on sait qu'elle donne les intégrales *restreintes* de la théorie Attal-Lindsay, c'est-à-dire une restriction en un sens précis des intégrales les plus générales. Des expressions du type Attal-Lindsay ou Hudson-Parthasarathy de l'action d'une intégrale stochastique quantique nous serviront dans la suite; nous les énonçons donc comme propriétés vérifiées par les intégrales du type Attal-Meyer. De plus, la théorie Attal-Meyer a le mérite de permettre une présentation de l'intégrale stochastique quantique intuitivement très proche du cas discret.

L'idée sous-jacente à la définition Attal-Meyer des intégrales stochastiques quantiques est la suivante : puisque les intégrales stochastiques du type $\int H_t da_t$ que nous voulons définir doivent généraliser l'intégrale stochastique classique, une intégrale du type $\int H_t da_t$ doit étendre le cas où H_t et da_t sont des opérateurs de multiplication. Il est donc naturel de considérer que, dans une intégrale $\int H_t da_t$, le processus intégré $(H_t)_{t \geq 0}$ doit être adapté, c'est-à-dire, dans une première approche, agir comme $H_t \otimes \text{Id}$ sur $\Phi_t \otimes \Phi_t$; l'accroissement da_t ayant la propriété d'agir comme $\text{Id} \otimes da_t \otimes \text{Id}$ dans $\Phi_t \otimes \Phi_{[t, t+dt]} \otimes \Phi_{[t+dt]}$.

La propriété de représentation prévisible nous montre par ailleurs que $\Phi_{[t, t+dt]}$ doit être vu comme engendré par Ω et $d\chi_t$; l'ensemble des opérateurs sur \mathbb{C}^2 étant de dimension 4, tout bruit convenable da_t peut être écrit à partir des quatre bruits fondamentaux da_t^+ , da_t^- , da_t° , da_t^\times donnés par le tableau suivant :

$$\begin{aligned} da_t^+ \Omega &= d\chi_t & \text{et} & & da_t^+ d\chi_t &= 0, \\ da_t^- \Omega &= 0 & \text{et} & & da_t^- d\chi_t &= dt, \\ da_t^\circ \Omega &= 0 & \text{et} & & da_t^\circ d\chi_t &= d\chi_t, \\ da_t^\times \Omega &= dt & \text{et} & & da_t^\times d\chi_t &= 0. \end{aligned}$$

L'analogie que nous avons évoquée plus tôt, montrant que chaque $\Phi_{[t, t+dt]}$ correspond à un $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$ de l'espace de Fock à temps discret, apparaît encore ici : les accroissements de la courbe d'intégration $d\chi_t$ correspondent aux vecteurs X_i du cas discret et il est alors clair d'après le tableau ci-dessus, à comparer avec (1.3.1), que les opérateurs différentiels da_t^ϵ correspondent aux opérateurs a_i^ϵ . Par analogie avec le cas discret il est naturel d'appeler création le bruit da_t^+ , annihilation le bruit da_t^- et conservation le bruit da_t° .

Remarquons encore que l'action de da_t^\times correspond à une simple multiplication par dt ; on n'a donc, d'après ce qui précède, besoin de considérer des intégrales que par rapport aux trois bruits quantiques da_t^ϵ , $\epsilon = +, -, \circ$, et par rapport au temps.

On obtient les équations Attal-Meyer pour les intégrales par rapport à ces trois bruits véritablement quantiques da_t^ϵ , $\epsilon = +, -, \circ$, en considérant l'action d'une famille

d'intégrales du type $H_t = \int_0^t H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ sur un vecteur $f = f(\emptyset)\Omega + \int D_s f d\chi_s$ de Φ . Tout d'abord, puisque H_t doit être t -adapté, $H_t f$ est déterminé par $H_t f_t$. Par ailleurs, une telle intégrale doit satisfaire à une relation de type Itô :

$$d(H_t f_t) = dH_t f_t + H_t df_t + dH_t df_t.$$

En développant en $dH_t = H_t^\epsilon da_t^\epsilon$, $df_t = Df_t d\chi_t$ et en utilisant le fait que da_t^ϵ doit agir uniquement sur $\Phi_{[t, t+dt]}$ on arrive à une équation du type

$$H_t f_t = H_0 f(\emptyset)\Omega + \int_0^t H_s D_s f d\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s^+ P_s f d\chi_s & \text{si } \epsilon = + \\ \int_0^t H_s^\circ D_s f d\chi_s & \text{si } \epsilon = \circ \\ \int_0^t H_s^- D_s f ds & \text{si } \epsilon = - \\ \int_0^t H_s^\times P_s f ds & \text{si } \epsilon = \times \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On en vient ainsi à définir une intégrale au travers d'une espèce d'équation différentielle vérifiée par la fonction $\int_0^t H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ de t . Avant d'aller plus loin, nous devons préciser le sens à donner à l'adaptation d'un opérateur de Φ ; on peut garder l'idée que, comme dans le cas discret, un opérateur t -adapté est un opérateur H qui s'écrit sous la forme

$$H \otimes \text{Id}$$

dans $\Phi_t \otimes \Phi_{[t]}$. Cependant, dans ce cadre à temps continu, travailler avec des intervalles de temps borné ne suffit pas à lever les difficultés d'ordre analytique et une telle définition de l'adaptation est trop restrictive. Nous choisissons donc une définition plus algébrique, à rapprocher du Lemme 1.3.3

Définition 3.2.1 Soit $t \geq 0$. Un opérateur H sur Φ est dit t -adapté si et seulement si

- le domaine de H est stable par P_t et par D_u pour presque tout $u \geq t$,
- on a

$$\begin{cases} H P_t = P_t H \\ H D_u = D_u H \end{cases} \quad \text{sur le domaine de } H.$$

Un processus $(H_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs, c'est-à-dire une famille indexée par t d'opérateurs, est dit adapté si pour tout t , l'opérateur H_t est t -adapté.

Notons au passage que nous n'avons pas fait d'hypothèse de mesurabilité sur les processus d'opérateurs. Les hypothèses dont nous aurons besoin seront implicites dans la définition des intégrales stochastiques quantiques, et nous ne parlerons de processus d'opérateurs que pour les intégrer.

Ceci nous permet de définir les intégrales stochastiques quantiques ; la définition de l'article d'Attal et Meyer concerne en fait le processus $(\int_0^t H_s^\epsilon da_s^\epsilon)_{t \geq 0}$. On peut cependant adapter cette définition pour définir une intégrale isolée :

$$H = \mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

en la caractérisant par le fait qu'elle doit satisfaire, pour tout t , une équation du type (3.2.1).

Définition 3.2.2 (Définition de l'intégrale stochastique [A-M]) Soient trois processus adaptés d'opérateurs $(H_t^+)_{t \geq 0}$, $(H_t^-)_{t \geq 0}$, $(H_t^\circ)_{t \geq 0}$. L'intégrale

$$\mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

est définie comme l'opérateur H maximal parmi ceux qui, si on note $(H_t)_{t \geq 0}$ le processus $(P_t H P_t)_{t \geq 0}$, vérifient l'équation

$$Hf = \mu f(\emptyset) + \int_0^\infty H_s D_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^+ P_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^- D_s f ds + \int_0^\infty H_s^\circ D_s f d\chi_s. \quad (3.2.2)$$

Par "vérifie l'équation (3.2.2)" nous entendons qu'un vecteur f est dans le domaine de H si et seulement si toutes les conditions naturelles de domaine sont vérifiées, les intégrandes sont Itô-intégrables ou intégrables par rapport au temps suivant les cas, et l'équation est valide.

On peut définir une intégrale

$$\mu \text{Id} + \int_0^t H_s^+ da_s^+ + \int_0^t H_s^- da_s^- + \int_0^t H_s^\circ da_s^\circ$$

comme l'intégrale des processus $(H_s^\epsilon \mathbb{1}_{[0,t]}(s))_{s \geq 0}$. On observe que pour presque tout t , cette intégrale est un opérateur t -adapté qui coïncide sur Φ_t avec H_t . On notera donc H_t l'intégrale arrêtée au temps t ; malgré ce changement de notation l'équation (3.2.2) reste inchangée. Remarquons par ailleurs qu'il n'est pas évident qu'il existe toujours une solution à une équation (3.2.2); l'existence générale de telles solutions est justifiée par la théorie Attal-Lindsay.

Une intégrale par rapport au temps $\int H_s^\times dt$ (encore notée $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$) est définie suivant un procédé proche de la méthode que nous avons appliquée dans le cas discret : $\int_0^t H_s^\times da_s^\times$ a pour domaine l'ensemble des f tels que

$$\int_{\mathcal{P}} \left(\int_0^\infty |H_t^\times f(\sigma)| dt \right)^2 d\sigma < +\infty,$$

et s'exprime par

$$\int_0^\infty H_s^\times dt f(\sigma) = \int_0^\infty (H_s^\times f(\sigma)) ds.$$

On peut voir alors qu'une intégrale stochastique

$$\mu \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$$

vérifie encore l'équation du type Attal-Meyer

$$\begin{aligned} H_t P_t f &= \mu f(\emptyset) + \int_0^t H_s D_s f d\chi_s + \int_0^t H_s^+ P_s f d\chi_s \\ &\quad + \int_0^t H_s^- D_s f ds + \int_0^t H_s^\circ D_s f d\chi_s + \int_0^t H_s^\times P_s f ds \end{aligned}$$

suggérée par notre approche heuristique, où comme précédemment H_t est l'intégrale du processus arrêté au temps t . Dans la suite, nous considérerons, lorsqu'il le faudra, des intégrales $\int H_t dt$; cependant, lorsque nous chercherons, dans le chapitre 5, des représentations intégrales d'opérateurs, nous ne nous intéresserons qu'à des intégrales ne faisant pas intervenir d'intégrale par rapport au temps. Il est important de comprendre pourquoi : dans ce chapitre nous nous chercherons des représentations intégrales à un opérateur. Or, lorsque l'on cherche à représenter un opérateur H en intégrale stochastique quantique, seule une représentation du type

$$H = \mu \text{Id} + \int H_s^+ da_s^+ + \int H_s^- da_s^- + \int H_s^\circ da_s^\circ$$

présente un intérêt ; en effet, la situation est comparable au cas où l'on considère un processus de variables aléatoires classiques : comme dans ce cas-là, on n'a pas unicité d'une représentation faisant intervenir une intégrale par rapport au temps, et une telle représentation ne donne pas la représentation prévisible de la variable aléatoire ni ne permet de retrouver le processus de martingale associé. Avec une représentation en intégrale par rapport aux seuls bruits quantiques da^+ , da^- , da° , on sait que si H se représente en intégrales stochastiques quantiques, alors

$$P_t H P_t = P_t H_t = H_t P_t \quad (3.2.3)$$

où H_t est l'intégrale arrêtée au temps t .

Notons que si, en revanche, on cherche à représenter un processus d'opérateurs $(H_t)_{t \geq 0}$, il est intéressant et même *a priori* nécessaire de chercher une représentation sous la forme

$$H_t = \mu \text{Id} + \int_0^t H_s^+ da_s^+ + \int_0^t H_s^- da_s^- + \int_0^t H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^t H_s^\times da_s^\times.$$

Exemples

- Les opérateurs classiques des espaces de Fock a_f^+ , a_f^- , pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, apparaissent ici comme

$$\int_0^\infty f(s) da_s^+, \quad \int_0^\infty f(s) da_s^-.$$

On distingue en particulier les opérateurs a_t^+ , a_t^- ainsi que a_t° , qui sont

$$\int_0^\infty da_s^+, \quad \int_0^\infty da_s^-, \quad \int_0^\infty da_s^\circ$$

respectivement.

- Dans ce cadre à temps continu, ce sont les *équations de structure* (voir [A-E]) qui distinguent les interprétations probabilistes. En effet, toute martingale normale $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie une équation $d[X, X]_t = dt + \psi_t dX_t$. L'opérateur de multiplication par un élément f de Φ s'écrit alors dans l'interprétation probabiliste associée à $(X_t)_{t \geq 0}$

$$f(\emptyset) + \int_0^\infty \mathcal{M}_{D_t f}(da_t^+ + da_t^-) + \int_0^\infty \mathcal{M}_{D_t f} \mathcal{M}_{\psi_t} da_t^\circ,$$

où $\mathcal{M}_{D_t f}$ est l'opérateur de multiplication par $D_t f$ (voir [At2] ou [At5]).

En particulier, l'opérateur de multiplication par X_t s'écrit

$$a_t^+ + a_t^- + \int_0^t \psi_s da_s^\circ. \quad (3.2.4)$$

- Si les quatre processus adaptés $(H_t^\epsilon)_{t \geq 0}$, $\epsilon = +, \circ, -, \times$, sont définis sur \mathcal{E} et sont tels que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \|H_s^+ \mathcal{E}(u)\|^2 + |u(s)| \|H_s^- \mathcal{E}(u)\| + |u(s)|^2 \|H_s^\circ \mathcal{E}(u)\|^2 + \|H_s^\times \mathcal{E}(u)\| ds < +\infty, \quad (3.2.5)$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times ds$$

est bien définie sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ et vérifie pour tous u, v dans $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(u), H \mathcal{E}(v) \rangle = & \int_0^\infty \left(\bar{u}(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^+ \mathcal{E}(v) \rangle + v(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^- \mathcal{E}(v) \rangle \right. \\ & \left. + \bar{u}(s)v(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^\circ \mathcal{E}(v) \rangle + \langle \mathcal{E}(u), H_s^\times \mathcal{E}(v) \rangle \right) ds. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Cette équation est l'équation définissant l'intégrale (sans possibilité d'aller au-delà du domaine exponentiel) dans la définition de Hudson et Parthasarathy (dans l'article fondateur [H-P]) des intégrales stochastiques quantiques.

- Soit H une intégrale stochastique quantique vérifiant les conditions de l'exemple précédent, et telle que H^* peut aussi s'écrire comme une telle intégrale. Alors ces deux intégrales peuvent être étendues partout où le terme de droite est bien défini (c'est-à-dire là où les conditions naturelles de domaine et d'intégrabilité sont vérifiées). Voir à ce sujet [A-M].

- Si l'on considère quatre processus adaptés $(H_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur Φ dont les normes vérifient les conditions

$$\begin{cases} t \mapsto \|H_t^\pm\| & \text{est de carré intégrable,} \\ t \mapsto \|H_t^\circ\| & \text{est essentiellement borné} \\ t \mapsto \|H_t^\times\| & \text{est intégrable,} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times ds$$

est définie sur tout \mathcal{E} . On note S' l'ensemble des intégrales stochastiques vérifiant les conditions (3.2.7) ci-dessus ; on note par ailleurs S les intégrales appartenant à S' et qui sont de surcroît des opérateurs bornés. D'après la remarque précédente la représentation intégrale d'un élément de S s'étend à tout Φ .

Les ensembles S et S' définis ci-dessus ont été étudiés par Attal dans [At3]. Nous en reparlerons à propos de la formule d'Itô, après la Proposition 3.2.5.

Nous avons évoqué plus haut l'existence d'une autre théorie de l'intégration stochastique quantique, développée par Attal et Lindsay ; cette théorie est basée sur une définition des intégrales qui a pour point de départ les formules que nous énonçons dans la proposition suivante. Il est relativement simple de montrer que les intégrales que nous avons définies dans la Définition 3.2.2 vérifient ces équations sur leur domaine de définition.

Proposition 3.2.3 (Formules Attal-Lindsay pour les intégrales [A-L]) *Soit*

$$H = \mu Id + \int H_s^+ da_s^+ + \int H_s^- da_s^- + \int H_s^\circ da_s^\circ + \int H_s^\times da_s^\times$$

une intégrale stochastique quantique. Si un vecteur f de Φ est dans le domaine de H , alors pour tout σ de \mathcal{P} on a

$$Hf(\sigma) = \mu f(\emptyset) + \sum_{s \in \sigma} H_s Q_s D_{\sigma(s)} f(\sigma_s) \quad \text{si } \epsilon = + \text{ ou } \circ$$

et

$$Hf(\sigma) = \mu f(\emptyset) + \int_0^\infty H_s Q_s D_{\sigma(s)} f(\sigma_s) ds \quad \text{si } \epsilon = - \text{ ou } \times,$$

où

$$Q_s = \begin{cases} P_s & \text{si } \epsilon = + \text{ ou } \times \\ D_s & \text{si } \epsilon = - \text{ ou } \circ \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma \cap [0, s) \\ \sigma_{(s)} &= \sigma \cap (s, +\infty[\end{aligned}$$

Ces formules présentent le grand avantage d'être explicites, par opposition aux formules (3.2.1), qui sont implicites au sens où on n'a pas d'équation donnant l'expression de Hf , sinon faisant apparaître à nouveau H . Nous nous en servons brièvement dans le chapitre 5.

Il y a deux questions naturelles concernant l'intégrale stochastique quantique, que nous n'avons pas encore évoquées : ce sont les questions de l'existence et de l'unicité d'une telle représentation pour un opérateur donné. La question de l'unicité a été traitée par Attal dans [At1] :

Proposition 3.2.4 ([At1]) *Soit H un opérateur sur Φ qui peut s'écrire comme une intégrale*

$$H = \mu Id + \int_0^\infty H_t^+ da_t^+ + \int_0^\infty H_t^- da_t^- + \int_0^\infty H_t^\circ da_t^\circ;$$

si les opérateurs H_t^ϵ , $\epsilon = +, \circ, -$, sont fermables pour presque tout t , tout ϵ , alors H est nul si et seulement si presque tout opérateur H_t^ϵ est nul.

Pour cette raison, lorsque nous parlerons de représentations intégrales stochastiques quantiques d'opérateurs, il sera implicite que les opérateurs H_t^ϵ sont supposés fermables.

La question de l'existence d'une représentation intégrale pour un opérateur donné a été largement étudiée, en particulier dans les travaux de Parthasarathy et Sinha (voir [P-S] ou [Me3]), Attal ([At4], [At3]), Coquio ([Co2]) et pourtant on ne connaît que peu d'éléments de réponse. On sait que tout opérateur n'est pas représentable : le contre-exemple le plus classique est dû à Journé et concerne une famille d'opérateurs contractifs, ce qui montre que la représentabilité ne dépend pas simplement de questions de domaine (voir [J-M] ; un autre contre-exemple, qui est aussi un opérateur borné, est décrit dans [Me3]) et nous le présenterons dans la section 5.2.1. On a dégagé des conditions nécessaires à la représentabilité, en particulier au sujet de la régularité des trajectoires – nous reviendrons sur ce point à propos du contre-exemple de Journé et Meyer – et on connaît des classes d'opérateurs représentables, mais le fossé entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes est encore large. Dans le chapitre 5 nous décrirons une caractérisation des opérateurs représentables parmi deux classes fondamentales d'opérateurs : les opérateurs de seconde quantification et de seconde quantification différentielle, que nous définissons en (5.2.1) et (5.2.2).

L'intégrale stochastique usurperait gravement son nom si n'y était associé une formule, que l'on aura profit à appeler formule d'Itô, qui permet d'exprimer le

produit de deux intégrales, sous forme d'intégrale. L'approche heuristique du style Attal-Meyer permet de retrouver la forme que doit prendre la formule d'Itô de composition des intégrales stochastiques quantiques à partir des formules informelles de composition

$$\begin{aligned} da_t^- da_t^+ &= dt \\ da_t^- da_t^\circ &= da_t^- \\ da_t^\circ da_t^+ &= da_t^+ \\ da_t^\circ da_t^\circ &= da_t^\circ \end{aligned}$$

et d'un raisonnement qui revient à retranscrire notre preuve du cas discret ; les interversions d'intégrales sont bien sûr extrêmement non justifiables. On pourra commencer à comparer la formule de composition (3.2.8) et la table qui lui est associée (3.2.9) à leurs analogues à temps discret (1.3.7) et (1.3.8).

Nous nous autorisons à nouveau des hypothèses de domaine on ne peut plus larges, et n'écrivons la composition que pour le produit de deux intégrales, chacune par rapport à un seul bruit, ceci dans un souci de lisibilité.

Proposition 3.2.5 (Formule d'Itô quantique, [A-M]) *Soient*

$$H = \int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon \quad \text{et} \quad K = \int_0^\infty K_t^\eta da_t^\eta$$

deux intégrales stochastiques quantiques définies sur Φ tout entier. Alors la composition HK peut s'écrire

$$HK = \int_0^\infty H_t K_t^\eta da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^{\epsilon,\eta} \tag{3.2.8}$$

où $da^{\epsilon,\eta}$ est donné par la table

\uparrow	-	o	+	x	(3.2.9)
-	0	a^-	a^x	0	
o	0	a°	a^+	0	
+	0	0	0	0	
x	0	0	0	0	

Exemple

On revient sur le cas de l'ensemble S cité plus haut : tout élément de S entre dans le domaine d'application de la proposition précédente et il est facile de constater à partir de la formule d'Itô (3.2.9) que la composition de deux éléments de S donne un élément de S . L'ensemble S est donc une sous-algèbre de l'ensemble des opérateurs bornés de Φ , appelée *algèbre des semimartingales régulières*. Elles ont été introduites par Attal dans [At3].

Retour sur les bruits quantiques

Nous avons utilisé des arguments informels, fondés sur la propriété de représentation chaotique, pour affirmer qu'il n'existe que trois bruits quantiques intéressants, tous les autres pouvant s'y ramener ; Coquio a précisé cette approche en montrant rigoureusement (dans [Co1]) que, si une famille $(M_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs définis sur \mathcal{E} et ayant un adjoint sur \mathcal{E} , a la propriété que, pour presque tous $s < t$ on ait l'égalité

$$(M_t - M_s) \mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u_s) \otimes K_{s,t} \mathcal{E}(u_t - u_s) \otimes \mathcal{E}(u - u_s) \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

pour un certain opérateur $K_{s,t}$ sur $\mathcal{E}(L^2([s, t]))$, alors il existe une fonction a sur \mathbb{R}_+ , deux fonctions f, g dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ et une fonction k dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ telles que

$$M_t = a(t)\text{Id} + \int_0^t f(s) da_s^+ + \int_0^t g(s) da_s^- + \int_0^t k(s) da_s^\circ.$$

3.2.2 Le cas de la multiplicité supérieure à 1

Si l'on veut définir une intégration stochastique quantique sur un espace de Fock de multiplicité supérieure à 1, il faut prendre en compte des intégrales stochastiques d'opérateurs par rapport à une famille de bruits quantiques $da_t^{\kappa, \lambda}$ pour κ, λ dans $\Lambda \cup \{0\}$. On notera $da_t^{0,0}$ la différentielle de temps $dt\text{Id}$; les bruits $da_t^{0, \lambda}$, $da_t^{\lambda, 0}$ et $da_t^{\lambda, \lambda}$ représenteront respectivement les opérateurs de création, annihilation et conservation au point $\lambda \in \Lambda$, les autres bruits $da_t^{\kappa, \lambda}$ pour $\kappa \neq \lambda$ représentant les opérateurs *d'échange*.

On définit l'intégrale

$$\lambda \text{Id} + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}$$

comme précédemment mais on restreint son domaine de définition aux vecteurs f de $\Phi(\mathcal{K})$ dont seules un nombre fini de coordonnées sont non nulles ; autrement dit, les vecteurs f tels qu'il existe $F \subset \Lambda$ de cardinal fini tel que

$$f(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma \notin \mathbb{N} \times (F \cup \{0\}).$$

La définition de l'intégrale se fait alors exactement comme dans le cas de l'espace de Fock de multiplicité 1 : c'est l'opérateur maximal vérifiant

$$Hf = \lambda f(\emptyset) + \sum_{\kappa \in \Lambda} \int_0^\infty H_s D_s^\kappa f d\chi_s^\kappa + \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\} \\ (\kappa, \lambda) \neq (0, 0)}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} D_s^\kappa f d\chi_s^\lambda \quad (3.2.10)$$

où H_t est l'intégrale arrêtée au temps t , qui coïncide avec $P_t H P_t$ sur Φ_t . Les conditions que nous sous-entendons en disant que l'équation est vérifiée sont encore

les conditions naturelles de domaine et de validité de l'équation. Les conditions d'intégrabilité des processus deviennent

$$\int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda} \|H_s D_s^\lambda f\|^2 ds + \int_0^\infty \sum_{\kappa \in \Lambda} \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}} H_s^{\kappa, \lambda} D_s^\lambda f \right\|^2 ds + \int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda} \|H_s^{0, \lambda}\|^2 ds.$$

Cette définition correspond à celle de l'espace de Fock de multiplicité un si Λ est constitué d'un unique élément.

On ajoute à ces intégrales une intégrale par rapport au temps, qui correspond avec nos notations de convention à une intégrale par rapport à $da^{0,0}$. On peut remarquer que l'on a encore une formule (3.2.10) même si le couple (κ, λ) peut prendre la valeur $(0, 0)$. Notons cependant que lorsque nous chercherons à représenter un unique opérateur et pas un processus, nous ne nous intéresserons qu'aux représentations ne faisant pas intervenir l'intégration par rapport au temps : nous ne considérerons que les bruits $da_s^{\kappa, \lambda}$ pour $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$ dans les représentations en intégrales stochastiques quantiques.

La formule d'Itô donnant la composition de deux intégrales stochastiques quantiques dans ce cadre prend une forme extrêmement compacte avec nos notations :

Proposition 3.2.6 *Soient*

$$H = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda} \quad \text{et} \quad K = \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \int_0^\infty K_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}$$

deux intégrales stochastiques quantiques définies sur $\Phi(\mathcal{K})$ tout entier. Alors le produit $H K$ s'écrit

$$\begin{aligned} H K = & \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \left(\int_0^\infty H_s K_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda} + \int_0^\infty H_s^{\kappa, \lambda} K_s da_s^{\kappa, \lambda} \right) \\ & + \sum_{\kappa, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \sum_{\mu \in \Lambda} \int_0^\infty H_s^{\kappa, \mu} K_s^{\mu, \lambda} da_s^{\kappa, \lambda}. \end{aligned}$$

La formule d'Itô se déduit de la formule de composition des bruits

$$da_s^{\kappa, \lambda} da_s^{\mu, \nu} = \hat{\delta}_{\kappa, \nu} da_s^{\mu, \lambda}$$

où le *delta d'Evans* $\hat{\delta}_{\kappa, \nu}$ est donné par

$$\hat{\delta}_{\kappa, \nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa = \nu \text{ et } (\kappa, \nu) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple et retour sur l'article [AP2]

Nous avons donné dans la partie 3.2.1, page 76, la représentation intégrale des opérateurs de multiplication dans une interprétation probabiliste associée à une martingale $(X_t)_{t \geq 0}$, qui dépend de l'équation de structure vérifiée par X . En multiplicité supérieure, on a aussi des équations de structure : toute martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie un système d'équations

$$d[X_t^i, X_t^j] = \delta_{i,j} dt + \sum_{k=1}^N T_k^{i,j}(s) dX_t^k \quad (3.2.11)$$

(nous nous bornons aux cas de multiplicité finie) où chaque $T_k^{i,j}(s)$ est un processus prévisible tel que pour presque tous (s, ω) , $(T_k^{i,j}(s, \omega))_{i,j,k}$ est *doublement symétrique*, c'est-à-dire qu'il possède les propriétés suivantes :

- $(i, j, k) \mapsto T_k^{i,j}(s, \omega)$ est symétrique
- $(i, j, l, m) \mapsto T_k^{i,j}(s, \omega) T_k^{l,m}(s, \omega)$ est symétrique.

Restreignons-nous au cas où les processus $T_k^{i,j}$ sont constants et déterministes. Alors l'opérateur de multiplication par X_t^k dans cette interprétation probabiliste est donnée (voir [At2]) par

$$a_t^{0,k} + a_t^{k,0} + \sum_{i,j=1}^N T_k^{i,j} a_t^{i,j}. \quad (3.2.12)$$

Il est rappelé dans [AP2], Proposition 12, qu'une martingale normale admettant comme ici une équation de structure à coefficients constants $(X_t)_{t \geq 0}$ a la même loi qu'un processus

$$W_t + \sum_{s \in \Sigma} (N_t^s - \|s\|_t^{-2}) s$$

où Σ est une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^N , chaque $(N_t^s)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\|s\|^{-2}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien dans Σ^\perp si et seulement si elle vérifie une équation de structure (3.2.11) à coefficients constants.

La représentation intégrale de l'opérateur de multiplication par une telle martingale nous permet, dans [AP2], d'observer la convergence de marches aléatoires convenablement normalisées vers des processus qui s'écrivent de la manière décrite ci-dessus, au sens de la convergence des opérateurs de multiplication. On peut ainsi déterminer la structure exacte du processus limite en fonction de la forme de l'équation de structure discrète.

3.3 Représentations en noyaux de Maassen-Meyer

Les objets définis dans cette section n'apparaîtront presque plus dans la suite ; nous ne les introduisons ici que parce que nous avons abondamment utilisé les

représentations en noyaux dans le cas du temps discret et parce que nos procédés d'approximation couplés à nos formules de représentations en noyaux nous permettent de retrouver un résultat intéressant à ce sujet.

On peut arriver à une définition naturelle de ces noyaux par des manipulations du même type que celles que nous avons effectuées dans le chapitre 3 : pour une fonction

$k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, un calcul formel de

$$H = \int_{A,B,C \in \mathcal{P}} k(A, B, C) da_A^+ a_B^0 a_C^- \int_{M \in \mathcal{P}} f(M) d\chi_M$$

aboutit à l'expression suivante : pour tout f dans le domaine de H , pour presque tout σ dans \mathcal{P} ,

$$Hf(\sigma) = \sum_{U+V+W=\sigma} \int_{N \in \mathcal{P}} k(U, V, N) f(V + W + N) dN. \quad (3.3.1)$$

Maassen a, le premier, considéré des opérateurs définis par ce type de relations dans [Ma1] pour résoudre des équations différentielles stochastiques quantiques : en effet, une écriture en noyau est un outil naturel pour la résolution d'une telle équation. Maassen s'autorisait des hypothèses assez larges sur le noyau k et les vecteurs f sur lesquels il opère ; Belavkin et Lindsay ont donné une définition plus générale, leur approche consistant à chercher des conditions, à partir d'estimations fines des intégrales $\int g(\sigma) Hf(\sigma) d\sigma$, pour que la formule (3.3.1) définisse bien un opérateur sur des sous-ensembles de Φ . Nous ne développerons pas leurs résultats et dirons simplement que l'opérateur associé au noyau k a pour domaine l'ensemble des f tels que pour tout σ les intégrales qui apparaissent dans (3.3.1) sont bien définies et que (3.3.1) définisse bien un élément de $L^2(\mathcal{P})$.

Nous devons mentionner le fait que Belavkin et Lindsay font intervenir de manière importante la transformée que nous avons utilisée :

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\sigma \subset \beta} k(\alpha, \sigma, \gamma).$$

La raison d'être de cette transformée est la même que dans le cadre discret (voir (2.1.17)) : si un opérateur peut s'écrire

$$K = \int_{\alpha, \gamma} k'(\alpha, \gamma) |d\chi_\alpha\rangle \langle d\chi_\gamma| \quad (3.3.2)$$

alors on tire une représentation en noyau formelle du fait que

$$|d\chi_\alpha\rangle \langle d\chi_\gamma| = da_\alpha^+ P_0 da_\gamma^- \quad (3.3.3)$$

et que

$$P_0 = \text{Id} + \int_{\beta \in \mathcal{P}} (-1)^{|\beta|} da_\beta^\circ.$$

Les situations connues où la représentation en noyau prend un sens comme série d'intégrales itérées découlent des cas où on peut donner un sens à l'écriture (3.3.2) ; la première de ces situations est l'étude de Attal dans [At4] du cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt (une écriture sous forme d'opérateur de Hilbert-Schmidt n'est rien d'autre qu'une décomposition (3.3.2) en un sens rigoureux) dans laquelle il trouve un procédé itératif donnant l'écriture de K comme une somme d'intégrales itérées d'ordres croissant et d'un terme qui disparaît à la limite. Ce procédé itératif provient en fait simplement de l'équation $P_0 = \text{Id} - \int_0^\infty P_0 da_s^\circ$.

La seconde situation est en fait très semblable à la première : c'est celle d'une approche "bruit blanc" où l'exigence analytique est assouplie : on n'exige plus que (3.3.2) ait un sens dans Φ mais depuis l'un de ses sous-espaces sur son espace dual : voir par exemple Ji et Obata, [J-O].

Dans les deux cas les formules sont les mêmes que celles que l'on obtient formellement en substituant (3.3.3) dans (3.3.2).

A propos des travaux de Belavkin et Lindsay on peut noter que, sachant d'un opérateur qu'il peut s'écrire comme opérateur à noyau (d'action donnée par (3.3.1)) avec un noyau k localement intégrable par rapport à ses trois variables, ils obtiennent (dans [B-L], Proposition 3.3) une expression de ce noyau : dans notre langage,

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{|\alpha|} \delta^{|\beta|} \delta^{|\gamma|}} \langle \chi_{\alpha \cup \beta}, K \chi_{\beta \cup \gamma} \rangle,$$

où par exemple $|\alpha|$ représente le cardinal de α et $\chi_{\alpha \cup \beta}$ est $(\chi_{t_1+\delta} - \chi_{t_1}) \cdots (\chi_{t_n+\delta} - \chi_{t_n})$, les $[t_i, t_i + \delta]$ étant $|\alpha| + |\beta|$ intervalles contenant exactement un point de $\alpha \cup \beta$ chacun.

On pourra retrouver immédiatement cette expression à partir de notre formule (2.1.15) et du procédé d'approximation que nous décrirons dans la section 5, appliqué aux opérateurs à noyau.

Chapitre 4

Approximations discrètes du calcul stochastique quantique

Dans ce chapitre, nous présentons la technique d'approximation du calcul stochastique quantique à temps continu par son analogue à temps discret.

Dans la section 4.1, nous présentons la méthode définie par Attal, qui permet de reproduire l'espace de Fock à temps discret comme sous-espace de Φ , avec de premiers résultats de convergence. Nous soulignons ensuite ce qui semble une différence majeure entre les calculs stochastiques à temps discret et à temps continu : la différence entre tables d'Itô, puis expliquons pourquoi cette différence devrait disparaître dans les passages à la limite.

Pour appliquer les résultats que nous avons obtenus dans le cas discret, nous aurons besoin de savoir calculer efficacement les approximations d'objets vivant sur Φ : nous décrivons donc dans la section 4.2 les relations entre opérateurs du calcul d'Itô abstrait à temps discret et à temps continu, puis les projections d'intégrales stochastiques de Φ écrites comme intégrales à temps discret, et enfin les projections d'opérateurs à noyau.

Dans la section 4.3 nous montrerons que la différence entre les deux formules d'Itô n'est en aucun cas une obstruction à l'utilisation de $T\Phi$ comme outil d'approximation du calcul stochastique quantique sur Φ . Nous donnerons en effet une preuve de la formule d'Itô à temps continu utilisant exclusivement notre méthode d'approximation et le calcul stochastique à temps discret.

4.1 L'approximation de Attal

4.1.1 Approximation de l'espace de Fock simple

La méthode d'approximation que nous définissons ici est un outil fondamental pour le reste de cette thèse : hormis au chapitre 5, elle sera utilisée en permanence. Les idées sous-jacentes sont simples : il s'agit simplement de considérer un accroissement infinitésimal de vecteurs $d\chi_t$ comme la limite d'un X_i , un accroissement infinitésimal d'opérateurs da_t^ϵ comme la limite d'un a_i^ϵ , et tout cela en utilisant les normalisations adéquates. Remarquons qu'il n'a été possible d'arriver à une intuition aussi simple que grâce au formalisme particulièrement parlant du calcul d'Itô abstrait.

Ce que nous présentons dans cette section provient, avec quelques modifications, de l'article d'Attal [At7].

Soit $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ une subdivision de \mathbb{R}_+ (nous entendons par là que la subdivision est non bornée : la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ diverge vers l'infini) ; à cette subdivision on associe une famille de vecteurs en posant, pour tout $i \geq 0$:

$$X_i = \frac{\chi_{t_{i+1}} - \chi_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}$$

et pour toute partie finie A de \mathbb{N} ,

$$X_A = X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_n}$$

si $A = \{i_1 < \dots < i_n\}$ est non vide, $X_\emptyset = \Omega$, sinon. On remarque par ailleurs que tout vecteur X_i appartient à $\Phi_{[t_i, t_{i+1}]}$. Les X_A constituent alors une famille orthonormée de Φ et on note $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ l'espace fermé engendré par tous les X_A , $A \in \mathcal{P}$. Il est alors évident que l'on a un isomorphisme explicite (tellement explicite que nous utiliserons les mêmes notations), pour toute subdivision \mathcal{S} , entre $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}\Phi$.

On associe de plus à \mathcal{S} les opérateurs qui, pour tout i , s'écrivent dans le produit $\Phi_{t_i} \otimes \Phi_{[t_i, t_{i+1}]} \otimes \Phi_{[t_{i+1}, \dots]}$

$$a_i^- = \text{Id} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P^{(1)} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^+ = \text{Id} \otimes P^{(1)} \frac{a_{t_{i+1}}^+ - a_{t_i}^+}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^\circ = \text{Id} \otimes P^{(1)} (a_{t_{i+1}}^\circ - a_{t_i}^\circ) P^{(1)} \otimes \text{Id},$$

où $P^{(1)}$ représente la projection sur le chaos d'ordre 1 (rappelons que pour $\epsilon = +, \circ, -$ nous notons $a_t^\epsilon = \int_0^t da_s^\epsilon$).

On peut alors vérifier que ces opérateurs stabilisent $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et que l'isomorphisme entre $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}\Phi$ que nous avons évoqué ci-dessus envoie ces opérateurs a_i^ε sur les opérateurs a_i^ε de l'espace $\mathbb{T}\Phi$. On peut vérifier de surcroît qu'en tant qu'opérateurs sur Φ , les opérateurs a_i^ε sont bornés, de norme 1. Dans l'article de Attal [At7], les projections $P^{(1)}$ sont absentes de la définition de a_i^- et a_i^0 ; les ajouter ne change cependant rien à l'action de ces opérateurs sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ donc ne changera rien aux preuves des propriétés que nous énonçons plus bas. En revanche, cela a l'avantage de faire des opérateurs a_i^ε , vus comme opérateurs sur Φ , des opérateurs bornés.

On a donc associé à toute subdivision \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ un espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ et une famille d'opérateurs qui reproduisent dans Φ lui-même l'ensemble des structures que nous avons définies dans le chapitre 1. Le but avoué de cette construction est évidemment de construire une approximation de Φ ; il nous faut donc des résultats de convergence. Notons pour cela $\mathbb{E}_\mathcal{S}$ l'opérateur de projection sur le sous-espace fermé $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de Φ . Alors on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.1 ([At7])

- La famille de projections $\mathbb{E}_\mathcal{S}$ associée aux subdivisions \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ converge fortement vers l'identité sur Φ lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision tend vers zéro.
- Pour tout $t \geq 0$, les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^0, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1}-t_i} a_i^+, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1}-t_i} a_i^-$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers a_t^0, a_t^+, a_t^- respectivement.

- De même, pour tout $t \geq 0$, les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^0 \mathbb{E}_\mathcal{S}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1}-t_i} a_i^+ \mathbb{E}_\mathcal{S}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1}-t_i} a_i^- \mathbb{E}_\mathcal{S}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers a_t^0, a_t^+, a_t^- respectivement.

On notera toujours dans la suite $|\mathcal{S}|$ le pas de la subdivision \mathcal{S} .

On aura besoin d'expliciter la projection $\mathbb{E}_\mathcal{S} f$ d'un élément f de Φ . Puisqu'il est particulièrement pratique de manipuler les intégrales d'opérateurs sur le domaine exponentiel, nous décrivons en exemple la projection d'un vecteur de ce domaine.

Lemme 4.1.2 Soit f un vecteur de Φ ; alors pour toute subdivision \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ , la projection $\mathbb{E}_\mathcal{S} f$ de f s'écrit

$$\mathbb{E}_\mathcal{S} f = \sum_{A \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_\mathcal{S} f(A) X_A$$

avec

$$\mathbb{E}_\mathcal{S} f(A) = \frac{1}{\sqrt{t_{i_1+1}-t_{i_1}} \dots \sqrt{t_{i_n+1}-t_{i_n}}} \int_{[t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times \dots \times [t_{i_n}, t_{i_n+1}]} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n.$$

si $A = \{i_1, \dots, i_n\}$ est non vide, $(\mathbb{E}_\mathcal{S} f)(\emptyset) = f(\emptyset)$ sinon.

Exemple

On considère un vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ associé à un vecteur u de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Alors on peut vérifier grâce au Lemme 4.1.2 que la projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(u)$ de $\mathcal{E}(u)$ est un vecteur exponentiel $e(\tilde{u})$ dans $\mathbb{T}\Phi$ où \tilde{u} est l'élément de $l^2(\mathbb{N})$ naturellement associé à u par la subdivision \mathcal{S} : pour tout i de \mathbb{N} on a

$$\tilde{u}(i) = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds.$$

Il faut noter que $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(u)$ n'est pas un vecteur exponentiel dans Φ : en particulier, pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$P_i\mathcal{E}(\tilde{u}) = \mathcal{E}(\tilde{u}_i) \left(1 + \tilde{u}(i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\right) \quad \text{et} \quad D_t\mathcal{E}(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathcal{E}(\tilde{u}_i).$$

4.1.2 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans le cas d'un espace de Fock $\Phi(\mathcal{K})$ où \mathcal{K} est un espace séparable dont une base hilbertienne est indexée par Λ , on associe un sous-espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de $\Phi(\mathcal{K})$ à toute subdivision $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ de la manière suivante : on définit pour tout λ dans Λ , pour tout i dans \mathbb{N} un vecteur

$$X_i^\lambda = \frac{\chi_{t_{i+1}}^\lambda - \chi_{t_i}^\lambda}{t_{i+1} - t_i}$$

et à toute partie $A = \{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$ de \mathcal{P}_Λ (les i_j étant supposés deux à deux distincts), on associe le vecteur

$$X_A = X_{i_1}^{\lambda_1} \dots X_{i_n}^{\lambda_n}.$$

Le sous-espace $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$ de $\Phi(\mathcal{K})$ engendré par ces vecteurs X_A s'identifie alors à $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$. On note $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{S})$; cet opérateur s'exprime à présent, pour f dans Φ , A dans \mathcal{P}_Λ de la forme $\{(i_1, \lambda_1), \dots, (i_n, \lambda_n)\}$, par

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}f(A) = \frac{1}{\sqrt{t_{i_1+1}-t_{i_1}} \dots \sqrt{t_{i_n+1}-t_{i_n}}} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}} f(\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}) ds_1 \dots ds_n.$$

Pour tout λ de Λ , tout i de \mathbb{N} , on définit les opérateurs

$$a_i^{\lambda,0} = \text{Id} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^{\lambda,0} - a_{t_i}^{\lambda,0}}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} P^{(1)} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^{0,\lambda} = \text{Id}P^{(1)} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^{0,\lambda} - a_{t_i}^{0,\lambda}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \otimes \text{Id}$$

et pour tout couple κ, λ de Λ ,

$$a_i^{\kappa,\lambda} = \text{Id} \otimes (a_{t_{i+1}}^{\kappa,\lambda} - a_{t_i}^{\kappa,\lambda}) \otimes \text{Id},$$

toutes ces décompositions tensorielles étant données dans $\Phi_{[0,t_i]} \otimes \Phi_{[t_i,t_{i+1}]} \otimes \Phi_{[t_{i+1}]}$ (de manière similaire au cas simple, $a_t^{\kappa,\lambda}$ désigne $\int_0^t da_s^{\kappa,\lambda}$ pour tous κ, λ dans $\Lambda \cup \{0\}$).

Comme précédemment on a alors

Proposition 4.1.3

- La famille de projections $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ associées aux subdivisions \mathcal{S} de \mathbb{R}_+ converge fortement vers l'identité sur $\Phi(\mathcal{K})$ lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision tend vers zéro.
- Pour tout $t \geq 0$, tous κ, λ de Λ , les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^{\kappa,\lambda}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{0,\lambda}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{\kappa,0}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers $a_t^{\kappa,\lambda}$, $a_t^{0,\lambda}$, $a_t^{\kappa,0}$ respectivement.

- De même, pour tout $t \geq 0$, tous κ, λ de Λ , les opérateurs

$$\sum_{i|t_i \leq t} a_i^{\kappa,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{0,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \quad \sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^{\kappa,0} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$$

convergent fortement sur \mathcal{E} vers $a_t^{\kappa,\lambda}$, $a_t^{0,\lambda}$, $a_t^{\kappa,0}$ respectivement.

C'est cette proposition qui nous permet dans [AP2] de montrer à partir des représentations intégrales des opérateurs de multiplication associés (voir (3.2.12) et (1.4.2)) que l'on a convergence forte des opérateurs de multiplication associés à des marches aléatoires convenablement normalisées vers des opérateurs de multiplication associés à des processus qui s'écrivent comme une somme d'un brownien et de processus de Poisson comme en page 82.

4.1.3 Tables d'Itô à temps discret et à temps continu

Il semblait exister une obstruction à ce que l'espace de Fock à temps discret constitue un outil adéquat pour approcher le calcul stochastique de l'espace Φ . Cette obstruction résidait dans la différence des tables d'Itô. Rappelons ces différences : dans l'espace de Fock à temps discret comme dans celui à temps continu il existe une formule de composition des intégrales stochastiques, appelée formule d'Itô, qui s'exprime par

$$\sum_{i \geq 0} h_i^\epsilon a_i^\epsilon \sum_{j \geq 0} k_j^\eta a_j^\eta = \sum_{i \geq 0} h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^\epsilon + \sum_{i \geq 0} h_i^\eta k_i^\epsilon a_i^\eta + \sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon,\eta}$$

où $a^{\epsilon,\eta}$ est donné par la table

\uparrow	—	○	+	×
—	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-
○	0	a°	a^+	a°
+	a°	0	0	a^+
×	a^-	a°	a^+	a^\times

pour les intégrales à temps discret, et pour les intégrales à temps continu par

$$\int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta = \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon + \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta} \quad (4.1.1)$$

où $a^{\epsilon,\eta}$ est donné par la table

\uparrow	—	○	+	×
—	0	a^-	a^\times	0
○	0	a°	a^+	0
+	0	0	0	0
×	0	0	0	0

Dans [At7], Attal proposait une explication possible à cette différence entre les deux tables d'Itô (explication déjà évoquée informellement dans le livre de Meyer [Me2]), portant sur les différences de normalisation entre les différents bruits ; il était cependant loin d'être évident que cette explication pouvait suffire et que des phénomènes parasites ne pouvaient intervenir et perturber cette explication. Avec nos outils permettant d'explicitier l'approximation d'une intégrale, de calculer sa représentation intégrale puis d'effectuer un passage à la limite nous avons pu obtenir une nouvelle preuve de la formule d'Itô dans le cas du temps continu ; cette preuve n'apporte évidemment rien de nouveau mais montre que la différence entre les deux tables d'Itô est loin d'être une obstruction à l'utilisation de l'espace de Fock à temps discret pour approcher rigoureusement le calcul stochastique quantique de $\mathbb{T}\Phi$.

Nous allons commencer, dans la section suivante, par calculer les représentations en intégrales stochastiques sur $\mathbb{T}\Phi$ d'approximations d'intégrales stochastiques sur Φ ou les représentations en noyaux d'approximations d'opérateurs à noyau.

4.2 Les projections d'intégrales et de noyaux

Nous avons présenté dans la section précédente un moyen de reconstruire à l'intérieur de l'espace Φ toutes les structures à temps discret que nous avons définies dans le chapitre 1. Dans cette structure discrète on a des critères de représentabilité ainsi que des formules explicites, que ce soit pour les représentations en intégrales

stochastiques ou pour les représentations en noyaux de Maassen-Meyer ; il est donc naturel de chercher à utiliser ces résultats en temps discret pour étudier les questions de représentabilité sur Φ .

Il faut tout d'abord étudier les moyens d'approcher les intégrales et opérateurs à noyau et de relier les représentations à temps continu aux représentations à temps discret. La référence générale pour cette section est l'article [Pt3].

4.2.1 Relations de commutation

Pour calculer les représentations en intégrales à temps discret d'approximations d'opérateurs sur Φ nous aurons besoin, à en juger par les formules (2.1.15), de pouvoir exprimer l'action de $p_i \mathbb{E}_S$, $d_i \mathbb{E}_S$ sur Φ , ou encore de calculer l'approximation d'un vecteur de Φ en fonction de sa représentation prévisible.

Lemme 4.2.1 (Lemme 2.1 de [Pt2]) *Soit \mathcal{S} une partition de \mathbb{R}_+ . Pour tout f de Φ , tout i de \mathbb{N} on a les relations suivantes :*

$$p_i \mathbb{E}_S f = \mathbb{E}_S P_{t_i} f,$$

$$d_i \mathbb{E}_S f = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} D_t f dt,$$

et

$$\mathbb{E}_S \int_0^\infty f_t d\chi_t = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sum_{i \geq 0} (\mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} f_t dt) X_i.$$

4.2.2 Projections d'intégrales

On calcule grâce aux relations du Lemme 4.2.1 et aux formules (2.1.15) la représentation intégrale de la projection $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ d'une intégrale

$$H = \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ.$$

Pour éviter tout problème de nature analytique, nous nous autorisons des hypothèses de domaine confortables : les intégrales considérées sont supposées vérifier les hypothèses **(HD)** décrites ci-dessous ; remarquons que ϵ' est défini par :

$$+' = - \quad -' = + \quad \circ' = \circ.$$

On considère alors l'hypothèse suivante :

$$\text{(HD)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les intégrales } \int_0^\infty H_s^\epsilon da^\epsilon \text{ et } \int_0^\infty (H_s^\epsilon)^* da^{\epsilon'} \\ \text{sont définies sur } \mathcal{E} \text{ et ses images par les } \mathbb{E}_S. \end{array} \right.$$

Remarquons (cf. Remarque 3, section I de [A-M]) que cela implique, si l'on note H l'intégrale $\int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$, que l'intégrale $\int_0^\infty (H_s^\epsilon)^* da^{\epsilon'}$ est égale à H^* sur \mathcal{E} et toutes ses projections.

Il faut remarquer que cela implique aussi que les projections $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, $\mathbb{E}_S H^* \mathbb{E}_S$ sont définies sur tout $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$:

Lemme 4.2.2 *Soit \mathcal{S} une subdivision de \mathbb{R}_+ . L'ensemble des projections $\mathbb{E}_S \mathcal{E}(u)$ de vecteurs exponentiels contient la base $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\mathbb{N}\}$.*

En effet on voit d'après la forme des projections de vecteurs exponentiels de Φ que leurs projections constituent tout l'ensemble des vecteurs exponentiels de $\mathbb{T}\Phi$. Il suffit alors de remarquer que, dans $\mathbb{T}\Phi$,

- l'exponentielle de la suite nulle est Ω ,
- l'exponentielle de la suite ayant tous ses termes nuls sauf le i -ème, qui vaut 1, est $\Omega + X_i$,
- l'exponentielle de la suite ayant tous ses termes nuls sauf les i et j -èmes, qui valent 1, est

$$\Omega + X_i + X_j + X_{i,j}$$

et ainsi de suite.

D'après notre Théorème 2.2.1 l'opérateur $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ est donc représentable en intégrale stochastique quantique ; on peut calculer les coefficients de la représentation grâce aux formules (2.2.5). Le Lemme 4.2.1 nous permet ainsi d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 (Proposition 2.2 de [Pt2]) *Soit $H = \int H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ une intégrale stochastique quantique sur Φ qui vérifie l'hypothèse (HD). Alors $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ admet une représentation en intégrale stochastique quantique sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_\mathbb{N}\}$ au moins et les coefficients h_i^+ , h_i^- , h_i° sont donnés par*

- pour $\epsilon = +$,

$$h_i^+ \mathbb{E}_S = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ dt$$

$$h_i^- \mathbb{E}_S = 0$$

$$h_i^\circ \mathbb{E}_S = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ (a_t^+ - a_{t_i}^+) dt$$

- pour $\epsilon = -$,

$$\begin{aligned} h_i^+ \mathbb{E}_S &= 0 \\ h_i^- \mathbb{E}_S &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^- dt \\ h_i^\circ \mathbb{E}_S &= \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} (a_t^- - a_{t_i}^-) H_t^- dt \end{aligned}$$

- pour $\epsilon = \circ$,

$$\begin{aligned} h_i^+ \mathbb{E}_S &= 0 \\ h_i^- \mathbb{E}_S &= 0 \\ h_i^\circ \mathbb{E}_S &= \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^\circ dt \end{aligned}$$

où toutes les égalités sont sur $\mathbb{T}\Phi_i$ et où toutes les intégrales des termes de droite sont des intégrales fortes. Dans le cas de $\epsilon = \circ$, l'intégrale discrète est définie sur le domaine exponentiel de $\mathbb{T}\Phi$.

Il apparaît deux phénomènes surprenants : tout d'abord, il n'est pas évident, même avec les hypothèses ci-dessus, que l'intégrale discrète que l'on fait apparaître comme projection de H soit définie sur le domaine exponentiel de $\mathbb{T}\Phi$ lorsque l'on considère les cas $\epsilon = +$ ou $-$. Détaillons ce point : on peut montrer (voir la longue remarque après la Proposition 2.2 dans [Pt2]) que pour $\epsilon = +$ par exemple, on a pour tout $\mathcal{E}(u) \in \text{Dom } h$,

$$\sum_{i \geq 0} |h_i^+ a_i^+ \mathcal{E}(u)(A)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{i \geq 0} |h_i^\circ a_i^\circ \mathcal{E}(u)(A)| < +\infty$$

pour tout $A \in \mathcal{P}$ et

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} (h_i^+ a_i^+ + h_i^\circ a_i^\circ) \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty. \quad (4.2.1)$$

En revanche, on ne peut affirmer que l'on a

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ \mathcal{E}(u)(A) \right|^2 < +\infty; \quad (4.2.2)$$

la raison en est simplement que l'on ne peut déduire ce type de propriété que de l'hypothèse que

$$\int_{\mathcal{P}} \int_0^\infty |H_t^+ P_t e(\tilde{u})(\sigma)|^2 d\sigma dt < +\infty.$$

Or pour $t_i \leq t < t_{i+1}$ on a

$$P_t e(\tilde{u}) = e(\tilde{u}_i) + \tilde{u}(i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \quad (4.2.3)$$

qui est encore

$$e(\tilde{u}_i) + \frac{\tilde{u}(i)}{t_{i+1} - t_i} (a_t^+ - a_{t_i}^+) e(\tilde{u}_i),$$

ce qui implique (4.2.1) mais on n'a aucun moyen de séparer les deux termes pour obtenir (4.2.1).

L'égalité (4.2.3) est aussi la raison du second phénomène *a priori* surprenant : la projection d'une intégrale par rapport à da^+ ou da^- peut faire apparaître un terme en a° . On s'attend évidemment à ce que ce terme tende vers zéro avec le pas de la subdivision \mathcal{S} . Il faut cependant remarquer que l'on ne sait pas, comme on l'a fait remarquer plus haut, si les intégrales des projetés sont définies au-delà de $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$. On est donc limité pour ce qui est de prouver une quelconque convergence, même faible. On peut par exemple remarquer que les images par un $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ d'exponentielles de fonctions à support compact s'écrivent toujours comme combinaisons linéaires d'un nombre fini de $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$.

Lemme 4.2.4 (Lemme 2.3 de [Pt2]) *Soit $H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ une intégrale satisfaisant l'hypothèse (HD) avec $\epsilon = +$ ou $-$; alors l'intégrale parasite $\sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ$ qui lui est associée par la proposition 4.2.3 tend faiblement vers zéro au sens où*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \rangle$$

tend vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, pour tous u, v de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à supports compacts.

Exemples

- La projection d'un opérateur $a_{t_{i+1}}^+ - a_{t_i}^+$ par exemple donne bien $\sqrt{t_{i+1} - t_i} a_i^+$; en revanche si l'on prend un t tel que $t_i < t < t_{i+1}$, la projection de $a_t^+ - a_{t_i}^+$ est

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} (a_t^+ - a_{t_i}^+) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{t - t_i}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} a_i^+.$$

- La projection d'un opérateur $a_t^\circ - a_{t_i}^\circ$ pour $t_i \leq t < t_{i+1}$ est

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} (a_t^\circ - a_{t_i}^\circ) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} a_i^\circ.$$

- La projection d'un opérateur $\int_0^{t_j} a_s^+ da_s^+$ est de la forme $\sum_{i < j} h_i^+ a_i^+$ avec

$$h_i^+ p_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\sum_{j < i} \sqrt{t_{j+1} - t_j} a_j^+ \right).$$

- La projection d'un opérateur $\int_0^{t_j} a_s^- da_s^+$ est de la forme $\sum_{i < j} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ$ avec

$$h_i^+ p_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\sum_{j < i} \sqrt{t_{j+1} - t_j} a_j^- \right).$$

$$h_i^\circ = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)\text{Id}.$$

4.2.3 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Nous énonçons ici dans le cas d'un espace de Fock avec espace de multiplicité \mathcal{K} les analogues de la Proposition 4.2.3 et du Lemme 4.2.4.

Proposition 4.2.5 *Soit (α, β) un couple d'éléments de $\Lambda \cup \{0\}$ différent de $(0, 0)$ et soit $H = \int_0^\infty H_t^{\alpha, \beta} da_t^{\alpha, \beta}$ une intégrale sur $\mathcal{T}\Phi(\mathcal{K})$. On suppose que $\int_0^\infty H_t^{\alpha, \beta} da_t^{\alpha, \beta}$ et $\int_0^\infty (H_t^{\alpha, \beta})^* da_t^{\beta, \alpha}$ sont définies sur le domaine exponentiel et ses images par les \mathbb{E}_S . Alors $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ admet une représentation en intégrale stochastique quantique sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}, \Lambda}\}$ au moins et les coefficients de la représentation sont donnés par*

- pour α, β tous deux non nuls,

$$h_i^{\alpha, \beta} \mathbb{E}_S = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{\alpha, \beta} dt$$

toutes les autres intégrandes étant nulles,

- pour $\alpha = 0$,

$$h_i^{0, \beta} \mathbb{E}_S = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{0, \beta} dt$$

$$h_i^{\kappa, \beta} \mathbb{E}_S = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{0, \beta} (a^{0, \kappa} t - a^{0, \kappa} t_i) dt \text{ pour tout } \kappa \text{ dans } \Lambda,$$

toutes les autres intégrandes étant nulles,

- pour $\beta = 0$,

$$h_i^{\alpha, 0} \mathbb{E}_S = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^{\alpha, 0} dt$$

$$h_i^{\alpha, \lambda} \mathbb{E}_S = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} (a^{\lambda, 0} t - a^{\lambda, 0} t_i) H_t^{\alpha, 0} dt \text{ pour tout } \lambda \text{ dans } \Lambda.$$

toutes les autres intégrandes étant nulles.

Comme précédemment on peut montrer que les termes parasites disparaissent à la limite :

Lemme 4.2.6 Soit H une intégrale stochastique quantique sur $\mathbb{T}\Phi(\mathcal{K})$ de la forme $\int_0^\infty H_s^{\alpha,0} da_s^{\alpha,0}$ avec $\alpha \neq 0$ (respectivement $\int_0^\infty H_s^{\alpha,\beta} da_s^{0,\beta}$ avec $\beta \neq 0$). On suppose que l'intégrale H satisfait aux hypothèses de la Proposition 4.2.5 ; alors l'intégrale parasite $\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\alpha,\lambda} a_i^{\alpha,\lambda}$ (respectivement $\sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa,\beta} a_i^{\kappa,\beta}$) qui lui est associée par la Proposition 4.2.5 tend faiblement vers zéro au sens où

$$\left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\alpha,\lambda} a_i^{\alpha,\lambda} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \right\rangle$$

(respectivement

$$\left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \sum_{\kappa \in \Lambda} \sum_{i \geq 0} h_i^{\kappa,\beta} a_i^{\kappa,\beta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v) \right\rangle)$$

tend vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, pour tous u, v de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à supports compacts.

4.2.4 Projections d'opérateurs à noyau

On va considérer ici la projection d'un opérateur à noyau au sens où il a été défini dans le chapitre précédent ; cela nous permettra de retrouver la formule du noyau donnée par Belavkin et Lindsay dans leur article [B-L].

Considérons un noyau $k : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ qui est localement intégrable au sens où pour tout n , toute partie bornée E de \mathbb{R}_+ , k est intégrable sur $\mathcal{P}_n(E)$:

$$\int_{\mathcal{P}^n(E)^3} |k(\alpha, \beta, \gamma)| d\alpha d\beta d\gamma < +\infty.$$

L'opérateur associé, que nous notons K , est bien défini sur les éléments de $L^2(\mathcal{P})$ qui sont des indicatrices de pavés bornés de \mathbb{R}_+^n ; par conséquent $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ est bien défini sur tous les vecteurs X_A , $A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, de $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N}})$ (nous reprenons momentanément la notation $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ pour l'ensemble des parties finies de \mathbb{N}).

Pour fixer les idées, supposons que la subdivision \mathcal{S} est régulière de pas δ ; on peut calculer que pour tout f de Φ tel que $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} f$ est dans le domaine de K , on a pour tout M de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(M) = \sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^{|U|} \delta^{|V|} \delta^{|N|}}} \int_U \int_V \int_N k(v, \nu, \eta) dv d\nu d\eta \right) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(V+W+N) \quad (4.2.4)$$

où \int_U est $\int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \dots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}}$ si $U = \{i_1, \dots, i_n\}$.

Il est par ailleurs évident que pour tous U, V, W fixés la série en N qui apparaît dans l'expression (4.2.4) est sommable lorsque f est une indicatrice de pavé borné

de \mathbb{R}_+^n . Par conséquent l'opérateur $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ coïncide sur $\{X_A, A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$ avec un opérateur à noyau. Nous notons encore k ce noyau, les variables $(A, B, C$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, α, β, γ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_+}$) se chargeant de distinguer entre noyau de $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ et noyau de K). On a alors

$$k(A, B, C) = \frac{1}{\sqrt{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}}} \int_A \int_B \int_C k(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma.$$

D'après 2.1.15 on a donc pour tous A, B, C de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$$\langle X_{A \cup B}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} X_{B \cup C} \rangle = k'(A, B, C).$$

Par ailleurs on voit facilement que

$$k'(A, B, C) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^{|A|}}} \frac{1}{\delta^{|B|}} \frac{1}{\sqrt{\delta^{|C|}}} \int_A \int_B \int_C k'(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \right);$$

enfin,

$$\langle X_{A \cup B}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}} X_{B \cup C} \rangle = \langle X_{A \cup B}, K X_{B \cup C} \rangle.$$

Si l'on note pour se rapprocher des notations utilisées dans la section 3.3,

$$\chi_A = (\chi_{t_{i_1+1}} - \chi_{t_{i_1}}) \cdots (\chi_{t_{i_n+1}} - \chi_{t_{i_n}})$$

si $A = \{i_1, \dots, i_n\}$, on a donc

$$\frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \int_A \int_B \int_C k'(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \langle \chi_{A \cup B}, K \chi_{B \cup C} \rangle$$

et avec notre hypothèse de locale intégrabilité on retrouve le résultat de Belavkin et Lindsay cité dans la section 3.3 : si pour tout \mathcal{S} on associe à tous α, β, γ de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_+}$ des éléments A, B, C de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ tels que

$$\text{si } \alpha \in [t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times \dots \times [t_{i_n}, t_{i_n+1}] \text{ alors } A = \{i_1, \dots, i_n\}$$

(B, C étant choisis de manière similaire) on a

Proposition 4.2.7 *Soit k un noyau localement intégrable au sens défini ci-dessus ; alors l'opérateur K associé est bien défini sur les indicatrices de pavés bornés de \mathbb{R}_+^n quel que soit n et le noyau k vérifie*

$$k'(\alpha, \beta, \gamma) = \lim_{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{|A|} \delta^{|B|} \delta^{|C|}} \langle \chi_{A \cup B}, K \chi_{B \cup C} \rangle$$

où A, B, C sont choisis pour tout \mathcal{S} comme ci-dessus.

Notre preuve reste parfaitement valable dans le cas d'une subdivision \mathcal{S} qui n'est pas régulière, avec les adaptations de notations qui s'imposent.

4.3 Convergence de la table d'Itô

4.3.1 Preuve de la formule d'Itô

Dans cette section nous allons exposer, comme nous l'avons annoncé plus haut, une preuve de la formule d'Itô en temps continu 3.2.5 en utilisant uniquement la formule d'Itô en temps discret 1.3.8 et notre procédé d'approximation. Nous l'avons dit dans notre exposition : pour pouvoir parler de formule d'Itô à temps continu, il faut nécessairement composer des opérateurs et se pose alors le problème des domaines. C'est pourquoi, pour pouvoir décrire de manière concise le domaine de validité de la formule d'Itô, on a besoin de supposer que les intégrales considérées sont partout définies. Nous nous autoriserons encore plus de souplesse dans les hypothèses en ne considérant que des intégrales qui vérifient des hypothèses du type S (voir (3.2.7)).

Dans la suite de ce chapitre, toute intégrale

$$H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_t^\epsilon$$

vérifiera les hypothèses suivantes :

$$(\mathbf{HS}) \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ l'intégrande } H_t^\epsilon \text{ est un opérateur borné tel que } t \mapsto \|H_t^\epsilon\| \text{ est :} \\ \quad \bullet \text{ de carré intégrable si } \epsilon = + \text{ ou } -, \\ \quad \bullet \text{ intégrable si } \epsilon = \times, \\ \quad \bullet \text{ essentiellement borné si } \epsilon = \circ \\ 2. H \text{ est un opérateur borné sur } \Phi. \end{array} \right.$$

Remarquons tout d'abord qu'avec de telles hypothèses la représentation en intégrale stochastique sur $\mathbb{T}\Phi$ associée à H est définie sur tout $\mathbb{T}\Phi$.

Lemme 4.3.1 (Lemme 3.1 de [Pt2]) *Si une intégrale $\int_0^\infty H_s^\pm da_s^\pm$ satisfait aux hypothèses (\mathbf{HS}) , alors la représentation intégrale associée à $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ par la proposition 4.2.3 a pour domaine restreint $\mathbb{T}\Phi$ tout entier.*

Rappelons que le cas $\epsilon = 0$ de ce résultat est déjà contenu dans la Proposition 4.2.3.

On prouvera, sous ces hypothèses et en n'utilisant que notre procédé d'approximation, la formule d'Itô :

Théorème 4.3.2 (Formule d'Itô sur \mathcal{S}) *Soient*

$$H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon \text{ et } K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$$

deux intégrales satisfaisant aux hypothèses (\mathbf{HS}) ; alors on a

$$HK = \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon + \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta}$$

sur tout Φ , où $a^{\epsilon,\eta}$ est donné par la table d'Itô continue (3.2.9).

Etablissons d'abord nos notations ; cela nous permettra d'exposer le plan de la preuve, dont les détails sont assez techniques.

Notations

On considèrera deux intégrales

$$H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon \quad \text{et} \quad K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$$

qui vérifient les hypothèses **(HS)** ; ϵ et η peuvent prendre les valeurs $+$, $-$, \circ ou \times .

Les projections $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, $\mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S$ seront notées h , k respectivement. Dans le cas où ϵ ou η est différent de \times , les processus $(h_i^\epsilon)_{i \geq 0}$, $(k_i^\eta)_{i \geq 0}$ et éventuellement $(h_i^\circ)_{i \geq 0}$, $(k_i^\circ)_{i \geq 0}$ sont donnés par la proposition 4.2.3 ; le cas des projections d'intégrales par rapport à a^\times est discuté ci-dessous. Si par exemple $\epsilon = +$ ou $-$ alors on a vu que h s'écrit

$$h = \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ;$$

on notera alors \tilde{h}° l'intégrale $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ qui est ce que nous appellerons l'intégrale "parasite". Comme précédemment, on notera, dans l'exemple ci-dessus, h_j l'intégrale

$$h_j = \sum_{i < j} h_i^\epsilon a_i^\epsilon + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ;$$

et \tilde{h}_j° l'intégrale

$$\tilde{h}_j^\circ = \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ.$$

Le premier problème apparaît lorsque l'on veut projeter des intégrales à temps continu par rapport à a^\times . Considérons en effet une intégrale $H = \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ satisfaisant à **(HS)**, c'est-à-dire que les opérateurs H_s^\times sont bornés, que la fonction $s \mapsto \|H_s^\times\|$ est intégrable et que H est borné. Si l'on projette H sur l'espace de Fock à temps discret et considère directement la représentation intégrale de $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, on obtient

$$\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S = \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i \geq 0} h_i^- a_i^- + \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ$$

mais chaque $h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ ne pourra être relié qu'à la représentation (unique) de H sous la forme

$$H = \int H_s^+ da_s^+ + \int H_s^- da_s^- + \int H_s^\circ da_s^\circ.$$

De même, si l'on considère la représentation du processus $(\mathbb{E}_S \int_0^{t_i} H_s^\times da_s^\times \mathbb{E}_S)_{i \geq 0}$, on obtient un processus d'intégrales dont les coefficients se relient encore à la

représentation de H sous forme d'intégrales par rapport aux trois bruits $+$, $-$, \circ . Le problème est, au fond, qu'une écriture $H = \int H_s^\times da_s^\times$ est une écriture qui contient bien peu d'informations ; nos formules donnent alors de $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ une représentation plus précise (puisqu'unique), mais on ne peut alors pas relier cette représentation à l'écriture $\int H_s^\times da_s^\times$ d'origine. D'autres représentations semblent donc plus naturelles : on peut, de manière très générale, représenter une intégrale $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ comme

$$\sum_i h_i^{\prime \times} a_i^\times$$

avec

$$h_i^{\prime \times} = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}},$$

qui est bien prévisible, et l'intégrale restreinte $\sum_i h_i^{\prime \times} a_i^\times$ est alors bien définie sur $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(Dom h)$ (Proposition 2.4 de [Pt2]). Il apparaît cependant un nouveau problème : si l'on compare l'expression de $h_i^{\prime \times}$ aux expressions des h_i^ϵ , $\epsilon = +, -, \circ$ on voit immédiatement que, dès que l'on va manipuler plusieurs intégrales à la fois, il va falloir comparer des intégrales

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds$$

à des intégrales

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds.$$

La première étape sous nos hypothèses (**HS**) est donc d'obtenir une représentation plus maniable pour une intégrale $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$.

Lemme 4.3.3 (Lemme 3.6 de [Pt2]) *Soit $H = \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ une intégrale satisfaisant aux hypothèses (**HS**) ; alors H est la limite forte, lorsque le pas $|\mathcal{S}|$ de la partition \mathcal{S} , de*

$$\sum_i h_i^\times a_i^\times$$

où

$$h_i = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_s^\circ ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}.$$

Dans la suite de la preuve, nous n'établirons que des convergences faibles ; de plus, nous ne composerons une projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_0^\infty H_s^\circ ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ qu'avec des opérateurs qui seront uniformément bornés. Nous pouvons dès lors remplacer toute approximation $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_0^\infty H_s^\times ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ (qui converge aussi fortement vers $\int_0^\infty H_s^\times ds$) par la somme $\sum_i h_i^\times a_i^\times$.

A partir d'ici, la démonstration se décompose ainsi : tout d'abord on montre que les intégrales parasites par rapport à a° que l'on obtient en projetant des intégrales par rapport à da^+ ou da^- tendent vers zéro ainsi que les termes que ces parasites engendrent lorsque l'on compose plusieurs projections entre elles. Ensuite on prouve que la composition des intégrales projetées (dont on a ôté les termes parasites) peut être calculée avec la table d'Itô à temps *continu* avec une erreur qui tend vers zéro. Enfin, on prouve que les intégrales discrètes que l'on obtient après cette composition convergent vers les intégrales à temps continu désirées. Remarquons que l'on utilisera souvent des arguments de passage à l'adjoint pour regrouper plusieurs cas ; il est important pour cela de se rappeler que, si H satisfait aux conditions **(HS)**, alors H^* aussi et que

$$H^* = \int_0^\infty (H_s^\epsilon)^* da_s^{\epsilon'}$$

est valable sur Φ , où $+ ' = -$, $- ' = +$, $\circ ' = \circ$. On a le même type de relations pour les intégrales discrètes d'après les formules (2.2.5)

La première étape est contenue dans la proposition suivante, qui renforce dans notre cadre la Proposition 4.2.4 :

Proposition 4.3.4 (Proposition 3.8 de [Pt2]) *Soient $\epsilon, \eta \in \{+, -, \circ, \times\}$ et soient H, K deux intégrales stochastiques satisfaisant aux hypothèses **(HS)**. Alors pour tout $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$,*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S \mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S \mathcal{E}v \rangle - \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon \sum_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle$$

tend vers zéro avec le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision.

La preuve de cette proposition se ramène à la preuve de deux convergences : on peut en effet remarquer que la composition $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S \mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S$ de deux projections est de la forme

$$((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ)((k - \tilde{k}^\circ) + \tilde{k}^\circ)$$

si ϵ et η sont tous deux égaux à $+$ ou $-$,

$$((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ)k$$

si par exemple ϵ est seul égal à $+$ ou $-$ (les cas symétriques se traitent par passage à l'adjoint) ; on a par ailleurs $h - \tilde{h}^\circ = \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$. Il n'y a par ailleurs rien à prouver si ni ϵ ni η n'est égal à $+$ ou $-$; en utilisant la symétrie et les passages à l'adjoint on est ramené à montrer que

- $\tilde{h}^\circ k$ tend vers zéro pour $\epsilon = -$ ou $+$ et η quelconque,
- $\tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ$ tend vers zéro si ϵ, η sont tous deux égaux à $+$ ou $-$.

Le second point est prouvé directement par des estimations ; pour prouver le premier, on se ramène à montrer la convergence faible de \tilde{h}° en remarquant qu'on peut approcher $k\mathbb{E}_S\mathcal{E}(u)$ par la projection d'une combinaison linéaire de vecteurs exponentiels de Φ choisie indépendamment de \mathcal{S} .

La deuxième étape de notre preuve du Théorème 4.3.2 consiste à montrer que les différences entre les deux tables d'Itô disparaissent à la limite :

Proposition 4.3.5 (Proposition 3.9 de [Pt2]) *Soient $\epsilon, \eta \in \{+, -, \circ, \times\}$ et soient H, K deux intégrales stochastiques satisfaisant aux hypothèses **(HS)**. Alors pour tout $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$, la quantité*

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S \mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S \mathcal{E} v \right\rangle - \\ & \left\langle e(\tilde{u}), \left(\sum_i h_i^\epsilon \left(\sum_{j<i} k_j^\eta a_j^\eta \right) a_i^\epsilon + \sum_i \left(\sum_{j<i} h_j^\epsilon a_j^\epsilon \right) k_i^\eta a_i^\eta + \sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon,\eta} \right) e(\tilde{v}) \right\rangle \end{aligned}$$

tend vers zéro avec le pas $|\mathcal{S}|$ de la subdivision, où ϵ, η est donné par la table d'Itô continue.

Pour obtenir cette proposition, on a à montrer que

$$\text{pour } (\epsilon, \eta) = (+, -), \text{ on a } \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0 \quad (4.3.1)$$

et

$$\text{pour } (\epsilon, \eta) = (-, +), \text{ on a } \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0. \quad (4.3.2)$$

et que le terme d'Itô converge vers zéro lorsque ϵ ou η est \times ; toutes ces preuves se font par des estimations directes.

Une fois ces deux propositions prouvées, il suffit, pour obtenir

$$\int H_s^\epsilon da_s^\epsilon \int K_s^\eta da_s^\eta = \int H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon + \int H_s K_s^\eta da_s^\eta + \int H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta},$$

de montrer que

$$\begin{aligned} \left\langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon k_i a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \right\rangle & \longrightarrow \left\langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon \mathcal{E}(v) \right\rangle \\ \left\langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \right\rangle & \longrightarrow \left\langle \mathcal{E}(u), \int H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \right\rangle \\ \left\langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \right\rangle & \longrightarrow \left\langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta} \mathcal{E}(v) \right\rangle. \end{aligned}$$

On peut facilement voir par ailleurs que les propositions précédentes s'appliquent aux intégrales $\int H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon$, $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, $\int H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta}$; on a donc

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\epsilon K)_i^\epsilon a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (HK^\eta)_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\epsilon K^\eta)_i^{\epsilon,\eta} a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta} \mathcal{E}(v) \rangle \end{aligned}$$

où $(HK^\eta)_i^\eta$, $(H^\epsilon K)_i^\epsilon$ sont les coefficients associés par la Proposition 4.2.3 (ou par le Lemme 4.3.3) à l'intégrale $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, etc. Il suffit donc de prouver que

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\epsilon k_i - (H^\epsilon K)_i^\epsilon) a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i k_i^\eta - (HK^\eta)_i^\eta) a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\epsilon k_i^\eta - (H^\epsilon K^\eta)_i^{\epsilon,\eta}) a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Les deux premières convergences sont adjointes l'une de l'autre. On a donc à prouver deux types de convergence uniquement; cette dernière étape représente cependant le gros de la démonstration du Théorème 4.3.2 dans [Pt2].

4.3.2 Conséquences pour les probabilités classiques

La formule d'Itô classique pour les intégrales stochastiques quantiques par rapport à une martingale normale $(M_t)_{t \geq 0}$ peut être déduite de la formule d'Itô quantique au travers de la représentation intégrale de l'opérateur de multiplication associé (voir [At5]). Ce que nous avons montré prouve que, si l'on sait que le crochet droit d'une martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ vaut $[M]_t = t$, alors le crochet oblique de cette martingale se déduit de la représentation en intégrale stochastique de l'opérateur de multiplication associé et des relations de commutation des matrices de Pauli. Il n'y a là rien de bien surprenant, puisque la représentation intégrale de l'opérateur de multiplication se déduit elle-même de la formule d'Itô, donc de la forme de l'équation de structure vérifiée par la martingale. Nous croyons cependant que les exemples de calculs explicites dans des cas classiques peuvent éclairer ce que nous avons démontré dans ce chapitre.

D'après (3.2.4), le mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ peut être identifié au processus $(a_t^+ + a_t^-)_{t \geq 0}$. Si l'on considère une partition \mathcal{S} de pas constant δ , alors l'approximation de l'opérateur de multiplication par W_t est $\sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-)$ plus des termes

dont on a montré qu'ils tendent vers zéro avec δ . Par ailleurs, $a_i^+ + a_i^-$ est σ_x et donc

$$\left(\sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-)\right)^2 = \delta\sigma_x^2 = \delta I.$$

L'opérateur δI est l'approximation du processus déterministe $(t)_{t \geq 0}$. Cela implique que $d\langle W \rangle_t = dt$.

Un autre exemple intéressant est le processus de Poisson compensé $(X_t)_{t \geq 0} = (N_t - t)_{t \geq 0}$. Le processus de multiplication associé est $(a_i^+ + a_i^- + a_i^0)_{t \geq 0}$. Pour une partition \mathcal{S} régulière de pas δ , l'opérateur $a_i^+ + a_i^- + a_i^0$ est approché par $\sum_{i|t_i \leq t} (\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times)$ plus des termes qui disparaissent lorsque l'on passe à la limite. Puisque $\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times = \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}I$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right)^2 &= \delta\sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_z^2 + \frac{1}{4}I \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z \\ &= \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right) + \delta I \end{aligned}$$

car $\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0$ et $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = I$. Cela implique, comme nous l'avons montré, que $d\langle X \rangle_t = X_t + t$.

Chapitre 5

Application à la représentation des opérateurs

Dans ce chapitre, nous cherchons à appliquer les résultats de représentabilité que nous avons obtenus dans le cas à temps discret.

Dans la section 5.1, nous présentons une approche générale utilisant ces résultats ; nous montrons que cette approche, si elle ne permet de prouver aucun critère nouveau, reste crédible comme outil d'étude de problèmes précis et qu'en particulier les expressions que fournissent nos formules à temps discret sont de bonnes informations *a priori*.

Dans la section 5.2 nous étudions ces informations dans un cas explicite. celui des opérateurs de seconde quantification et de seconde quantification différentielle. Nous adoptons dans cette section une approche naïve et améliorons pas à pas les résultats obtenus, plutôt que de les annoncer d'emblée comme dans [Pt3].

Enfin, dans la section 5.3, nous donnons plusieurs améliorations et variations des critères exposés dans la section précédente.

Les résultats de la section 5.2 et d'une partie de la section 5.3 ont fait l'objet de l'article [Pt3].

5.1 Démarche générale

Dans le chapitre 2, nous avons obtenu des critères et formules explicites pour les coefficients apparaissant dans la représentation intégrale d'un opérateur H sur Φ . On aimerait évidemment pouvoir utiliser ces expressions pour obtenir des informations sur les représentations intégrales dans le cas du temps continu. On ne peut évidemment pas retranscrire les formules (2.2.5) : en prenant garde aux normalisa-

tions on s'aperçoit que l'on devrait avoir

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = D_t H P_t \\ H_t^- P_t = P_t H \frac{da_t^+}{dt} P_t \\ H_t^\circ P_t = D_t H da_t^+ P_t - P_t H P_t \end{cases} \quad (5.1.1)$$

ce qui n'a aucun sens précis (notons cependant que de telles formules sont implicites dans d'autres approches du calcul stochastique quantique comme l'approche "non standard" de Leitz-Martini [LeM] où la dérivation est une différence, ou dans des approches "bruit blanc").

Cependant nos formules 2.2.5 peuvent mener à des preuves rigoureuses dans certains cas, par l'intermédiaire des approximations d'opérateurs de Φ . Ces cas sont hélas trop particuliers pour que nous soyons arrivés à des résultats nouveaux; nous allons cependant présenter rapidement une telle preuve, d'une part pour montrer que cet outil qu'est l'approximation reste prometteur et d'autre part pour justifier le fait que nous ayons étudié dans des cas explicites les formules *a priori* fournies par (5.1.1).

Considérons une subdivision \mathcal{S} comme dans le chapitre 4. Associons alors à tout α de \mathcal{P} un élément A de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ par

$$\text{si } \alpha \in [t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times \dots \times [t_{i_n}, t_{i_n+1}] \text{ alors } A = \{i_1, \dots, i_n\}$$

et une quantité

$$\delta_A = (t_{i_1+1} - t_{i_1}) \dots (t_{i_n+1} - t_{i_n}).$$

On montre alors facilement à partir de la formule exprimant un opérateur d_i en fonction des D_t (voir le Lemme 4.2.1) que pour tout f , pour presque tout α ,

$$\frac{d_A}{\sqrt{\delta_A}} \text{ converge dans } L^2(\mathcal{P}) \text{ vers } D_\alpha f; \quad (5.1.2)$$

cela va nous permettre d'établir des convergences ponctuelles.

Considérons donc un opérateur H sur Φ et supposons d'abord que sa projection $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ est telle que l'on puisse lui appliquer notre théorème de représentabilité 2.2.1. Supposons de plus que les coefficients h_i^ξ apparaissant dans la représentation sont tels que, pour presque tout t ,

$$\frac{1}{\sqrt{t_{i(t)+1} - t_{i(t)}}} h_{i(t)}^\pm \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} H_t^\pm$$

$$h_{i(t)}^\circ \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} H_t^\circ$$

où les convergences sont fortes et où $i(t)$ est défini comme l'unique indice $i \in \mathbb{N}$ vérifiant $t_i \leq t < t_{i+1}$, cela avec des estimations uniformes raisonnables.

Dans le chapitre 1, nous avons fait le lien entre notre définition des intégrales stochastiques quantiques à temps discret et une transcription simple des définitions au sens de Attal et Lindsay. Cela implique en particulier que nos intégrales vérifient des équations du type Attal-Lindsay (voir 3.2.3 pour ces formules en temps continu); on a donc

$$\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S f(A) = \sum_{i \in A} h_i^+ p_i d_{A_{[i+1]}} f(A_i) + \sum_i h_i^- d_i d_{A_{[i]}} f(A_i) + \sum_{i \in A} h_i^\circ d_i d_{A_{[i+1]}} f(A_i).$$

En divisant les deux membres par δ_A et en passant à la limite, on tire d'après la remarque (5.1.2) une expression Attal-Lindsay à temps continu

$$H f(\alpha) = \sum_{s \in \sigma} H_s^+ P_s D_{\alpha_s} f(\alpha_s) + \int_0^\infty H_s^- D_s D_{\alpha_s} f(\sigma_s) + \sum_{s \in \alpha} H_s^\circ D_s D_{\alpha_s} f(\alpha_s)$$

qui montre que, si les conditions d'intégrabilité nécessaires sont vérifiées, on a bien obtenu une représentation intégrale de H .

Une telle démonstration peut être faite en toute rigueur dans le cas des martingales régulières telles que les ont définies Parthasarathy et Sinha dans [P-S]. On peut ainsi obtenir une preuve de leur caractérisation par l'intermédiaire de notre procédé d'approximation; nous ne décrirons cependant pas cette démonstration puisque les difficultés et méthodes pour les résoudre sont en fin de compte les mêmes qu'en temps continu. En effet, d'après notre discussion ci-dessus, il nous suffit de construire des processus $(H_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ qui soient des limites de $h_i^\pm / \sqrt{t_{i+1} - t_i}$ ou h_i° comme ci-dessus. On s'aperçoit cependant bien vite que, s'il est facile, pour tout f de Φ , de construire $H_t f$ de manière convenable pour *presque tout* t , il est plus problématique de le construire pour *tout* t et on en arrive ainsi à reproduire le point crucial de la preuve de Meyer (voir [Me3]) du résultat de Parthasarathy et Sinha.

L'approche que nous proposons pour étudier la représentabilité d'un opérateur consiste donc à essayer de donner un sens aux formules (5.1.1) puisque cela revient à étudier, les \mathbb{E}_S en moins, la limite des expressions obtenues par (2.2.5), puis, les conditions permettant de définir des intégrales des processus d'opérateurs obtenus étant supposés, vérifier que l'on obtient une représentation intégrale de l'opérateur étudié.

Nous devons faire une remarque supplémentaire à propos de la convergence des $d_A / \sqrt{t_{A+1} - t_A}$ vers D_α décrite ci-dessus : une des raisons qui donnent les formules (2.2.5) est que dans $T\Phi$ on a $d_i p_i = 0$ pour tout i . Dans Φ en revanche, avec la définition usuelle de D_t donnée dans le chapitre 3, $D_t P_t$ est indéterminé.

Ceci nous incite à modifier, dans notre tentative de donner un sens à (5.1.1), notre définition de D_t . Nous choisissons de considérer la définition suivante de D_t : pour tout f dans Φ , presque tout σ dans \mathcal{P} ,

$$D_t f(\sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} f(\sigma \cup \{s\}) ds.$$

Ceci ne diminue en rien le domaine de définition de D_t (pour tout f , $D_t f$ est défini pour presque tout t , de même que pour la définition usuelle) ni les formules de représentation prévisible et d'isométrie associées, de sorte que rien de ce que nous avons établi jusqu'ici ne doit être modifié ; en revanche cette nouvelle définition lève l'indétermination de $D_t P_t$: pour tout f , presque tout t , on a $D_t P_t f = 0$.

5.2 Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification

5.2.1 Opérateurs de seconde quantification

Les stratégies d'approche des questions de représentabilité que nous avons présentées dans la section précédente ont le défaut d'exiger que l'on puisse obtenir des expressions *a priori* à partir de (5.1.1). Cela n'est pas facile cependant ; il existe une classe d'opérateurs d'importance fondamentale en physique et qui a le mérite d'être très maniable. En particulier, l'expression de ces opérateurs sur les différents termes d'une décomposition tensorielle s'exprime très bien, ce qui va faciliter le calcul de H_t^- qui est en général le plus problématique.

A tout opérateur borné h sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ on associe deux opérateurs $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$; ces opérateurs sont définis sur l'espace \mathcal{F} par

$$\Gamma(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ \dots \circ hu_n, \quad (5.2.1)$$

$$\lambda(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n + \dots + u_1 \circ \dots \circ u_{n-1} \circ hu_n \quad (5.2.2)$$

pour tout n , tous u_1, \dots, u_n dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

On étend ces opérateurs par linéarité et fermeture ; on peut voir à partir des expressions ci-dessus que $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$ vérifient respectivement $\Gamma(h)^* = \Gamma(h^*)$ et $\lambda(h)^* = \lambda(h^*)$ sur \mathcal{F} et sont donc fermables.

Ces opérateurs ont une action particulièrement simple sur la famille des vecteurs exponentiels :

$$\begin{aligned} \Gamma(h)\mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(hu) \\ \lambda(h)\mathcal{E}(u) &= a_{hu}^+ \mathcal{E}(u). \end{aligned}$$

et c'est ce qui justifie ici notre intérêt pour eux. Ils sont par ailleurs fondamentaux en physique quantique. Les opérateurs de seconde quantification, parce qu'ils permettent de transporter un opérateur de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur l'espace de Fock associé ; les

opérateurs de seconde quantification différentielle $\lambda(h)$, parce qu'ils sont reliés aux précédents de la manière suivante : pour tout h borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$, tout t de \mathbb{R} , on a

$$\Gamma(e^{ith}) = e^{it\lambda(h)}.$$

Dans le cas où h est autoadjoint, cela signifie que $\lambda(h)$ est le générateur du semigroupe unitaire obtenu par seconde quantification du semigroupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ engendré par h .

Nous n'avons défini ici que les secondes quantifications d'opérateurs bornés, qui nous intéresseront en général ; nous parlerons plus loin de secondes quantifications d'opérateurs non bornés de $L^2(\mathbb{R}_+)$, la définition se déduisant facilement de (5.2.1) et (5.2.2). Nous avons évoqué, dans la section 3, le contre exemple de Journé et Meyer à la représentabilité en intégrale stochastique ; ce contre-exemple concerne un opérateur de seconde quantification et c'est pourquoi nous le présentons maintenant. On considère l'opérateur de seconde quantification $\Gamma(h)$, où h est la transformation de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ (plus précisément, l'application qui à un élément f de $L^2(\mathbb{R}_+)$ associe la restriction à \mathbb{R}_+ de la transformée de Hilbert de l'extension canonique de f à \mathbb{R}). Puisque la transformation de Hilbert est un opérateur unitaire, l'opérateur h est une contraction de $L^2(\mathbb{R}_+)$ et l'opérateur $\Gamma(h)$ associé est borné. On peut montrer cependant que $\Gamma(h)$ n'est pas représentable en intégrales stochastiques quantiques sur tout \mathcal{E} – ni même sur le sous-ensemble $\mathcal{E}(L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+))$. En effet, Journé et Meyer montrent que, si, pour un élément u de $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$, le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ est dans le domaine d'un opérateur H qui s'écrit comme une intégrale, alors $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ a une variation quadratique finie. Journé et Meyer exhibent ensuite un vecteur u de $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ pour lequel $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ n'a pas cette propriété : la seconde quantification de la transformation de Hilbert n'est donc pas représentable en intégrale stochastique quantique. Nous reviendrons sur ce phénomène dans 5.2.3

Nous allons examiner formellement la forme que prennent les expressions (5.1.1) ; nous montrerons ensuite que cette heuristique permet d'identifier exactement les critères qui déterminent la représentabilité d'un tel opérateur. Ces critères ont le bon goût de se traduire ensuite de manière particulièrement lisible, ce qui nous permet d'obtenir une caractérisation simple des opérateurs de seconde quantification qui sont représentables en intégrales stochastiques quantiques. Nous verrons enfin que notre preuve se transcrit très exactement au cas des opérateurs de seconde quantification différentielle ; la représentabilité de $\lambda(h)$ et $\Gamma(h)$ est donc équivalente et nous pourrions exprimer les critères dont elle dépend.

Il est à remarquer que, dans cette section, on va travailler en permanence avec des opérateurs de seconde quantification et donc établir des liens entre les propriétés d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et celles d'opérateurs sur $L^2(\mathcal{P})$ qui leur sont associés. Nous utiliserons des lettres majuscules pour les opérateurs et grandeurs associés à $L^2(\mathcal{P})$ et des minuscules pour ceux qui sont associés à $L^2(\mathbb{R}_+)$. Dans le reste de

cette thèse, les minuscules sont associées aux objets des espaces de Fock discrets par opposition à ceux des espaces de Fock à temps continu. Il ne sera pas question dans ce chapitre d'espaces de Fock à temps discret et cette convention adoptée le temps d'un chapitre ne devrait pas être source de confusion.

Considérons un opérateur de seconde quantification $H = \Gamma(h)$ pour h borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous allons essayer d'appliquer les formules (5.1.1) à H sur le domaine exponentiel, domaine sur lequel on a une bonne écriture à la fois de l'action des intégrales et de l'action des opérateurs de seconde quantification. On doit avoir, pour presque tout σ de \mathcal{P} ,

$$\begin{aligned} H_t^+ \mathcal{E}(u_t)(\sigma) &= D_t \Gamma(h) \mathcal{E}(u_t)(\sigma) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} \mathcal{E}(hu_t)(\sigma + s) ds \mathbb{1}_{\sigma < t} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} hu_t(s) ds P_t \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \langle h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon, u_t \rangle \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u)(\sigma), \end{aligned}$$

où le fait d'écrire cette grandeur sous la forme donnée dans la dernière ligne sera justifié *a posteriori* par la forme que prend H_t^+ . Remarquons que le point de vue sur D_t suggéré par l'approche discrète nous a été utile ici : nous aurions dû autrement considérer $(hu_t)(t)$, qui n'est pas une grandeur définie.

Pour H_t^- on doit avoir

$$\begin{aligned} H_t^- \mathcal{E}(u_t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_t \Gamma(h) \frac{a_{[t, t+\epsilon]}^+}{\epsilon} \mathcal{E}(u_t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P_t \Gamma(h) (\mathcal{E}(u_t) \circ \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_t (\mathcal{E}(hu_t) \circ \frac{h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}}{\epsilon}) \\ &= \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \circ (\pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon). \end{aligned}$$

où pour tout t , π_t représente l'opérateur de multiplication par l'indicatrice de $\mathbb{1}_{[0, t]}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Si l'on suppose que ces termes ont un sens on doit supposer que les limites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi_t (h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi_t (h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon)$$

ont un sens. En particulier, la convergence pour h doit avoir lieu dans $L^2(\mathbb{R}_+)$; pour h^* une convergence faible semble suffire. Dans la suite, nous allons symétriser nos hypothèses en h et h^* pour avoir une vraie convergence en norme.

Examinons alors le cas de $H_t^\circ \mathcal{E}(u)$. Pour tout σ , $H_t^\circ \mathcal{E}(u)(\sigma)$ doit être égal à

$$\begin{aligned} H_t^\circ \mathcal{E}(u_t)(\sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} \Gamma(h) \frac{a_{[t,t+\epsilon]}^+}{\epsilon} \mathcal{E}(u_t)(\sigma + s) ds - P_t \Gamma(h) \mathcal{E}(u_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} \Gamma(h) \left(\mathcal{E}(u_t) \circ \frac{\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}}{\epsilon} \right) (\sigma + s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} \left(\mathcal{E}(hu_t) \circ \frac{h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}}{\epsilon} \right) (\sigma + s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \\ &= \mathbf{1}_{\sigma < t} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} (hu_t)(\sigma) \frac{h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}}{\epsilon}(s) ds - \mathcal{E}(hu_t)(\sigma) \end{aligned}$$

car les autres termes que l'on obtient en développant $(\mathcal{E}(hu_t) \circ (h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}/\epsilon))(\sigma + s)$ sont en nombre fini et de la forme

$$\mathcal{E}(hu_t)(\sigma \setminus \{a\}) \int_t^{t+\epsilon} hu_t(s) ds (h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}/\epsilon)(a)$$

pour a dans σ ; le dernier terme $(h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}/\epsilon)(a)$ est convergent pour presque tout a d'après nos hypothèses donc l'expression ci-dessus doit tendre vers zéro. L'expression de $H_t^\circ \mathcal{E}(u_t)(\sigma)$ doit donc être de la forme

$$(h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}/\epsilon)(\sigma) = \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}, h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]} \rangle - 1 \right) \mathcal{E}(hu_t)(\sigma).$$

Nous n'avons pas ici discuté les conditions qui sont nécessaires pour pouvoir définir les intégrales des processus que nous avons définis; nous pourrions continuer l'examen de ces conditions pour préciser les propriétés des limites qui apparaissent dans les expressions ci-dessus et trouverions exactement les autres conditions que nous énonçons dans notre Proposition 5.2.1 ci-dessous.

Nous sommes partis de l'hypothèse que, si les convergences qui apparaissent dans les calculs ci-dessus ont bien lieu et déterminent des opérateurs H_t^+ , H_t^- , H_t° qui ont les propriétés d'intégrabilité nécessaires pour considérer l'intégrale stochastique quantique associée à ces intégrandes, alors cette intégrale doit représenter l'opérateur $\Gamma(h)$.

Dans l'article [Pt3], nous avons montré de manière rigoureuse que la représentabilité des opérateurs $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ est déterminé par les critères que nous obtenons ainsi; nous allons détailler les résultats contenus dans cet article. Notons que, dans ce chapitre, nous notons toujours $\pi_t u$ et pas u_t la restriction d'une fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à l'intervalle $[0, t]$, cela afin d'éviter la confusion lorsque apparaissent des familles $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ où chaque α_t , β_t est une fonction de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Avant d'énoncé la proposition suivante, rappelons que le sens que nous donnons à une intégrale stochastique quantique suit la définition Attal-Meyer (voir la Définition 3.2.2) et que nous ne nous intéressons qu'aux représentations intégrales dans lesquelles les opérateurs H_t° sont fermables pour presque tout t et tout ϵ .

Proposition 5.2.1 (Proposition 2.2 de [Pt3]) Si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ coïncident sur \mathcal{E} avec une intégrale stochastique quantique, alors h vérifie les conditions **(C)** :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t, \\ \bullet \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \alpha_t \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \pi_t h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \beta_t \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \text{ converge vers un scalaire } \gamma(t) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \text{les limites ont les propriétés suivantes :} \\ \bullet \text{ les fonctions } t \mapsto \|\alpha_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, t \mapsto \|\beta_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{ sont de carré intégrable,} \\ \bullet \text{ la fonction } t \mapsto \gamma(t) \text{ est essentiellement bornée.} \end{array} \right.$$

Démonstration.

Détaillons la structure de cette démonstration : en testant la représentation intégrale sur des vecteurs exponentiels on obtient la convergence suivante, valable pour presque tout t :

$$\pi_t h \pi_{[t, t+\epsilon]} u / \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+). \quad (5.2.3)$$

où P^1 représente la projection sur le premier chaos.

Considérer le cas particulier où u est une indicatrice d'intervalle compact mène à

$$\pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+), \quad (5.2.4)$$

et en notant α_t le terme de droite pour tout t on obtient bien la première condition de **(C)** ; la deuxième est obtenue par symétrie entre h et h^* . En se basant sur ces premiers résultats de convergence nous arrivons à montrer en testant encore la représentation intégrale sur de bons vecteurs exponentiels, que l'on a la troisième condition de convergence. Le fait que la limite $\gamma(t)$ est, comme fonction de t , essentiellement bornée, est obtenu directement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \right| \leq \|h\|.$$

On obtient ainsi tous les points de **(C)** à l'exception des conditions d'intégrabilité portant sur $t \mapsto \|\alpha_t\|$, $t \mapsto \|\beta_t\|$. Ce point est en fait le plus délicat de la preuve de la Proposition 5.2.1. On peut montrer à partir de (5.2.3) que pour u suffisamment régulier (presque partout différentiable suffit), on a pour presque tout t

$$u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(u_t) = u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t). \quad (5.2.5)$$

On peut montrer par ailleurs que, pour un $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ donné, vérifier cette égalité impose en fait la valeur de $u(t)H_t^-\mathcal{E}(u_t)$ non seulement sur le premier, mais sur tous les chaos. En utilisant la fermabilité de H_t^- et l'égalité (5.2.5) pour les u assez réguliers on arrive alors à montrer que l'égalité (5.2.5) est valable en fait pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ (Lemme 2.4 de [Pt3]). Comme nous savons par ailleurs que $t \mapsto |u(t)| \|H_t^-\mathcal{E}(u_t)\|$ est intégrable pour tout u , cette égalité entraîne que pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$, l'application

$$t \mapsto |u(t)| \|\alpha_t\|$$

est intégrable et par conséquent $t \mapsto \|\alpha_t\|$ est de carré intégrable ; on procède de même pour β_t .

Ceci termine la preuve de la Proposition 5.2.1. Nous obtenons ainsi un premier ensemble de conditions à la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur \mathcal{E} . Nous cherchons alors à obtenir une caractérisation plus parlante de l'ensemble de conditions (C) :

Lemme 5.2.2 (Lemme 2.6 de [Pt3]) *Soit h un opérateur borné ; les conditions (C) de la Proposition 5.2.1 sont équivalentes à l'existence d'un opérateur de Hilbert-Schmidt k tel que*

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma,$$

où \mathcal{M}_γ est l'opérateur de multiplication par γ .

Dans [Pt3], l'opérateur k est noté K .

Il existe donc une fonction κ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{C} telle que pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$, presque tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$hu(t) = \int_0^\infty \kappa(s, t)u(s) ds + u(s)\gamma(s),$$

et le lien entre cette fonction κ et les fonctions α, β de (C) est le suivant :

$$\begin{cases} \kappa(s, t) = \overline{\beta_t(s)} & \text{si } s < t \text{ et} \\ \kappa(s, t) = \alpha_s(t) & \text{si } s > t. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Nous avons ainsi montré que, si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ ont une représentation intégrale sur \mathcal{E} , alors h est de la forme donnée dans le Lemme 5.2.2.

Nous montrons alors l'implication inverse, la forme particulière de h nous permettant, à partir des formules fournies par notre approche heuristique, de définir les intégrandes suivantes :

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t)u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u), \end{cases} \quad (5.2.7)$$

ces opérateurs étant ensuite étendus par adaptation.

Nous montrons alors que sous ces hypothèses, les intégrandes définies sont bien des opérateurs fermables, que les intégrales stochastiques associées sont bien définies sur \mathcal{E} et qu'elles coïncident avec $\Gamma(h)$. Puisque h^* est de la même forme que h on construit de même une intégrale égale sur \mathcal{E} à $\Gamma(h^*)$.

Les formules (5.2.7) ci-dessous montrent que sur \mathcal{E} , les intégrandes vérifient

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = P_t \Gamma(h) a_{\kappa(t,t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = P_t a_{\kappa(t,t)}^+ \Gamma(h) P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t, \end{cases} \quad (5.2.8)$$

expressions qui nous permettent d'étendre cette représentation à un domaine différent de \mathcal{E} : on voit par exemple que cette représentation est encore valide sur le domaine \mathcal{J} .

De plus, la Proposition 3.2.4 montre que si $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$ sont représentables, alors les coefficients de la représentation ont nécessairement la forme (5.2.8).

Nous avons ainsi obtenu une condition nécessaire et suffisante de représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur \mathcal{E} . On peut de plus remarquer que, dans notre preuve, l'hypothèse de représentabilité sur \mathcal{E} n'a servi que comme ensemble de vecteurs test ; en particulier nous aurions pu donner exactement la même preuve en considérant la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} .

Nous obtenons ainsi, sans rien ajouter à la démonstration (ou presque) la caractérisation suivante :

Théorème 5.2.3 (Théorème 2.1 de [Pt3]) *Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$; on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur le domaine \mathcal{E} ,
2. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} ,
3. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ .

Dans tous les cas, les coefficients de la représentation sont donnés par les expressions (5.2.7) et (5.2.8). De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors la représentation intégrale peut être étendue à tout l'ensemble \mathcal{J} .

Les formules (5.2.7) et (5.2.8) montrent de plus que l'on a *a priori* un lien fort entre le fait que $\Gamma(h)$ soit borné et celui que les coefficients de la représentation le soient ; on peut en fait montrer le résultat suivant

Proposition 5.2.4 (Proposition 2.8 de [Pt3]) *Soit $\Gamma(h)$ un opérateur de seconde quantification ; les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

1. $\Gamma(h)$ appartient à S' ,
2. $\Gamma(h)$ appartient à S ,
3. h est de la forme $k + \mathcal{M}_\gamma$ où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ , et h est de plus une contraction.

5.2.2 Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification différentielle

Il est remarquable que notre preuve n'utilise en fait, de la représentation intégrale, que son action sur le premier chaos ; si l'on remarque qu'un opérateur de seconde quantification différentielle $\lambda(h)$ coïncide sur le premier chaos avec l'opérateur de seconde quantification correspondant $\Gamma(h)$, on voit que notre preuve s'applique à l'identique au cas des opérateurs de seconde quantification différentielle. On obtient ainsi le résultat suivant, qui étend un résultat de Coquio dans [Co2] :

Théorème 5.2.5 (Théorème 3.1 de [Pt2]) *Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$; on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur le domaine \mathcal{E} ,
2. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur l'espace à nombre fini de particules \mathcal{F} ,
3. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_\gamma$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_γ est un opérateur de multiplication par une fonction essentiellement bornée γ .

Dans tous les cas, les coefficients de la représentation sont donnés par les expressions (5.2.9) et (5.2.10) ci-dessous. De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors la représentation intégrale peut être étendue à tout l'ensemble \mathcal{J} .

Les coefficients de la représentation intégrale sont donnés par

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t) u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u), \end{cases} \quad (5.2.9)$$

et comme précédemment on a des expressions plus générales qui nous permettent d'étendre la représentation au-delà de \mathcal{E} :

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = a_{\kappa(t, \cdot)}^+ P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t. \end{cases} \quad (5.2.10)$$

5.2.3 Le contre-exemple de Journé et Meyer

Remarquons d'abord que le contre-exemple de Journé et Meyer est un contre-exemple à la représentabilité de $\Gamma(h)$ et que l'on ne suppose rien de la représentabilité de $\Gamma(h^*)$. Cependant l'opérateur h considéré dans cet exemple vérifie $h^* = -h$ et l'on peut adapter notre preuve pour montrer que si l'opérateur h vérifie une telle relation (ou plus généralement si h et h^* sont proportionnels), alors $\Gamma(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique si et seulement si h est par ailleurs de la forme $k + \mathcal{M}_\gamma$ comme en 5.2.2.

Cependant on peut vérifier que h vérifie pour tous a, b de \mathbb{R}_+ que $h\mathbb{1}_{[a,b]}(s) = \frac{1}{\pi} \log \frac{s-a}{s-b}$ pour presque tout s . En particulier, $\frac{1}{\varepsilon} h\mathbb{1}_{[t, t+\varepsilon]}$ converge presque partout vers $s \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{t-s}$, et cette fonction n'est pas de carré intégrable, donc cette convergence ne peut pas être vraie au sens L^2 . Cet opérateur h est donc loin de vérifier les conditions (C) : la fonction α_t associée est telle que $\int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s$ ne définit pas un élément de Φ , donc l'égalité

$$H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u),$$

n'a de sens dans Φ pour aucun u de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

C'est pourquoi une telle représentation intégrale de $\Gamma(h)$ ne peut exister qu'en un sens plus faible : la représentation définie par Parthasarathy dans sa réponse à Journé et Meyer [Py1] est sans doute ce que l'on peut faire de mieux : $H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)$ y est définie que pour des fonctions u suffisamment régulières mais H_t^- n'est défini que comme une distribution.

Remarquons que le contre-exemple de Journé et Meyer montre en fait que $\Gamma(h)$ n'est représentable sur aucun espace $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Nous donnons dans la suite une caractérisation des opérateurs qui ont une représentation intégrale sur un tel sous-ensemble de \mathcal{E} ; cependant cet exemple particulier est tellement pathologique (le noyau associé n'est même pas de carré intégrable en une variable) que cette caractérisation ne nous apprend rien de nouveau dans ce cas précis.

Remarquons par ailleurs que notre théorème offre une foule d'exemples d'opérateurs non représentables : pour tout opérateur h autoadjoint (ou même, nous l'avons

vu ci-dessus, pour lequel h et h^* sont proportionnels) qui n'est pas de la forme $k + \mathcal{M}_f$ comme précédemment, l'opérateur associé $\Gamma(h)$ n'est pas représentable sur \mathcal{E} .

5.3 Extensions possibles de ces résultats

Dans cette section, nous donnons plusieurs extensions des résultats 5.2.3 et 5.2.5 ; nous étudions des critères de représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E} , le cas de la multiplicité infinie, puis donnons des conditions suffisantes permettant de représenter un opérateur de seconde quantification d'un opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

5.3.1 Représentabilité sur des sous-ensembles de \mathcal{E}

Dans les Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5, la caractérisation de la représentabilité qui s'appuie sur les vecteurs exponentiels utilise sur une hypothèse très forte : la représentabilité sur tout le domaine exponentiel. On peut souhaiter, pour des applications pratiques, obtenir une caractérisation de la représentabilité des opérateurs de seconde quantification ou seconde quantification différentielle sur des parties de l'ensemble \mathcal{E} . On peut facilement adapter les démonstrations précédentes pour obtenir des conditions nécessaires à la représentabilité en intégrale stochastique quantique sur les exponentielles de fonctions appartenant à un sous-espace \mathcal{A} de $L^2(\mathbb{R}_+)$ vérifiant certaines propriétés :

Proposition 5.3.1 *Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel $L^2(\mathbb{R}_+)$ tel que*

- *l'espace \mathcal{A} est stable par passage à la valeur absolue*
- *l'espace \mathcal{A} contient les indicatrices d'intervalles bornés de \mathbb{R}_+ .*

Si $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ alors les conditions **(C)** sont vérifiées, à l'exception de la condition portant sur $\|\alpha_t\|$, $\|\beta_t\|$ qui est remplacée par*

$$t \mapsto \|\alpha_t\| u(t), t \mapsto \|\beta_t\| u(t) \text{ sont intégrables pour toute fonction } u \text{ de } \mathcal{A}.$$

La même conclusion est valable en partant de l'hypothèse que $\lambda(h)$ et $\lambda(h^)$ sont représentables sur $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.*

Le défaut de cette formulation des conditions nécessaires à la représentabilité a un défaut évident : on ne sait en général pas traduire ces conditions de manière plus concise. Un autre défaut est plus grave : on ne sait pas si les noyaux obtenus à partir des fonctions α, β comme précédemment sont suffisamment intégrables pour définir un opérateur sur \mathcal{A} .

Dans le cas où \mathcal{A} est un espace de type $L^2 \cap L^p$ pour $p \geq 1$, on peut espérer obtenir une formulation plus claire. En effet, il semble que toutes les étapes de la

preuve de 5.2.3 restent valables ; l'étape cruciale montrant que $t \mapsto \|\alpha_t\|$, $t \mapsto \|\beta_t\|$ sont de carré intégrable semble être remplacée par un résultat "lisible" grâce au lemme suivant, analogue de celui que nous avons utilisé dans la preuve de 5.2.3 :

Lemme 5.3.2 *soit p dans $[1, +\infty[$ et soit u une fonction mesurable telle que uv est intégrable pour toute fonction v de $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Alors u appartient à $L^2(\mathbb{R}_+) + L^q(\mathbb{R}_+)$, où $q \in]1, +\infty]$ est l'indice conjugué de p .*

Il demeure en fait la même obstruction que dans le cas général : on ne sait même pas, si l'on définit une fonction κ à partir de α et β comme précédemment, si l'intégrale

$$\int_0^\infty \kappa(s, t) u(s) ds$$

sera définie pour u dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. En effet, ce que le lemme 5.3.2 va nous permettre de montrer est que

$$t \mapsto \left(\int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

est dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$ et pas

$$t \mapsto \left(\int_0^\infty |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2}$$

comme on pourrait le croire. On ne pourra donc pas définir l'opérateur de noyau κ sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$.

On peut, en se restreignant au cas où $p \in [1, 2[$, obtenir une caractérisation de la représentabilité des opérateurs $\lambda(h)$, $\lambda(h^*)$; on peut obtenir dans certains cas particuliers une caractérisation de la représentabilité des opérateurs $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$.

Fixons d'abord quelques notations et une définition : pour toute fonction κ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on note $\tilde{\kappa}$ la fonction vérifiant

$$\tilde{\kappa}(s, t) = \overline{\kappa(t, s)},$$

et on définit une fonction $\|\kappa\|$ par

$$\|\kappa\|(t) = \left(\int_0^\infty |\kappa(s, t)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Définition 5.3.3 *Soit q un élément de $[1, +\infty[$. Un $(2, q)$ -noyau est une fonction κ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ telle que pour tout t , les fonctions $\|\kappa\|$ et $\|\tilde{\kappa}\|$ sont finies presque partout et appartiennent à $L^2(\mathbb{R}_+) + L^q(\mathbb{R}_+)$.*

On a alors le résultat suivant, analogue de 6.3.1 et 5.2.5 :

Théorème 5.3.4 Soit h un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et soit $p \leq 2$. On définit les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ ont une représentation en intégrale stochastique sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$,
2. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ ont une représentation en intégrale stochastique sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$,
3. il existe un $(2, q)$ -noyau κ et une fonction essentiellement bornée γ telle que

$$h = K_\kappa + \mathcal{M}_\gamma \text{ et } h^* = K_{\bar{\kappa}} + \mathcal{M}_{\bar{\gamma}}$$

sur $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

Alors

- 1. ou 2. impliquent 3.
- 3. implique 2.
- 3. implique 1. si l'on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$3'. \quad \begin{cases} \int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(r, s) u(r) dr \right|^2 ds \leq C \int_0^\infty |u(r)|^2 dr \\ \text{et} \\ \int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(s, r) u(r) dr \right|^2 ds \leq C \int_0^\infty |u(r)|^2 dr \end{cases}$$

pour une constante positive C et tout u dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

De plus, dès que 3. (et 3'. dans le cas de $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$) sont vérifiées, les représentations sont valables sur le sous-espace $\mathcal{J}(L^2 \cap L^p)$ de \mathcal{J} engendré par les vecteurs $j(g, f)$ avec f et g dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

Remarques

On peut énoncer des conditions plus explicites sous lesquelles 1. et 2. sont vérifiés. Si par exemple h est positive alors les trois propriétés 1, 2, 3 sont équivalentes ; si $|h|$ vérifie les conditions de 3. alors $\lambda(h)$, $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+))$. Nous précisons après la démonstration les modifications à apporter à celle-ci pour obtenir ces différentes assertions.

Ce théorème n'apparaît pas dans [Pt3] ; nous donnons donc ici sa démonstration.

Preuve du Théorème 5.3.4

Nous allons donner une preuve complète dans le cas des opérateurs $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$, c'est-à-dire que nous démontrons que 1. implique 3, puis que 3. et 3'. impliquent à elles deux 1.

Commençons par la preuve de l'implication 1. \Rightarrow 3. ; on obtient comme dans le cas du Théorème 5.2.3 les conditions suivantes sur h et h^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t, \\ \bullet \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \alpha_t \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \pi_t h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converge dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ vers une fonction } \beta_t \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \bullet \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \text{ converge vers un scalaire } \gamma(t) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \\ \text{les limites ont les propriétés suivantes :} \\ \bullet \text{ les fonctions } t \mapsto \|\alpha_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, t \mapsto \|\beta_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{ appartiennent à } (L^2 + L^q)(\mathbb{R}_+), \\ \bullet \text{ la fonction } t \mapsto \gamma(t) \text{ est essentiellement bornée.} \end{array} \right.$$

On définit comme dans le cas du Lemme 5.2.2 κ à partir de α, β :

$$\begin{cases} \kappa(s, t) = \overline{\beta_t(s)} & \text{si } s < t \text{ et} \\ \kappa(s, t) = \alpha_s(t) & \text{si } s > t. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Considérons une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbb{R}_+ qui croît vers $+\infty$. La suite $\pi_{t_n} h \pi_{t_n}$ converge fortement vers h donc pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, il existe une sous-suite de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\pi_{t_n} h \pi_{t_n} u$ converge presque partout vers u . En utilisant la séparabilité de $L^2(\mathbb{R}_+)$, la continuité de h et un procédé diagonal, on obtient une sous-suite de $(t_n)_{n \geq 0}$ pour laquelle

$$\text{pour presque tout } s, \text{ pour tout } u \text{ de } L^2(\mathbb{R}_+), \pi_{t_n} h \pi_{t_n} u(s) \rightarrow hu(s).$$

On note encore $(t_n)_{n \geq 0}$ cette sous-suite. On restreint toutes les fonctions à un intervalle borné $[0, t_n]$; l'ensemble $L^2 \cap L^p$ est alors égal à l'ensemble L^2 ; la preuve du Lemme 5.2.2 adaptée à ce cas montre alors que pour presque tout s , la formule suivante est valable pour tout u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ et tout n suffisamment grand :

$$h \pi_{t_n} u(s) = \int_0^{t_n} \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s).$$

Le membre de gauche converge vers $hu(s)$, et le deuxième terme du membre de droite est fixé; l'intégrale converge donc lorsque n tend vers l'infini et, avec un abus de notation momentané, on a encore pour presque tout s , tout u :

$$hu(s) = \int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s). \quad (5.3.2)$$

L'abus en question tient à ce que l'intégrale $\int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr$ est pour l'instant une intégrale impropre. On peut cependant considérer, au lieu de u , la fonction v définie

par

$$v(r) = \begin{cases} u(r) \times \frac{\overline{\kappa(r,s)}}{|\kappa(r,s)|} & \text{si } \kappa(r,s) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que $r \mapsto |\kappa(r,s)u(r)|$ est intégrable et que l'intégrale est en fait absolument convergente. Par symétrie on obtient les propriétés de h^* et $r \mapsto \kappa(s,r)$; on a donc prouvé que 1. implique 3.

La preuve que 3. avec la condition supplémentaire 3'. entraîne 1. est semblable à l'une des étapes de la preuve du Théorème 5.2.3 : grâce à 3', on peut définir $H_t^+ \mathcal{E}(u_t)$, $H_t^- \mathcal{E}(u_t)$ à partir des formules (5.2.7) et on vérifie exactement comme dans le cas du Théorème 5.2.3 que les intégrales ainsi définies coïncident avec $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$. L'extension au sous-ensemble \mathcal{J} est obtenu comme pour 5.2.3.

Ceci conclut la preuve. □

Remarques sur l'hypothèse supplémentaire 3'.

Soulignons d'abord le fait que l'on ne peut se passer d'ajouter l'hypothèse 3'. En effet, la majoration

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \kappa(r,s)u(r)dr \right|^2 ds \leq \|h\|^2 \|u\|^2,$$

que l'on déduit de la forme de h , n'implique pas que

$$\int_0^\infty \left| \int_0^s \kappa(r,s)u(r)dr \right|^2 ds \leq \|h\|^2 \|u\|^2.$$

On a cependant cette implication si h est un opérateur positif, ce qui prouve l'une de nos remarques. Par ailleurs, si 3. est vérifiée pour $|h|$ alors on décompose h sous la forme :

$$h = h_{\mathfrak{R}}^+ - h_{\mathfrak{R}}^- + ih_{\mathfrak{I}}^+ - ih_{\mathfrak{I}}^-;$$

et chacun vérifie la condition 3. puisqu'il est borné par $|h|$; cependant, comme les égalités

$$\lambda(h) = \lambda(h_{\mathfrak{R}}^+) - \lambda(h_{\mathfrak{R}}^-) + i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^+) - i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^-)$$

et

$$\lambda(h^*) = \lambda(h_{\mathfrak{R}}^+) - \lambda(h_{\mathfrak{R}}^-) - i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^+) + i\lambda(h_{\mathfrak{I}}^-)$$

sont vérifiées sur \mathcal{J} , chaque terme est représentable et on a une égalité du même type pour les intégrales. Il existe bien sûr d'autres cas particuliers dans lesquels on peut adapter la preuve ci-dessus pour obtenir la représentabilité de $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$.

5.3.2 Le cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à 1

Dans la section 4 de l'article [Pt3], nous donnons une extension des résultats précédents au cas des espaces de Fock de multiplicité supérieure à un ; notons que les opérateurs de seconde quantification sont définis dans les espaces de Fock de multiplicité supérieure à un suivant les expressions (5.2.1) et (5.2.2) comme précédemment, deux opérateurs $\Gamma(h)$ et $\lambda(h)$ étant maintenant associés à tout opérateur h sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

Avant d'énoncer le théorème de caractérisation, précisons les définitions suivantes :

Définition 5.3.5

- Un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ est un opérateur k tel qu'il existe une famille $(\kappa_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ telles que

$$\sum_{i,j \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} |\kappa_{i,j}(s,t)|^2 ds dt < +\infty$$

et que pour tout i dans Λ , presque tout s dans \mathbb{R}_+ ,

$$kf(s,i) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^\infty \kappa_{i,j}(r,s) f(r,j) dr.$$

- Un opérateur de multiplication est un opérateur M_γ pour lequel il existe une application $s \mapsto (\gamma_{i,j}(s))_{i,j \in \Lambda}$ dont les coefficients vérifient que pour presque tout s de \mathbb{R}_+ ,

$$\|\gamma\|(s) = \left(\sum_{i,j \in \Lambda} |\gamma_{i,j}(s)|^2 \right)^{1/2}$$

est fini et

$$M_\gamma f(s,i) = \sum_{j \in \Lambda} \gamma_{i,j}(s) f(s,j).$$

Le théorème suivant condense les analogues en multiplicité supérieure à un des Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5. Les expressions des intégrandes sont données plus loin.

Théorème 5.3.6 (Théorème 4.2 de [Pt3]) Soit h un opérateur borné sur l'espace $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ des vecteurs exponentiels
2. $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{F}_\mathcal{K}$ des vecteurs à nombre fini de particules
3. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ des vecteurs exponentiels

4. $\lambda(h)$ et $\lambda(h^*)$ sont représentables en intégrales stochastiques quantiques sur l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ des vecteurs à nombre fini de particules
5. h est de la forme

$$h = k + \mathcal{M}_{\gamma}$$

où k est un opérateur de Hilbert-Schmidt et \mathcal{M}_{γ} est un opérateur de multiplication par la matrice $(\gamma_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ tel que la fonction $\|\gamma\|$ est essentiellement bornée sur \mathbb{R}_+ .

Si par ailleurs l'une des conditions ci-dessus est vérifiée, alors on peut étendre les représentations intégrales à tout $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$.

La preuve consiste essentiellement à appliquer les Théorèmes 5.2.3 et 5.2.5 à chaque "élément de matrice" des opérateurs considérés et à vérifier que les conditions de sommabilité suivant i, j imposées par les représentations intégrales en multiplicité supérieure impliquent les conditions sur γ et k ou inversement.

Intégrandes dans la représentation intégrale de $\Gamma(h)$

Les coefficients de la représentation intégrale de $\Gamma(h)$ ont les expressions suivantes sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$:

$$\begin{cases} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}((h \pi_t u)_t) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}((h \pi_t u)_t) \circ \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{j,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}((h \pi_t u)_t). \end{cases} \quad (5.3.3)$$

pour tous i, j dans Λ et ont la forme plus générale suivante sur $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\begin{cases} H_t^{0,i} P_t = P_t \Gamma(h) P_t \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} \\ H_t^{j,0} P_t = \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \Gamma(h) P_t \\ H_t^{j,i} P_t = (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Intégrandes dans la représentation intégrale de $\lambda(h)$

Les coefficients de la représentation intégrale de $\lambda(h)$ ont les expressions suivantes sur $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$:

$$\begin{cases} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{j,i}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{i,j} \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u). \end{cases} \quad (5.3.5)$$

pour tous i, j dans Λ et ont la forme plus générale suivante sur $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\begin{cases} H_t^{0,i} P_t = \sum_{j \in \Lambda} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} P_t \\ H_t^{j,0} P_t = \sum_{i \in \Lambda} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \\ H_t^{j,i} P_t = (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t. \end{cases} \quad (5.3.6)$$

5.3.3 Secondes quantifications d'opérateurs non bornés

Dans cette section nous nous intéressons rapidement au cas des opérateurs de seconde quantification ou de seconde quantification différentielle construits à partir d'opérateurs non bornés ; la définition de tels opérateurs se déduit de manière immédiate de celle que l'on a donnée dans le cas d'opérateurs bornés. La difficulté dans ce cas tient au fait que, sans information précise sur la forme du domaine des opérateurs h, h^* , on ne peut obtenir de bonne condition nécessaire de représentabilité sur la forme de l'opérateur h . Nous ne donnons donc que des conditions suffisantes très générales pour que l'on puisse définir une intégrale stochastique quantique coïncidant avec $\Gamma(h)$ ou $\lambda(h)$ sur son domaine.

Ces conditions peuvent évidemment servir dans le cas d'opérateurs bornés si par exemple on veut représenter des opérateurs $\Gamma(h), \lambda(h)$ sans hypothèse sur les adjoints.

Proposition 5.3.7 (Proposition 5.1 de [Pt3]) *Soit h un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ de domaine $Dom h$ et supposons qu'il existe deux fonctions $\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout u dans $Dom h$, presque tout s dans \mathbb{R}_+ ,*

$$hu(s) = \int_0^\infty \kappa(r, s) u(r) dr + u(s) f(s).$$

Considérons les conditions suivantes :

1. $t \mapsto \int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds$ est intégrable,
2. pour tout u de $Dom h$, $t \mapsto |u(t)| \sqrt{\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds}$ et $t \mapsto |f(t) - 1| |u(t)|$ sont intégrables,
3. pour tout u de $Dom h$, $\|\pi_t h \pi_t u\|$ est uniformément borné en t ,

alors

- Si les conditions 1. et 2. sont vérifiées, $\lambda(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique sur $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$
- Si les conditions 1., 2. et 3. sont vérifiées, alors $\Gamma(h)$ est représentable en intégrale stochastique quantique sur $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$.

Les expressions des coefficients des représentations intégrales sont données par (5.2.8) et (5.2.10).

Les ensembles $\mathcal{J}(Dom h)$ et $\mathcal{F}(Dom h)$ représentent respectivement le sous-espace engendré par Ω et les $j(g, f)$ avec g, f dans $Dom h$ et le sous-espace engendré par les $u_1 \circ \dots \circ u_n$ pour u_1, \dots, u_n dans $Dom h$.

Chapitre 6

Approximations d'EDS quantiques et création de bruits quantiques

Dans ce chapitre, nous décrivons l'application du calcul stochastique quantique à la construction de dilatations unitaires d'évolutions complètement positives. Nous étudions ces questions en temps discret et appliquons nos techniques de discrétisation et de passage à la limite pour décrire le comportement asymptotique des opérateurs d'évolution associés à une interaction répétée.

Dans la section 6.1 nous rappelons les définitions et résultats dont nous aurons besoin concernant les solutions d'équations différentielles stochastiques quantiques et la construction de dilatations unitaires.

Dans la section 6.2 nous établissons des résultats analogues dans le cas du temps discret et mettons en place le modèle général correspondant aux interactions répétées.

Dans la section 6.3 nous établissons les résultats de convergence que nous appliquerons à notre modèle physique ; ceux-ci s'expriment facilement dans le langage des équations différentielles. Nous les présentons donc sous cette forme puis les traduisons dans le langage qui permet de décrire le comportement asymptotique dans les interactions répétées.

Enfin, dans la section 6.4, nous établissons les résultats associés de convergence des semigroupes d'évolutions associés - résultats qui sont bien plus simples mais bien moins puissants que nos résultats précédents - puis les résultats de convergence des Hamiltoniens associés à ces interactions.

La plus grande partie de ce chapitre correspond à la publication [AP1] écrite en collaboration avec Stéphane Attal. Depuis la rédaction de cet article cependant nous avons remarqué que nos preuves s'étendaient sans aucune modification (mais parfois un peu de prudence) pour s'appliquer au cas où le "petit système" \mathcal{H}_0 est de dimension infinie et l'espace de Fock qui sert de réservoir est de multiplicité quelconque. Nous donnons tous les énoncés ici avec ces hypothèses plus générales

et soulignons à l'occasion le fait que les démonstrations de [AP1] restent valables.

6.1 Dilatations d'évolutions complètement positives et EDS quantiques

6.1.1 Evolutions complètement positives et théorème de Lindblad

Dans les énoncés que nous donnons ici, nous ne cherchons à donner ni des énoncés complets ni des hypothèses minimales : le but de cette sous-section est de fixer le cadre de travail de ce chapitre. Pour la motivation de l'étude de ces questions, on pourra consulter [Dav] ; pour les résultats les plus importants (en particulier 6.1.3, qui n'existait pas à la parution de ce dernier livre) on pourra se reporter à [Py2].

Supposons que nous nous intéressions à un système physique dont l'espace d'état est un espace de Hilbert \mathcal{H}_0 séparable, typiquement une particule qui a un certain nombre de niveaux d'énergie ; on appellera *petit système* indifféremment le système physique ou l'espace d'état \mathcal{H}_0 . On souhaite s'intéresser dans ce chapitre à des évolutions de ce système qui ne sont pas supposées conservatives ; physiquement, cela signifie que ce système dissipe de l'énergie.

Nous choisissons de travailler exclusivement dans l'interprétation de Heisenberg ; mathématiquement, la non conservativité de l'évolution signifie que l'évolution des observables $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ du système n'est pas de la forme $X \mapsto e^{-itH} X e^{itH}$. On ne peut cependant autoriser n'importe quels opérateurs pour traduire cette évolution. Suivant que l'on considère des évolutions à temps discret ou à temps continu, notons $(t_n)_{n \geq 0}$ ou $(T_t)_{t \geq 0}$ les opérateurs qui donnent la trajectoire d'une observable $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ du petit système :

$$X_n = t_n(X)$$

ou

$$X_t = T_t(X).$$

Si l'on suppose que le système est stationnaire, il est naturel de considérer que ces processus sont des semigroupes ; en outre, des arguments physiques (voir [Dav]) nous convainquent de faire l'hypothèse supplémentaire que chacun de ces opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ a la propriété d'être *complètement positif*. Définissons cette notion de complète positivité :

Définition 6.1.1 Soit T un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que T est n -positif si l'application $T^{(n)}$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n) \simeq \mathfrak{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$ définie par

$$T^{(n)}(X_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = (T(X_{i,j}))_{i,j=1,\dots,n}$$

est positive. L'opérateur T est dit complètement positif s'il est n -positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a un premier théorème fondamental, dans lequel, comme dans la suite, il est implicite que \mathcal{H}_0 est séparable.

Théorème 6.1.2 (Kraus) *Soit ℓ un opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, σ -faiblement continu et complètement positif. Il existe une suite d'opérateurs bornés $(V_i)_{i \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 telle que pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,*

$$\ell(X) = \sum_{i \geq 0} L_i^* X V_i$$

où la série est fortement convergente pour tout X .

Si \mathcal{H}_0 est de dimension finie alors on a le même résultat avec un nombre fini d'opérateurs V_0, \dots, V_N .

Par ailleurs, on sait, si l'on s'autorise des conditions analytiques confortables, caractériser entièrement les semigroupes d'évolution à temps continu qui nous intéressent :

Théorème 6.1.3 (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, σ -faiblement continus, complètement positifs et vérifiant $T_t(\text{Id}) = \text{Id}$ pour tout t . On suppose que $T_0 = \text{Id}$ et que $t \mapsto T_t$ est fortement continu si l'on munit $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ de la norme d'opérateurs.*

Alors il existe un opérateur autoadjoint borné H et une suite d'opérateurs bornés $(L_i)_{i \geq 0}$ de \mathcal{H}_0 tels que $(T_t)_{t \geq 0}$ se mette sous la forme

$$T_t = e^{t\mathcal{L}}$$

avec

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2} (2L_i^* X L_i - L_i^* L_i X - X L_i^* L_i)$$

où la série est fortement convergente pour tout X .

Encore une fois, si \mathcal{H}_0 est de dimension finie, le résultat est vrai avec un nombre fini d'opérateurs L_1, \dots, L_N .

On accepte de se restreindre aux évolutions ayant les conditions de régularité décrites dans ces deux théorèmes. Une évolution à temps continu du type qui nous intéresse est donc entièrement déterminée par l'équation

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}(X_t)$$

avec \mathcal{L} de la même forme que dans le théorème ci-dessus. Une telle équation est appelée *équation maîtresse* ; l'opérateur \mathcal{L} associé est appelé *Lindbladien*. En temps

discret le tableau se simplifie puisque un semigroupe $(t_n)_{n \geq 0}$ ayant toutes les propriétés que nous avons décrites est forcément de la forme

$$t_n = (t_1)^n$$

où t_1 est de la forme donnée dans le théorème de Kraus.

Une approche possible pour modéliser l'évolution dissipative d'un petit système est ainsi de se donner la forme du Lindbladien ou de l'opérateur t_1 . Une autre approche est de fermer le système, c'est à dire de le coupler à un "réservoir" \mathcal{H} et de voir l'évolution sur \mathcal{H}_0 comme la "trace" sur \mathcal{H}_0 d'une évolution unitaire sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. On détermine alors l'évolution du système en se donnant un Hamiltonien qui décrit l'évolution de l'ensemble du système.

Définissons ce qu'est une dilatation d'un semigroupe d'évolution. Pour cela, supposons fixé un vecteur de référence Ω de \mathcal{H} (lorsque nous prendrons \mathcal{H} égal à Φ ou $\mathbb{T}\Phi$ ce sera évidemment le vecteur vide), et notons \mathbb{E}_0 l'opérateur de trace partielle qui à un opérateur X sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ associe un opérateur sur \mathcal{H}_0 par

$$\langle a, \mathbb{E}_0(X)b \rangle = \langle a \otimes \Omega, X b \otimes \Omega \rangle.$$

Alors on appellera dilatation sur \mathcal{H} d'un semigroupe $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de \mathcal{H}_0 la donnée d'un processus $(U_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ tels que pour tout t , tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ on ait

$$T_t(X) = \mathbb{E}_0(U_t^*(X \otimes \text{Id})U_t),$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif pour tout t :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{T_t} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \\ \cdot \otimes \text{Id} \downarrow & & \uparrow \mathbb{E}_0 \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}) & \xrightarrow{U_t^* \cdot U_t} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}) \end{array} \quad (6.1.1)$$

La définition de la dilatation d'une évolution à temps discret se déduit de manière immédiate de celle-ci.

6.1.2 Equations différentielles stochastiques quantiques

Un lien entre l'approche Lindbladienne et l'approche Hamiltonienne peut être établi grâce au calcul stochastique quantique ; partant d'une évolution définie par un Lindbladien sur \mathcal{H}_0 on peut en effet construire sur un espace de Fock des dilata-tions de cette évolution. Cette construction était l'objectif de l'article fondateur de Hudson et Parthasarathy [H-P]. Notons au passage que l'espace \mathcal{H}_0 que nous appe-lons petit système est appelé de manière plus classique en probabilités quantiques *espace initial*.

Ces dilatations sont caractérisées par une *équation différentielle stochastique quantique* (EDS quantique ou encore EDSQ) associée. Les résultats que nous allons donner présentent un intérêt en ce qui concerne de telles équations indépendamment des questions de dilatations ; par ailleurs, ils s'exprimeront de manière plus cohérente avec le reste de cette thèse en termes d'équations différentielles. Nous définissons donc ce que nous entendons par une solution d'EDSQ ; on considère un espace de multiplicité \mathcal{K} , espace de Hilbert séparable dont une base hilbertienne $(e_i)_{i \in \Lambda}$ est fixée ; comme en 1.4 on suppose que l'indice 0 n'appartient pas à Λ . Si l'on se donne de plus une famille $L^{i,j}$, $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$ d'opérateurs (bornés) sur \mathcal{H}_0 , on dit qu'un processus d'opérateurs $(U_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation

$$dU_t = \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da_t^{i,j} \quad (6.1.2)$$

sur un domaine \mathcal{D} si pour tout f de \mathcal{D} , tout t de \mathbb{R}_+ , l'équation

$$U_t f = U_0 f + \int_0^t \sum_{i,j} L^{i,j} U_s da^{i,j}(s)$$

a un sens et est vérifiée.

Notons qu'ici est dans la suite nous notons $L^{i,j}$ et pas $L^{\kappa,\lambda}$ les opérateurs considérés (de même pour les bruits), cela afin de rester plus proche des notations utilisées dans [AP1] où la multiplicité finie rend naturels les indices i, j .

Le théorème suivant est une version très simplifiée d'un résultat démontré dans [Py2], Proposition 27.5 ; il remplace, en multiplicité infinie, le Théorème 8 de [AP1].

Théorème 6.1.4 *Soit \mathcal{H}_0 un espace de Hilbert séparable, et soit $(L^{i,j})_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ une famille d'opérateurs bornés telle que*

$$\sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty.$$

Alors il existe un unique processus d'opérateurs $(U_t)_{t \geq 0}$ qui est solution de l'équation (6.1.2) sur le domaine exponentiel.

Ceci montre en particulier que l'on a une solution dès que \mathcal{H}_0 est de dimension finie.

Le cas qui nous intéressera plus particulièrement est celui dans lequel la solution de l'équation (6.1.2) est constituée d'opérateurs unitaires. Ce cas est entièrement caractérisé en terme de la forme des opérateurs $L^{i,j}$ par le Théorème 6.1.5 ci-dessous (voir Corollaire 26.4 de [Py2]). Nous énonçons par ailleurs dans ce même théorème le résultat de Hudson et Parthasarathy donnant des dilatations de toute évolution complètement positive.

Théorème 6.1.5 ([H-P]) Soit \mathcal{H}_0 un espace de Hilbert séparable. S'il existe sur \mathcal{H}_0 un opérateur autoadjoint borné H , des opérateurs bornés $S^{i,j}$, $i, j \in \Lambda$ tels que la matrice $(S^{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ soit unitaire et des opérateurs L_i , $i \in \Lambda$ tels que pour tous $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$:

$$\begin{cases} L^{0,0} = -(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) \\ L^{i,0} = L_i \\ L^{i,0} = -\sum_k L_k^* S^{k,j} \\ L^{i,j} = S^{i,j} - \delta_{ij} I, \end{cases}$$

alors l'équation (6.1.2) admet une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ constituée d'opérateurs unitaires.

Dans ce cas on a pour tous a, b de \mathcal{H}_0 ,

$$\langle a \otimes \Omega, U_t b \otimes \Omega \rangle = \langle a, e^{t(iH + \frac{1}{2} \sum L_i^* L_i)} b \rangle$$

et pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,

$$\langle a \otimes \Omega, U_t^*(X \otimes Id) U_t b \otimes \Omega \rangle = \langle a, e^{t\mathcal{L}} b \rangle$$

où \mathcal{L} est donné par le Théorème 6.1.3 où les L_i , sont donnés par les formules ci-dessus.

Soulignons le fait que ces résultats assurent en particulier que toutes les séries d'opérateurs considérées sont fortement sommables.

Ce théorème définit donc une dilatation de l'évolution $T_t = e^{t\mathcal{L}}$ sur un espace de Fock $\Phi(\mathcal{K})$. Cela montre qu'une évolution complètement positive peut être définie suivant une troisième approche : on peut se donner l'équation

$$dU_t = \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da_t^{i,j}$$

que l'on voit comme une équation de Schrödinger perturbée par des termes aléatoires $L^{i,j} U_t da^{i,j}(t)$; l'espace Φ est encore vu comme un réservoir ou un environnement auquel est couplé le petit système \mathcal{H}_0 . Une telle équation considérée du point de vue physique est appelée *équation de Langevin quantique*. D'un point de vue plus mathématique et lorsque les coefficients $L^{i,j}$ vérifient les conditions du Théorème 6.1.5 qui font de la solution un processus unitaire, l'équation différentielle est appelée *équation de Hudson-Parthasarathy*.

La modélisation d'une évolution par une équation de Langevin a toujours été considérée comme un modèle pratique mais sans véritable sens physique ; les résultats que nous allons énoncer dans la suite montrent que l'on obtient rigoureusement une telle description à partir d'une évolution Hamiltonienne.

6.2 Dilatations en temps discret et interactions répétées

6.2.1 Interactions répétées

Nous considérons toujours notre petit système \mathcal{H}_0 , et supposons maintenant que l'on veut faire interagir de manière répétée ce petit système avec un autre système \mathfrak{h} . On suppose que cette interaction se fait de manière particulière : on commence par coupler les deux systèmes pour un temps δ pendant lequel ils interagissent typiquement suivant une évolution Hamiltonienne puis on les découple ensuite et couple à nouveau le même système \mathcal{H}_0 (modifié par la première interaction) avec une copie encore vierge de \mathfrak{h} , à nouveau pour un temps δ , et ainsi de suite.

Cela correspond à de nombreuses situations : par exemple, à l'excitation d'un laser où l'on introduit à des intervalles réguliers des photons identiques dans une cavité (voir à ce sujet [F-R]); à des phénomènes de mesures répétées où l'on applique au petit système un instrument de mesure "rafraîchi" après chaque utilisation. Plus généralement cela peut correspondre à toute situation si l'on suppose que les temps caractéristiques de \mathcal{H}_0 et de \mathfrak{h} sont suffisamment différents pour que l'on considère que la perturbation sur \mathfrak{h} disparaît après un temps très faible; cette remarque prendra tout son sens lorsque l'on constatera qu'apparaît naturellement dans notre modèle la limite de couplage faible.

Pour modéliser cette situation, on considère l'espace

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$$

et pour plus de clarté on indexe en $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots$ les copies de \mathfrak{h} . Puisque l'on répète le même couplage, l'évolution sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}$ durant un intervalle de temps δ est donnée par un opérateur $\mathbb{L}(\delta)$ sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}$; lors de la première interaction \mathbb{L} agit sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_1$, lors de la deuxième sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_2$, etc. On considère donc des amplifications $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots$ de \mathbb{L} , où chaque \mathbb{L}_i est défini sur le produit $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2 \otimes \dots$ comme \mathbb{L} sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}_i$ et comme l'identité sur les autres facteurs \mathfrak{h}_i .

L'évolution globale est alors donnée par

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n$$

où chaque u_n est un opérateur sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$, et $u_0 = \text{Id}$.

L'espace $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots$ est un espace de Fock à temps discret comme nous les avons construits dans la section 1.4.2. Il faut prendre garde cependant que ce n'est pas l'espace de Fock de multiplicité \mathfrak{h} (ce dernier serait le produit tensoriel des $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}$). Nous considérons donc une base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}}$ de \mathfrak{h} qui est indexée par $\Lambda \cup \{0\}$, ce qui signifie que nous particularisons une dimension de \mathfrak{h} . Nous reviendrons là-dessus plus loin.

Nous travaillerons dorénavant sur l'espace $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$, étant implicite que l'espace de Fock considéré est en fait $l^2(\mathcal{P}_\Lambda)$ comme dans la section 1.4.2. Nous considérerons des opérateurs \mathbb{L} qui peuvent s'écrire comme une matrice $(\mathbb{L}^{i,j})_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ à coefficients dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ grâce à l'isomorphisme $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{h}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

Les idées développées ici ont été inspirées par [KM2].

6.2.2 Dilatations en temps discret

Nous allons montrer ici que, de même que l'on peut dilater une évolution complètement positive à temps continu sur un espace de Fock à temps continu, on peut dilater une évolution à temps discret sur un espace de Fock à temps discret.

Proposition 6.2.1 (Théorème 2 de [AP1]) *Soit $(\ell^n)_{n \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs complètement positifs, σ -faiblement continus, sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Il existe alors une matrice unitaire $\mathbb{L} = (\mathbb{L}^{i,j})_{i,j \geq 0}$ à coefficients dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ telle que la solution de l'équation*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \mathbb{L}_{n+1} u_n \\ u_0 &= Id \end{cases} \quad (6.2.1)$$

sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$ vérifie pour tout X de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, tous a, b dans \mathcal{H}_0 , tout n de \mathbb{N}

$$\langle a, \ell^n(X)b \rangle = \langle a \otimes \Omega, u_n^*(X \otimes Id) u_n b \otimes \Omega \rangle.$$

La preuve présentée dans [AP1] n'utilise en fait qu'un procédé de complètement de famille orthonormale en base orthonormale, qui reste parfaitement licite lorsque \mathcal{H}_0 est de dimension infinie.

Puisque nous allons de toute façon considérer une réalisation de $\mathbb{T}\Phi$ comme sous-espace de Φ et qu'alors les vecteurs vide de l'un et de l'autre sont les mêmes, nous pouvons adopter une notation unique pour l'opérateur de trace partielle \mathbb{E}_0 . La proposition précédente signifie alors que, pour tout n

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{\ell_n} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \\ \cdot \otimes Id \downarrow & & \uparrow \mathbb{E}_0 \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi) & \xrightarrow{u_n^* \cdot u_n} & \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi) \end{array}$$

donne une dilatation de $(\ell_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$.

Remarques

- L'équation 6.2.1 ci-dessus peut s'interpréter comme une équation aux différences

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} (\mathbb{L}^{i,j} + \delta_{ij} Id) u_n a_n^{i,j}$$

en prenant $\Lambda = \mathbb{N}^*$, à la condition *a priori* étrange de considérer que $a^{0,0}$ n'est plus l'identité mais l'opérateur qui s'exprime par

$$\begin{aligned} a^{0,0}\Omega &= \Omega \\ a^{0,0}X^\lambda &= 0 \text{ pour } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

avec les notations du chapitre 1. Cela est simplement dû au rôle particulier que joue l'opérateur $a^{0,0}$ tel que nous l'avons défini : nous avons choisi les $a^{i,j}$ comme décrivant la base canonique de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{\Lambda \cup \{0\}})$, à l'exception de $a^{0,0}$, qui est l'identité.

- Notre choix d'utiliser des indices dans $\{0\} \cup \Lambda$ n'est évidemment pas innocent : l'indice zéro va jouer un rôle différent des autres. Physiquement il représente un état de référence de l'extérieur, de sorte que, dans la matrice \mathbb{L} , l'opérateur $\mathbb{L}^{0,0}$ correspond à une évolution propre du petit système, les $\mathbb{L}^{i,j}$, $i, j \neq 0$ à une évolution propre du système \mathfrak{h} et les termes $\mathbb{L}^{i,0}$ ou $\mathbb{L}^{0,j}$ à des termes d'interaction.

6.3 Résultats de convergence

Nous avons dit ci-dessus qu'une équation d'évolution du type (6.2.1) peut être vue à peu de choses près comme une équation stochastique quantique aux différences. Dans l'article [AP1] toutes les preuves sont faites sans mentionner une telle interprétation ; il semble naturel dans cette thèse de présenter nos résultats sous cette forme, d'autant plus que les formes que nous pouvons ainsi en donner sont plus puissantes que celles qui sont présentés dans l'article [AP1]. La différence tient en ceci, que nous considérons dans la section 6.3.1 des perturbations des coefficients de l'EDS qui dépendent du temps, ce qui n'a pas de sens dans notre interprétation physique.

6.3.1 Convergence de solutions d'équations différentielles stochastiques quantiques

Soit \mathcal{K} un espace de multiplicité, de base hilbertienne $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ comme dans la section 1.4 ; l'ensemble Λ est au plus dénombrable et comme précédemment nous supposons qu'il ne contient pas l'indice zéro.

Considérons une EDS du type (6.1.2) sur $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$, que nous notons Ec pour la durée de cette sous-section :

$$\begin{cases} dU_t &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} L^{i,j} U_t da_t^{i,j} \\ U_0 &= \text{Id.} \end{cases} \quad (\text{Ec})$$

Nous serons toujours dans des cas où le Théorème 6.1.4 nous assure que cette équation a une solution.

Notons par ailleurs Ed l'équation aux différences analogue

$$\begin{cases} v_{n+1} - v_n &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \delta^{\epsilon_{i,j}} L^{i,j} v_n a_n^{i,j} \\ v_0 &= \text{Id} \end{cases} \quad (\text{Ed})$$

où

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\delta_{i,0} + \delta_{0,j})$$

donne simplement la normalisation correspondant à $a^{i,j}$ dans nos approximations ($\epsilon_{i,j}$ vaut 1 pour $i = j = 0$, $1/2$ si seul l'un des deux coefficients vaut zéro, est nul sinon).

Notons enfin Edp une version perturbée de cette équation

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n &= \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} h^{\epsilon_{i,j}} (L^{i,j} + \omega_n^{i,j}) u_n a_n^{i,j} \\ u_0 &= \text{Id}, \end{cases} \quad (\text{Edp})$$

que l'on suppose entrer encore dans le cadre du Théorème 6.1.4. Il est facile de voir que les équations (Ed) et (Edp) ont toujours une solution $(u_n)_{n \geq 0}$ en processus prévisible d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi$: il suffit pour cela de remarquer que pour tout n , $\sum_{i,j} h^{\epsilon_{i,j}} L^{i,j} a_n^{i,j}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{n\}}$. Par ailleurs, une solution de (Ed) sur le domaine exponentiel est fournie par le Théorème 6.1.4.

On considère comme dans les chapitres précédents $\mathbb{T}\Phi$ comme étant un sous-espace de Φ associé à une subdivision $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ de \mathbb{R}_+ . Nous énonçons ce qui suit dans le cas où \mathcal{S} est régulière de pas δ mais les mêmes résultats sont vrais en remplaçant partout δ par le pas de la subdivision, $[t/\delta]$ par "le plus grand k tel que t_k est inférieur à t ", etc. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 6.3.1 *Considérons une équation (Ec) avec $\sum_{i,j} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$ et supposons que cette équation admette une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ faite d'opérateurs bornés tel que $t \mapsto \|U_t\|$ soit essentiellement bornée sur tout compact de \mathbb{R}_+ . Alors si les opérateurs $\omega_k^{i,j}$ vérifient pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,*

$$\sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|\omega_k^{i,j}\|^2 \text{ tend vers zéro lorsque } \delta \text{ tend vers zéro}$$

alors, pour tous ϕ, ψ de $L^\infty([0, t])$, la solution $(v_n)_{n \geq 0}$ de (Edp) vérifie

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

De plus, la convergence est uniforme pour a, b dans une boule bornée de \mathcal{H}_0 , uniforme pour t dans un compact de \mathbb{R}_+ . En particulier, la solution $(v_n)_{n \geq 0}$ de (Ed) converge en ce sens vers $(U_t)_{t \geq 0}$.

Les crochets $[\cdot]$ représentent bien sûr la partie entière.

Démonstration.

La preuve de ce théorème est strictement équivalente à la preuve du Théorème 9 de [AP1]; la seule différence réside dans le fait que dans [AP1], $a^{0,0}$ n'est pas l'identité. Pour anticiper sur la preuve que nous allons ébaucher, cela implique que les projections d'intégrales par rapport au temps donnent des termes en $a^{i,i}$ pour tout i et il s'agit de faire disparaître au cours de la preuve ceux qui correspondent à $i \neq 0$, ce que l'on peut faire en les incorporant aux termes perturbatifs $\omega^{i,i}$ grâce aux différences de normalisations. Notons par ailleurs que la preuve dans [AP1] considère des opérateurs $\omega^{i,j}$ indépendants de k , mais cela ne fait aucune différence.

Notons par ailleurs que les définitions des opérateurs $a_k^{i,j}$ de [AP1] sont légèrement différentes des nôtres : notre $a_k^{i,j}$ est le $a_{k+1}^{i,j}$ de [AP1].

La preuve se fait en plusieurs étapes, que nous allons détailler ; les références que nous donnons renvoient toutes à [AP1]. Tout d'abord on considère le processus $(w_n)_{n \geq 0}$ donné par $w_n = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_n} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$. On montre facilement (Lemme 11) que ce processus tend vers $(U_t)_{t \geq 0}$ au sens de l'énoncé.

Nous en sommes donc ramenés à montrer la convergence vers zéro de $u_n - w_n$ et commençons par montrer celle de $v_n - w_n$. Nous utilisons alors nos résultats décrivant les projections d'intégrales : le Théorème 7 de [AP1] est en fait une combinaison de la Proposition 4.2.5 et du Lemme 4.3.1 de cette thèse. Ces résultats nous permettent d'obtenir une expression de $v_n - w_n$ (équation (6)); dans cette expression apparaissent des termes de la forme $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}(1/\delta) \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_s ds \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ ou analogues. On peut remplacer ces termes par des $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = w_k$ à un terme d'erreur près que l'on peut évaluer.

Dans ces estimations comme dans d'autres il faut être plus prudent dans le cas où l'on suppose l'espace de Fock de multiplicité infinie, autrement dit dans le cas où il y a une infinité de couples (i, j) . Dans le cas de [AP1] il suffit d'avoir une estimation pour chaque (i, j) ; dans notre cas c'est l'hypothèse $\sum_{i,j} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$ et les hypothèses du même type sur la convergence des $\mathbb{L}^{i,j}$ qui nous permet de conclure.

Nous obtenons ainsi la relation (7) :

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}}(v_n - w_n) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \\ &= \sum_{k < n} \left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\tilde{\phi}) F_k(v_k - w_k) b \otimes \mathcal{E}(\tilde{\psi}) \rangle \right| + o(1) \end{aligned}$$

pour une certaine famille (explicite) d'opérateurs F_k , où le terme en $o(1)$ tend vers zéro avec δ de manière suffisamment uniforme par rapport aux paramètres du problème. On observe alors que si les opérateurs $L^{i,j}$ sont tous supposés contractifs,

alors

$$\begin{aligned} & \sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n)(w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \\ & \leq hC \sum_{k < n} \sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k)(w_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| + o(1). \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons, modulo un changement de constante C , faire cette hypothèse de contractivité. Par un argument du type Gronwall discret, on arrive alors à la conclusion que

$$\sup_{a,b \leq 1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n)(w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \leq (1 + C\delta)^n \times o(1).$$

Puisque $n\delta$ est borné par t , on en conclut que $w_n - v_n$ tend vers zéro au sens désiré.

On peut alors, en utilisant cette dernière estimation des termes $w_k - v_k$ et les hypothèses sur les opérateurs perturbatifs $\omega_k^{i,j}$, obtenir une bonne estimation de $w_n - v_n$ et appliquer à nouveau un argument du type Gronwall. \square

Remarque

On voit immédiatement, en suivant la preuve du Théorème 9 de [AP1], que si nous avons fait sur les fonctions ϕ, ψ de $L^2(\mathbb{R}_+)$ l'hypothèse supplémentaire que

$$\|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(\phi)\|, \quad \|\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\psi)\|$$

admettent une majoration de la forme $c\sqrt{\delta}$, alors nous aurions eu une estimation de la vitesse de convergence en $\sqrt{\delta}$: plus précisément nous aurions obtenu que pour tout T , presque tout t dans $[0, T]$:

$$\left| \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_S u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_S b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \leq \|a\| \|b\| C \sqrt{\delta} \quad (6.3.1)$$

pour une certaine constante C qui, encore une fois, ne dépend que des normes L^2 et L^∞ de ϕ, ψ , du coefficient c ci-dessus et des normes d'opérateurs des $L^{i,j}$ et des U_t .

La convergence obtenue peut être améliorée dans le cas où l'équation (Ec) est une équation Hudson-Parthasarathy, c'est-à-dire que les coefficients $L^{i,j}$ sont du type décrit dans le Théorème 6.1.5, ceci grâce à la proposition suivante, dont le premier résultat répond à une question qui sera naturelle dans l'interprétation physique : quand sait-on que les solutions $(u_n)_{n \geq 0}$ sont constituées d'opérateurs inversibles ?

Proposition 6.3.2 *Supposons que l'équation (Ec) considérée soit du type Hudson-Parthasarathy. Alors, avec les hypothèses sur les termes $(\omega_k^{i,j})_{i,j,k}$ du Théorème*

6.3.1, la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ d'une équation (Edp) associée est constituée d'opérateurs inversibles.

Si de plus pour presque tout t , les perturbations $(\omega_k^{i,j})$ vérifient

$$(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i,j \in \Lambda} \|\omega_k^{i,j}\|^2 \quad \text{est d'ordre } \delta^2 \text{ pour tous } i, j \geq 1, \\ \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{i \in \Lambda} \|\omega_k^{i,0}\| \quad \text{est d'ordre } \delta^{1/2} \\ \sup_{k|t_k \leq t} \sum_{j \in \Lambda} \|\omega_k^{0,j}\| \quad \text{est d'ordre } \delta^{1/2} \\ \sup_{k|t_k \leq t} \|\omega_k^{0,0}\| \quad \text{tend vers zéro avec } \delta \end{array} \right.$$

alors le processus $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une borne uniforme.

Démonstration.

Ceci s'obtient simplement en écrivant l'équation (Edp) sous forme matricielle : on a $u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$ avec

$$(\mathbb{L}_n)_{i,j} = \delta^{\varepsilon_{i,j}} (L^{i,j} + \omega_n^{i,j}) + \delta_{i,j} \text{Id} + \delta \hat{\delta}_{i,j} (L^{0,0} + \omega^{0,0}),$$

où $\hat{\delta}_{i,j}$ est le delta d'Evans qui vaut 1 si $i = j$ sont différents de 0, qui vaut zéro sinon. Ceci est analogue à la présentation que nous avons faite dans la section 6.2.1, à ceci près que les coefficients dépendent maintenant du temps.

On calcule alors $\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n - \text{Id}$ et $\mathbb{L}_n \mathbb{L}_n^* - \text{Id}$; grâce à la forme particulière des coefficients $L^{i,j}$, de nombreux termes s'annulent. Avec les hypothèses les plus faibles de l'énoncé, on trouve que pour δ assez petit, ces deux opérateurs sont de norme strictement inférieure à 1 et ce pour tout n , de sorte que $\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_n \mathbb{L}_n^*$, et donc \mathbb{L}_n , sont inversibles.

Avec les hypothèses supplémentaires, on obtient

$$\|\mathbb{L}_n^* \mathbb{L}_n - I\| \leq C\delta$$

pour une certaine constante C , de sorte que

$$\|\mathbb{L}_n\| \leq \sqrt{1 + C\delta}$$

et que la composition $\mathbb{L}_n \dots \mathbb{L}_1$ est un opérateur uniformément borné en n .

□

Ceci permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 6.3.3 *Supposons que l'équation (Ec) soit du type Hudson-Parthasarathy. Alors si les opérateurs $(\omega_k^{i,j})_{i,j,k}$ vérifient les conditions (ω) , la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ est telle que pour presque tout t de \mathbb{R}_+ ,*

$$u_{[t/\delta]} \text{ tend faiblement vers } U_t.$$

Démonstration.

Ceci se prouve à partir du Théorème 6.3.1 ; la Proposition 6.3.2 permet d'appliquer un argument du type “ $\epsilon/3$ ”.

□

6.3.2 Application aux problèmes d'évolution

Nous allons maintenant traduire les résultats énoncés ci-dessus en termes d'évolutions répétées modélisées par une équation

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n, \quad (6.2.1)$$

où \mathbb{L}_n est l'amplification décrite dans la section 6.2.1 d'une matrice \mathbb{L} indépendante de n mais dépendant de δ , que, contrairement au cas de la section 6.2, on ne suppose pas unitaire. On a le théorème suivant :

Théorème 6.3.4 (Théorème 9 de [AP1]) *Supposons qu'il existe des opérateurs bornés $L^{i,j}$, $i, j \in \Lambda \cup \{0\}$ sur \mathcal{H}_0 tels que $\sum_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}} \|L^{i,j}\|^2 < +\infty$ et*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i,j \in \{0\} \cup \Lambda} \left\| \frac{\mathbb{L}^{i,j}(\delta) - \delta_{ij} I}{\delta^{\epsilon_{ij}}} - L^{i,j} \right\|^2 = 0.$$

Supposons que l'équation

$$\begin{cases} dU_t &= \sum_{i,j} L^{i,j} U_t da^{i,j}(t) \\ U_0 &= Id \end{cases}$$

admette une solution $(U_t)_{t \geq 0}$ en opérateurs bornés telle que $t \mapsto \|U_t\|$ soit essentiellement bornée sur tout compact.

Alors pour presque tout t , pour tous ϕ, ψ dans $L^\infty([0, t])$, on a la convergence suivante :

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[t/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi) U_t b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

De plus, la convergence est uniforme pour a, b dans toute boule bornée de \mathcal{H}_0 , uniforme pour tout t dans un compact de \mathbb{R}_+ .

Remarques

- C'est ici que l'on fait apparaître la particularité de l'indice zéro : on voit que la normalisation dans les hypothèses de convergence des termes $\mathbb{L}^{0,0}$ diffère des normalisations de $\mathbb{L}^{0,j}$ ou $\mathbb{L}^{i,0}$, qui diffèrent encore des normalisations de $\mathbb{L}^{i,j}$

pour $i, j \neq 0$. On a dit que le coefficient $\mathbb{L}^{0,0}$ correspond à l'évolution du petit système \mathcal{H}_0 lui-même, et que les $\mathbb{L}^{i,0}$, $\mathbb{L}^{0,j}$ correspondent à l'interaction entre le petit système et l'environnement : on voit donc que l'on a des conditions de normalisation différentes sur le petit système et sur l'environnement.

- Les hypothèses de convergence du Théorème 6.3.4 peuvent sembler artificielles ; nous verrons après le Théorème 6.4.1 ci-dessous qu'elles sont en fait assez naturelles si l'on veut que la matrice \mathbb{L} donne lieu à des comportements asymptotiques non triviaux.

Le Théorème 6.3.3 mène à un résultat équivalent dans ce cadre :

Théorème 6.3.5 (Théorème 13 de [AP1]) *Supposons que la famille de matrices $\mathbb{L}(\delta)$ soit de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^{0,0}(\delta) = I - \delta(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) + \delta \omega^{0,0}(\delta) \\ \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = \sqrt{\delta} L_i + \delta \omega^{i,0}(\delta) \\ \mathbb{L}^{0,j}(\delta) = -\sqrt{\delta} \sum_k L_k^* S^{k,j} + \delta \omega^{0,j}(\delta) \\ \mathbb{L}^{i,j}(\delta) = I + S^{i,j} - \delta_{ij} I + \delta \omega^{i,j}(\delta) \end{array} \right.$$

où

- H est un opérateur autoadjoint borné,
- les opérateurs $S^{i,j}$, $i, j \in \Lambda$, sont bornés et tels que la matrice $(S^{i,j})_{i,j}$ soit unitaire et
- les opérateurs L_i , $i \in \Lambda$ sont bornés quelconques,

et où $\sum_{i,j} \|\omega^{i,j}(\delta)\|^2$ est uniformément borné avec de plus $\|\omega^{0,0}(\delta)\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Alors la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de (6.2.1) est faite d'opérateurs bornés avec une borne localement uniforme et pour presque tout t , $u_{\lfloor t/\delta \rfloor}$ tend faiblement vers U_t lorsque δ tend vers zéro.

Remarque

Notons que les hypothèses de ce théorème sont en particulier vérifiées si l'on suppose que les opérateurs $\mathbb{L}(\delta)$ sont tous unitaires et que les coefficients $\mathbb{L}^{i,j}(\delta)$ vérifient les conditions de convergence du Théorème 6.3.4.

Exemple

Maassen considère une évolution à temps discret donnée par la matrice

$$\mathbb{L}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\delta} & 0 & 0 & -\sin \sqrt{\delta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \sqrt{\delta} & 0 & 0 & \cos \sqrt{\delta} \end{pmatrix}. \quad (6.3.2)$$

Cette matrice est elle-même unitaire, de sorte que le Théorème 6.3.5 ne nous apprend rien de plus que le Théorème 6.3.4. On sait ainsi que la suite d'opérateurs $(u_n)_{n \geq 0}$ associée est telle que, pour presque tout t de \mathbb{R}_+ , $u_{[t/\delta]}$ converge faiblement vers \bar{U}_t lorsque δ tend vers zéro, où $(U_t)_{t \geq 0}$ est la solution de

$$dU_t = -\frac{1}{2}U_t dt + VU_t da^{0,1}(t) - V^*U_t da^{1,0}(t)$$

avec $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette évolution décrit le retour spontané à l'état fondamental dans le modèle de Wigner-Weisskopf de l'atome à deux niveaux à la température zéro. Pour l'exploitation de cette équation dans le but d'en tirer des informations sur l'évolution du réservoir on pourra consulter [M-R].

6.3.3 Evolution Hamiltonienne et limite de couplage faible

La dynamique que nous considérons est dictée par l'opérateur \mathbb{L} qui détermine l'interaction entre le petit système \mathcal{H}_0 et une copie de l'espace \mathfrak{h} ; typiquement, un Hamiltonien H est associé à cette interaction, de sorte que \mathbb{L} est alors de la forme $e^{i\delta H}$.

Observons ce que cela signifie sur l'exemple de Maassen cité ci-dessus : si l'on essaie de mettre la matrice (6.3.2) sous la forme $e^{i\delta H}$, on voit qu'une solution en H est

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i/\sqrt{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i/\sqrt{\delta} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.3)$$

Cet Hamiltonien s'écrit encore $H = -\frac{i}{\sqrt{\delta}}a^- \otimes a^+ + \frac{i}{\sqrt{\delta}}a^+ \otimes a^-$.

Avec l'hypothèse minimale que δH tend vers zéro en norme lorsque δ tend vers zéro, la solution est unique, de sorte qu'il n'est pas possible d'avoir un Hamiltonien indépendant de δ et que H est la matrice ci-dessus.

De manière plus générale, supposons que l'on considère un quelconque opérateur \mathbb{L} sur $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ dont on suppose qu'il peut s'écrire e^{ihH} , où H est une matrice symétrique $(N+1) \times (N+1)$ dont les coefficients sont des opérateurs sur \mathcal{H}_0 .

Parmi les divers coefficients de H , on peut voir l'opérateur $H^{0,0}$ comme traduisant l'évolution propre du petit système, les coefficients qui apparaissent sur les "colonnes" restantes, $(H^{i,0})_{i=1,\dots,N}$ et sa transposée, représentant l'interaction entre le petit système et son environnement; l'interprétation du bloc $(H^{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ comme l'évolution propre de l'environnement est moins naturelle en général.

Pour que la matrice \mathbb{L} associée à H donne une interaction non triviale à la limite (autrement dit, des coefficients $L^{i,0}$, $i = 1, \dots, N$ non tous nuls), il est clair que l'Hamiltonien doit dépendre de δ . Il semble de plus qu'il soit nécessaire que les coefficients $H^{i,0}$ soient d'ordre $1/\sqrt{\delta}$ et les coefficients $H^{i,j}$ d'ordre $1/\delta$. Autrement dit, un coefficient de couplage λ semble apparaître devant les termes d'interaction, tel que $\lambda^2\delta$ soit d'ordre un; c'est la normalisation qui est utilisée dans la fameuse *limite de couplage faible*, qui apparaît ici naturellement.

6.4 Convergence des Lindbladiens et Hamiltoniens

6.4.1 Evolutions associées sur \mathcal{H}_0

Si l'on ne s'intéresse qu'à l'effet de l'interaction sur le petit système \mathcal{H}_0 , il est beaucoup plus facile d'obtenir des résultats de convergence. Parthasarathy remarque déjà dans son livre qu'à toute évolution complètement positive $T_t = e^{t\mathcal{L}}$ on peut associer une suite d'unitaires $(u_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 telle que l'évolution $n \mapsto \mathbb{E}_0(u_n^*(X \otimes \text{Id})u_n)$ associée converge en norme d'opérateur sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ vers T_t (voir Exercices 29.12 et 29.13 de [Py2]).

Rappelons d'abord que, de la même manière que dans notre Proposition 6.2.1, la solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n \\ u_0 = \text{Id} \end{cases}$$

engendre la dynamique suivante : pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,

$$\mathbb{E}_0(u_n^*(X \otimes \text{Id})u_n) = \ell^n(X)$$

avec

$$\ell(X) = \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} X \mathbb{L}^{i,0}.$$

La facilité avec laquelle on prouve le résultat suivant contraste avec la preuve de notre résultat 6.3.1 :

Théorème 6.4.1 (Théorème 14 de [AP1]) *Soit $\mathbb{L}(\delta) = (\mathbb{L}^{i,j}(\delta))_{i,j \in \Lambda \cup \{0\}}$ une famille de matrices telles que*

$$\sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = I$$

et que les coefficients convergent au sens suivant :

- $(\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - I)/\delta$ converge en norme d'opérateur vers $L^{0,0}$,
- $\sum_{i \in \Lambda} \left\| \mathbb{L}^{i,0}(\delta)/\sqrt{\delta} - L^{i,0} \right\|^2$ tend vers zéro .

Alors il existe un opérateur autoadjoint H dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ tel que, pour tout t de \mathbb{R}_+ ,

$$\ell^{[t/h]} \longrightarrow e^{t\mathcal{L}}$$

en norme d'opérateur, avec

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \left(2L^{i,0*} X L^{i,0} - L^{i,0*} L^{i,0} X - X L^{i,0*} L^{i,0} \right).$$

Démonstration.

La preuve est simple mais il est instructif d'observer d'où proviennent l'opérateur H et la différence de forme entre le Lindbladien \mathcal{L} et l'opérateur ℓ sous "forme de Kraus".

On écrit un développement limité au premier ordre de la relation

$$\ell(\text{Id}) = \text{Id};$$

on obtient immédiatement par identification des coefficients la relation

$$(L^{0,0*} + L^{0,0}) + \sum_{i \in \{0\} \cup \Lambda} L^{i,0*} L^{i,0} = 0$$

qui montre que

$$i \left(L^{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \{0\} \cup \Lambda} L^{i,0*} L^{i,0} \right)$$

est autoadjoint ; on le note donc H . Il suffit ensuite de remarquer que le développement limité de ℓ prend la forme suivante :

$$\ell(X) = X + h \left(i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} (2L^{i,0*} X L^{i,0} - L^{i,0*} L^{i,0} X - X L^{i,0*} L^{i,0} X) \right) + o(h\|X\|),$$

ce qui permet de conclure. □

Les calculs associés permettent par ailleurs de montrer que les conditions de convergence qui apparaissent dans ce résultat ainsi que dans nos Théorèmes 6.3.4 et 6.3.5 ne sont pas que des hypothèses artificiellement choisies pour nous permettre de conclure mais sont au contraire naturelles.

Commençons par une petite digression concernant la dynamique induite par $(u_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{H}_0 . De même qu'en temps continu (voir le Théorème 6.1.5), la solution

de l'équation (6.2.1) a la propriété que $(\mathbb{E}_0 u_n)_{n \geq 0}$ est un semigroupe $(\tau_n)_{n \geq 0}$; on a ainsi pour tout n

$$\mathbb{E}_0(u_n) = \tau_1^n$$

avec

$$\tau_1 = \mathbb{L}^{0,0}.$$

Si l'on fait l'hypothèse que pour presque tout t , $\tau_{[t/\delta]}$ converge en norme d'opérateur lorsque δ tend vers zéro et que $\mathbb{L}^{0,0}$ est une fonction continue en zéro de δ , alors la condition $(\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - \text{Id})/\delta$ est imposée puisque $(\text{Id} + (\mathbb{L}^{0,0}(\delta) - \text{Id}))^{[1/\delta]}$ doit converger. Alors la condition $\ell(\text{Id}) = \text{Id}$ impose

$$\sum_{i \in \Lambda \cup \{0\}} \mathbb{L}^{i,0*} \mathbb{L}^{i,0}(\delta) = -\delta(L^{0,0*} + L^{0,0}) + o(\delta),$$

de sorte que les ordres de grandeur des coefficients $\mathbb{L}^{i,0}$ sont imposés; les conditions de convergence du Théorème 6.4.1 sont alors naturelles. Par la suite, si l'on impose que les matrices \mathbb{L} soient unitaires ou proches de l'unitarité, les autres conditions de convergence deviennent naturelles.

Nous n'avons rien démontré qui *implique* les conditions de convergence que nous utilisons dans nos résultats; c'est simplement qu'aucun énoncé précis ne semble avoir de véritable intérêt. Il est toujours possible par exemple d'opérer sur les coefficients de $\mathbb{L}(\delta)$ des permutations dépendant de δ qui ne modifieraient aucunement la dynamique; nous voulions simplement, par nos remarques, montrer que nos hypothèses sont plausibles dans un problème bien posé.

6.4.2 Hamiltoniens associés à la dynamique

On sait que la solution d'une équation de Hudson-Parthasarathy possède une propriété algébrique qui permet de définir sur le système couplé un Hamiltonien associé à la dynamique. Nous allons voir qu'une équation discrète qui approche une équation de Hudson-Parthasarathy possède une propriété équivalente et qu'on peut ainsi lui associer un Hamiltonien discret. Plutôt que de rappeler en détail le cas continu, nous allons prouver les propriétés en temps discret et énoncer leurs analogues à temps continu. Pour plus d'informations à ce sujet on peut consulter [Gre].

Nous ne considérerons plus que des équations différentielles du type Hudson-Parthasarathy. Nous supposons donc que les matrices $\mathbb{L}(\delta)$ vérifient les conditions du Théorème 6.3.5 et convergent vers une équation (Ec) du type Hudson-Parthasarathy. Nous rappelons (voir la Proposition 6.3.2) qu'alors, pour δ assez petit, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ solution de

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$$

est constituée d'opérateurs inversibles de norme uniformément bornée. Nous allons prouver que ce processus est de surcroît un *cocycle*, c'est-à-dire en fait qu'il vérifie la propriété énoncée dans la Proposition 6.4.2 ci-dessous.

Pour parler de ces propriétés il nous faut étendre notre cadre de travail. Nous considérons notre espace de Fock $\mathbb{T}\Phi$ comme un sous-espace de l'espace de Fock $\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$ construit de la même manière en remplaçant \mathbb{N} par \mathbb{Z} ; dans l'interprétation de Guichardet nous identifions en fait $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{N},\Lambda})$ au sous-espace des fonctions f de $l^2(\mathcal{P}_{\mathbb{Z},\Lambda})$ telles que $f(A) = 0$ si $A \not\subset \mathbb{N} \times \Lambda$.

On a alors la décomposition tensorielle explicite comme au chapitre 1

$$\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}_-^*} \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{N}},$$

avec des notations évidentes, et en considérant l'espace initial :

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}_-^*} \otimes (\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{N}}),$$

ce qui nous permet d'amplifier de manière canonique tous les opérateurs que nous avons considérés jusqu'ici à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$: soulignons que nous ne changeons rien à notre calcul stochastique mais faisons simplement vivre les opérateurs définis jusqu'à maintenant - y compris les intégrales - dans un espace plus gros.

Sur $l^2(\mathbb{Z})$, on note θ l'opérateur de translation à gauche défini par

$$\theta f(n) = f(n+1).$$

C'est un opérateur unitaire dont la seconde quantification, encore notée θ , est un unitaire de $\mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$ que l'on amplifie à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{T}\Phi_{\mathbb{Z}}$. On voit alors facilement que cet opérateur vérifie

$$(\theta^*)^n a_1^{i,j} \theta^n = a_{n+1}^{i,j}$$

pour tous i, j de $0 \in \Lambda$ et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 6.4.2 *On définit un nouveau processus $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par*

$$\begin{cases} p_n = \theta^n u_n \text{ pour } n \text{ positif et} \\ p_n = p_{-n}^{-1} \text{ pour } n \text{ négatif.} \end{cases}$$

Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un groupe à un paramètre, de sorte que pour tout n ,

$$\theta^n u_n = (\theta \mathbb{L}_1)^n.$$

Remarque

La propriété particulière des solutions $(U_t)_{t \geq 0}$ d'équations de Hudson-Parthasarathy à temps continu s'énonce de la même manière : on considère la deuxième

quantification $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de l'opérateur de translation à gauche sur $L^2(\mathbb{R})$. Le processus $(\Theta_t U_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ s'étend comme ci-dessus aux temps négatifs et on a alors un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires qui est de plus fortement continu (voir [Py2], Théorème 27.8).

Le théorème de Stone lui associe ainsi un opérateur H , appelé l'*Hamiltonien* du système, qui vérifie

$$\Theta_t U_t = e^{itH}$$

pour tout t . Puisque dans notre cadre discret

$$\theta^n u_n = (I + (\theta \mathbb{L}_1 - I))^n$$

pour tout n , il est naturel d'appeler $\theta \mathbb{L}_1 - I$ l'Hamiltonien associé à l'évolution $u_{n+1} = \mathbb{L}_n u_n$.

Il est alors naturel de se demander si l'Hamiltonien associé au système discret converge vers son pendant à temps continu. Le résultat suivant répond à cette question :

Proposition 6.4.3 *Supposons que la matrice $\mathbb{L}(\delta)$ vérifie les conditions de convergence du Théorème 6.3.5. Considérons alors deux vecteurs a, b dans \mathcal{H}_0 et deux fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R} . Si $b \otimes \mathcal{E}(\phi)$ est dans le domaine de l'Hamiltonien H , on a pour tout α dans $]0, \frac{1}{2}[$,*

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\delta^\alpha} \mathbb{E}_S \left((\theta \mathbb{L}_1)^{[\delta^{(\alpha-1)}]} - Id \right) \mathbb{E}_S b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), iH b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

où l'on a une estimation de la différence des deux termes en $\sup(\delta^\alpha, \delta^{1/2-\alpha})$, qui est uniforme pour a, b dans une boule bornée de \mathcal{H}_0 .

Remarque

La condition $b \otimes \mathcal{E}(\phi) \in \text{Dom } H$ équivaut, d'après Gregoratti, (voir [Gre]), aux égalités

$$\phi(0) \sum_{j=1}^N S^{i,j*} b = \phi(0) b + \sum_{j=1}^N S^{i,j*} L_j b \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

En particulier, il peut arriver qu'aucun tel $a \otimes \mathcal{E}(\phi)$ n'appartienne au domaine de H .

Ce résultat n'apparaît dans aucun article ; nous en donnons donc ici une preuve complète.

Démonstration.

Nous allons prouver que, pour ϵ et δ assez petits,

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} (e^{i\epsilon H} - I) b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_S \left((\theta \mathbb{L}_1)^{[\epsilon/\delta]} - I \right) \mathbb{E}_S b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

admet une majoration de l'ordre $\sqrt{\delta}/\epsilon$, uniformément pour a, b dans un borné de \mathcal{H}_0 . Le résultat s'en déduira alors en prenant $\epsilon = \delta^\alpha$ et en utilisant le fait que $\frac{1}{\epsilon}(e^{i\epsilon\mathbf{H}} - I) - i\mathbf{H}$ est, en norme, de l'ordre de ϵ sur le domaine de \mathbf{H} . Remarquons que le fait que ϕ, ψ sont maintenant des fonctions sur \mathbb{R} tout entier ne change rien à la validité des estimations précédemment établies.

La régularité de ϕ et ψ permet de montrer que

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle$$

admet un majorant de la forme $\sqrt{\delta}/\epsilon$. Cette même régularité va nous permettre d'utiliser l'estimation (6.3.1) faite après la preuve de 6.3.1 pour évaluer

$$\langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} e^{i\epsilon\mathbf{H}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} (\theta \mathbb{L}_1)^{[\epsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle.$$

Rappelons que $e^{i\epsilon\mathbf{H}}$ est égal à $\Theta_\epsilon U_\epsilon$ et que $(\theta \mathbb{L}_1)^{[\epsilon/\delta]}$ est égal à $\theta^{[\epsilon/\delta]} u_{[\epsilon/\delta]}$. Il est par ailleurs clair que l'on a la relation

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \theta^{[\epsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} = \Theta_{[\epsilon/\delta]\delta} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$$

et la relation analogue pour θ^*, Θ^* .

Par conséquent, ce que nous voulons estimer est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \left(\langle \Theta_\epsilon^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_\epsilon \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle - \langle \Theta_{[\epsilon/\delta]\delta}^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[\epsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right) \\ & \leq \left| \langle (\Theta_\epsilon^* - \Theta_{[\epsilon/\delta]\delta}^*) a \otimes \mathcal{E}(\phi), \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} u_{[\epsilon/\delta]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{\epsilon} \langle \Theta_\epsilon^* a \otimes \mathcal{E}(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} (U_\epsilon - u_{[\epsilon/\delta]}) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \mathcal{E}(\psi) \rangle \right|. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme admet un majorant de la forme $\sqrt{\delta}/\epsilon$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|\Theta_\epsilon^* \phi\|_2 &= \|\phi\|_2, \\ \|\Theta_\epsilon^* \phi\|_\infty &= \|\phi\|_\infty, \end{aligned}$$

et

$$\|(\Theta_\epsilon^* \phi)'\|_\infty = \|\phi'\|_\infty.$$

Puisque, dans l'estimation de

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(\phi)\|, \quad \|\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\psi)\|$$

en $c\sqrt{\delta}$ dont nous avons servons dans la remarque (6.3.1), le coefficient c ne dépend que des bornes sur les dérivées de ϕ, ψ , cette remarque nous permet d'avoir une estimation du second terme du membre de droite en $\sqrt{\delta}/\epsilon$ avec une constante indépendante de ϵ .

□

Ceci conclut cette thèse. *Nunc est bibendum.*

Deuxième partie

Articles

Annexe A

Représentations intégrales et nucléaires des opérateurs sur l'espace de Fock à temps discret

Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock spaces

Yan Pautrat

Institut Fourier,
UMR 5582,
BP 74,
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France

Abstract

We study conditions for the existence of a Maassen kernel representation for operators on infinite dimensional toy Fock spaces. When applied to the toy Fock space of discrete quantum stochastic calculus, this condition gives a criterium for the existence of a representation as a quantum stochastic integral, as well as explicit formulas for deriving the coefficients of this representation. ¹

Introduction

The representation of operators on Fock space over $L^2(\mathbb{R}_+)$ or $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ as Maassen-Meyer kernel operators – that is, as series of iterated integrals of scalars with respect to quantum noises – is of particular interest. Indeed, this type of representation has been heavily studied because of the natural arising of kernel operators as solutions of quantum stochastic differential equations (see [Maa], [Mey]); what's more, the composition of kernel operators is a kernel operator which can be explicitly computed. Nevertheless, there is no satisfying criterium for representability of an operator, as existing results are scarce (see [At1], [B-L]).

The purpose of this article is to give very general representability criteria in the simpler case of infinite dimensional toy Fock space, that is, antisymmetric Fock space over $l^2(\mathbb{N})$ or $l^2(\mathbb{N}^d)$. The search for such results was motivated by Attal's rigorous

¹**Keywords:** quantum probability, Fock spaces, toy Fock space, Maassen-Meyer representation
AMS classification: 81S25

method to approximate boson Fock space over $L^2(\mathbb{R}_+)$ (which we denote by Φ) by its “discrete-time” counterpart: infinite dimensional toy Fock space $\mathbb{T}\Phi$ (see [At2]). Since the approximation method is explicit, finding criteria for the representability of operators on $\mathbb{T}\Phi$ could lead to representations as kernel operators (and, as we shall see later, as quantum stochastic integrals) of approximations of operators on Φ .

What’s more, the toy Fock space $\mathbb{T}\Phi$ conspicuously has interesting features regarding representability as kernel operators: indeed it is straightforward to see that the von Neumann subalgebra of $\mathcal{B}(\mathbb{T}\Phi)$ (the set of bounded operators on $\mathbb{T}\Phi$) generated by all fundamental operators a_i^+ , a_i^- , a_i^o , $i \geq 0$, is $\mathcal{B}(\mathbb{T}\Phi)$ itself. This leads to some kind of kernel representability result for bounded operators of $\mathbb{T}\Phi$. Another simple approach, presented in section two, gives a more precise result on the representation of a bounded operator; yet this result is still unsatisfactory both in its range of application (the operators considered in physical practice are rarely bounded) and in the underlying meaning given to a kernel representation. In this paper we discuss a more satisfying definition of such a representation. We then search equivalent formulations of that definition; we will see that, with minor domain assumptions, these formulations lead to explicit formulas for the coefficients involved in the kernel and yield a very general sufficient condition for the existence of a kernel representation. The proofs use discrete-time analogues of continuous-time methods developed by Lindsay in [Lin] ; we point out along the way a mistake contained in one of the propositions of that paper, give a counterexample and make a tentative correction. Later on we apply our results on kernel representations to obtain criteria and formulas for representations of operators as quantum stochastic integrals.

This paper is organized as follows: in section one we give all the needed notations. In section two we fulfill the above described program on kernel representations. In section three we apply our kernel representation theorems to the study of quantum stochastic integral representations.

1 Notations

In the purpose of generalizing our representability theorems to criteria that apply in any antisymmetric Fock space over infinite countable Hilbert spaces, we introduce all notations in a general framework. Let us denote by \mathcal{A} an arbitrary infinite countable set, and by \mathcal{P} the set of all finite subsets of \mathcal{A} . The space we will work on, throughout this paper, is the antisymmetric Fock space over $l^2(\mathcal{A})$, which, by Guichardet’s interpretation, can be seen as $l^2(\mathcal{P})$, that is, the space of all maps $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$, such

that

$$\sum_{M \in \mathcal{P}} |f(M)|^2 < +\infty.$$

The most familiar case is $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, where $l^2(\mathcal{P})$ is the infinite dimensional toy Fock space.

Let us denote by X_A the indicator function of $A \in \mathcal{P}$; the set of all X_A 's constitutes a (hilbertian) basis of $l^2(\mathcal{P})$. This particular basis being fixed, one defines for all $B \in \mathcal{P}$ three operators by

$$a_B^+ X_A = \begin{cases} X_{A \cup B} & \text{if } B \cap A = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_B^- X_A = \begin{cases} X_{A \setminus B} & \text{if } B \subset A \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_B^\circ X_A = \begin{cases} X_A & \text{if } B \subset A \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Those operators are called respectively the *creation*, *annihilation* and *conservation* operators. From now on, for two subsets A, B of \mathcal{A} , we write

- $A + B$ for $A \cup B$ if $A \cap B = \emptyset$ and
- $A - B$ for $A \setminus B$ if $B \subset A$,

using the convention that any quantity in which $A + B$ (respectively $A - B$) appears as a variable or as an index is null if $A \cap B \neq \emptyset$ (respectively $B \not\subset A$). We will write for example

$$a_B^+ X_A = X_{A+B},$$

$$a_B^- X_A = X_{A-B}.$$

Practically this will turn out to be a short notation to restrict the range of summation of sums in which the variables are elements of \mathcal{P} .

Let us write the general expression of the action of an operator $a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ on a vector f of $l^2(\mathcal{A})$. First, if A, B, C are not mutually disjoint then $a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ is null; otherwise for all M in \mathcal{P} ,

$$a_A^+ a_B^\circ a_C^- f(M) = f(M + C - A) \tag{1}$$

if $B \subset M$, and zero otherwise.

Remark that we have not included here a precise definition of what we will call a kernel representation. We postpone this and the preparative discussion to the next section.

2 Kernel representation theorems on $l^2(\mathcal{P})$

Let us describe a tentative approach to representations of bounded operators; to that end let us restrict our framework to the (ordered) case where $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, and denote by p_i the orthogonal projection on the subset $l^2(\mathcal{P}_i)$, where \mathcal{P}_i is the set of subsets of $\{0, \dots, i-1\}$. In that case, for any bounded operator K on $l^2(\mathcal{P})$, $p_i K p_i$ is an operator on $l^2(\mathcal{P}_i)$, and the sequence $(p_i K p_i)_{i \geq 0}$ converges strongly to K . It is known from the case of finite dimensional toy Fock spaces that every one of these $p_i K p_i$ coincides with a kernel operator $p_i \sum_{A,B,C < i} k_i(A,B,C) a_A^+ a_B^0 a_C^- p_i$. It is easy to see that the k_i 's are compatible in the sense that there exists a kernel $k : \mathcal{P}^3 \mapsto \mathbb{C}$ which extends all kernels k_i . This k is such that for any vector $f \in l^2(\mathcal{P})$, any $M \in \mathcal{P}$,

$$(Kf)(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}_i} k(U,V,N) f(V+W+N), \quad (2)$$

so that, in some sense, the function k satisfies an analogue of the formula which defines kernel operators in continuous time (see [Mey], [Maa]). Nevertheless, let us discuss what we want a kernel representation to be. Heuristically, such a representation should be a series $\sum_{(A,B,C) \in \mathcal{P}^3} k(A,B,C) a_A^+ a_B^0 a_C^-$, the meaning of the sum being taken in a weak sense: we expect that, for every f in some domain, the formal computation $\sum_{A,B,C} k(A,B,C) a_A^+ a_B^0 a_C^- \sum_N f(N) X_N$, gives the right result at every M in \mathcal{P} , that is, that the equality

$$(Kf)(M) = \sum_{U+V+W=M} \sum_{N \in \mathcal{P}} k(U,V,N) f(V+W+N), \quad (3)$$

holds for every N in \mathcal{P} . It is a sensible demand, both from a pragmatic point of view and from an intuitive one (the sums $\sum_{A,B,C}$ and \sum_N above should be independent of the order of summation, so the final one also should) that this series be *absolutely convergent*. In equation (2) the series *a priori* lacks that property. It is therefore natural to look for conditions upon which that property holds.

Coming back to the general case (where \mathcal{A} is any infinite countable set), we will solve this problem and obtain further representation theorems. The strategy of our proof will be completely different from the above; our basic tools will be the following:

- the transform $k \mapsto k'$ similar to the one defined by Lindsay (see [Lin]) in the regular Fock space; we give its definition below.
- The additional feature, specific to the case of discrete-time, of equivalence of two variables and three variables representation. This feature is the simple fact

that, since any a_B° is $a_B^+ a_B^-$, one should (and does, as Proposition 1 will prove) obtain equivalent actions for the formal series $\sum_{(A,B,C) \in \mathcal{P}^3} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ and $\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}^2} k(A, B) a_A^+ a_B^-$ if we use the correspondence

$$k(A, B) = k(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A) \text{ and } k(A, B, C) = k(A \cup B, B \cup C). \quad (4)$$

Definition 1 For a function $k : \mathcal{P}^3 \mapsto \mathbb{C}$, let us define $k' : \mathcal{P}^3 \mapsto \mathbb{C}$ as

$$k'(A, B, C) = \sum_{V \subset B} k(A, V, C),$$

and for a function $k : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{C}$, let us define $k' : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{C}$ as

$$k'(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} k((A \setminus B) \cup V, (B \setminus A) \cup V)$$

Remark : for subsets A, B, C which are not mutually disjoint, the operator $a_A^+ a_B^\circ a_C^-$ is null; therefore, when considering kernels with *three* arguments, the function k needs only to be defined on mutually disjoint triples for our purpose, and similarly for k' .

Properties of the transform

- The correspondence $k \mapsto k'$ is bijective for three-arguments and two-arguments thanks to the Moebius inversion formula which yields

$$k(A, B, C) = \sum_{V \subset B} (-1)^{|B-V|} k'(A, V, C) \quad (5)$$

and

$$k(A, B) = \sum_{V \subset A \cap B} (-1)^{|A \cap B - V|} k'((A \setminus B) \cup V, (B \setminus A) \cup V). \quad (6)$$

- The correspondence defined by (4) is bijective between the set of functions defined on the subset of \mathcal{P}^3 of mutually disjoint triples of \mathcal{P} and the set of functions on \mathcal{P}^2 .
- If we add for a few lines indices and denote kernels by k_2, k'_2, k_3, k'_3 , depending on the number of variables, the following graph is commutative:

$$\begin{array}{ccc} k_2 & \longleftrightarrow & k_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ k'_2 & \longleftrightarrow & k'_3 \end{array},$$

where arrows are either the correspondence in (4) or the transformation in Definition 1. That means in particular that notations like k'_2, k'_3 would be unambiguous.

- Our choice for the transform $k \mapsto k'$ extends the equalities in (4) to the functions k' :

for mutually disjoint $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, $k'(A, B, C) = k'(A \cup B, B \cup C)$.

Because of these properties we will not distinguish anymore notations between k_2 and k_3 , nor between k'_2 and k'_3 .

The following proposition contains the first properties that link the four different forms of a kernel.

Proposition 1 *Let f be a fixed vector in $l^2(\mathcal{A})$. Let us define the four assumptions:*

- for all mutually disjoint U, V, W in \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, V, N)f(V + W + N)| < +\infty \quad (7)$$

- for all disjoint U, V in \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k(U, N)f(V + N)| < +\infty \quad (8)$$

- for all disjoint U, V in \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, V, N)f(V + N)| < +\infty \quad (9)$$

- for all U in \mathcal{P}

$$\sum_{N \in \mathcal{P}} |k'(U, N)f(N)| < +\infty. \quad (10)$$

Then the conditions on two-arguments kernels are equivalent to their three-arguments counterparts, that is, (7) and (8) are equivalent, (9) and (10) are equivalent. What's more, the conditions on the kernels imply the conditions on their transforms, that is, (7), (8) imply (9), (10).

Besides, if all conditions are satisfied, then the following are defined and equal for all $M \in \mathcal{P}$:

$$\sum_{U+V+W=M} \sum_N k(U, V, N) f(V + W + N) \quad (11)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_N k'(U, V, N) f(V + N) \quad (12)$$

$$\sum_{U+V=M} \sum_N k(U, N) f(V + N) \quad (13)$$

$$\sum_N k'(M, N) f(N) \quad (14)$$

Proof.

Let us start with the proof that (7) implies (8): first fix U_0, V_0 ;

$$\begin{aligned} \sum_N |k(U_0, N) f(V_0 + N)| &= \sum_N |k(U_0 \setminus N, U_0 \cap N, N \setminus U_0) f(V_0 + U_0 \cap N + N \setminus U_0)| \\ &\leq \sum_{U+V=U_0} \sum_N |k(U, V, N \setminus U_0) f(V + V_0 + N \setminus U_0)| \\ &\leq 2^{|U_0|} \sum_{U+V=U_0} \sum_{N \text{ disjoint from } U, V} |k(U, V, N) f(V + V_0 + N)| \\ &\leq 2^{|U_0|} \sum_{U+V=U_0} \sum_N |k(U, V, N) f(V + V_0 + N)| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

where the $2^{|U_0|}$ arises because any N can be written as at most $2^{|U_0|}$ different " $N \setminus U_0$ ".

Now prove that (8) implies (7):

$$\begin{aligned} \sum_N |k(U, V, N) f(V + W + N)| &= \sum_N |k(U + V, N + V) f(W + (N + V))| \\ &= \sum_{N \supset V} |k(U + V, N) f(W + N)| \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

The equivalence of (9) and (10) is shown exactly in the same way.

To show that the above conditions on k imply those on the transform k' , we prove that (7) implies (9):

$$\sum_N |k'(U, V, N)f(V + N)| \leq \sum_N \sum_{\alpha \subset V} |k(U, \alpha, N)f(\alpha + (V \setminus \alpha) + N)|$$

and the right-hand side is just a finite sum of series of the type (7) with $(U, V, W) = (U, \alpha, V \setminus \alpha)$.

The equalities are trivial once the summability assumptions allow one to perform all manipulations on the sums. □

Remark : it is not true in general that the conditions on k' imply their counterpart on k . Here is a counterexample: let k be of the form

$$k(U, V, W) = (-1)^{|V|} j(U, W)$$

for some function j of two disjoint finite subsets of \mathbb{N} , which is not to be confused with the kernel k expressed as function of two variables.

Then $k'(U, V, W) = \mathbf{1}_{V=\emptyset} j(U, W)$ and (9) simply becomes

$$\text{for all } U \in \mathcal{P}, \quad \sum_N |j(U, N)f(N)| < +\infty, \quad (15)$$

whereas (7) is

$$\text{for all } (U, V) \in \mathcal{P}^2, \quad \sum_N |j(U, N)f(V + N)| < +\infty. \quad (16)$$

Now if one considers

- a function j such that $j(U, W) = 0$ if the cardinal of W is different from 1,
- a vector f null on sets of cardinality one,

then (15) is trivial while (16) becomes

$$\text{for all } (U, V) \in \mathcal{P}^2, \quad \sum_{n \geq 0} |j(U, \{n\})f(V + \{n\})| < +\infty. \quad (17)$$

and still implies a condition on the values of j and f , so that many counterexamples exist.

The same type of counterexamples holds in continuous time for the equivalence described by Lindsay ([Lin]). The next theorem describes a class of vectors for which the equivalence of (7), (8), (9), (10) holds; once again this class translates in continuous time to a class of vectors for which the equivalence described by Lindsay holds.

Theorem 1 *Let f be a vector in $l^2(\mathcal{P})$ for which there exists a function $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ such that*

$$\text{for all } (A, B) \in \mathcal{P}^2, |f(A + B)| \leq |f(A)| \prod_{i \in B} \phi(i).$$

Then assumptions (7), (8), (9), (10) are equivalent for that f .

Proof.

What is left to prove is that (9) implies (7). Using the particular hypothesis on f , one has for all U, V, W ,

$$\begin{aligned} \sum_N |k(U, V, N)f(V + W + N)| &\leq \prod_{i \in W} \phi(i) \sum_{N \text{ disjoint from } V, W} |k(U, V, N)f(V + N)| \\ &\leq \prod_{i \in W} \phi(i) \sum_N |k(U, V, N)f(V + N)| \end{aligned}$$

so we can reduce the proof to the case where $W = \emptyset$. But in that case, using the inverse Mœbius transform,

$$\begin{aligned} \sum_N |k(U, V, N)f(V + N)| &\leq \sum_{\alpha \subset V} \sum_N |k'(U, \alpha, N)f(V + N)| \\ &\leq \sum_{\alpha \subset V} \sum_N |k'(U, \alpha, N)f(\alpha + N)| \prod_{i \in V \setminus \alpha} \phi(i) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

□

Definition 2 *The vectors which satisfy the property mentioned in the previous theorem are called subexponential. The set of all subexponential vectors, which we denote by $s\mathcal{E}$, contains all exponential vectors, as well as all vectors X_A , $A \in \mathcal{P}$.*

The set $s\mathcal{E}$ is not a vector space; nevertheless, it has the properties that, if f, g are in $s\mathcal{E}$ and λ, μ are in \mathbb{C} , then $|\lambda| |f| + |\mu| |g|$ is in $s\mathcal{E}$.

Let us give a precise definition, following our earlier discussion, of what we call a kernel operator:

Definition 3 *A (possibly unbounded) operator K on $l^2(\mathcal{P})$ is said to have a kernel representation if there exists a function k such that:*

- *Dom K is exactly the set of $f \in l^2(\mathcal{P})$ that satisfy one of the conditions (7) or (8),*

- the equalities in (11), (12), (13) or (14) define a square integrable function of M ,
- $Kf(M)$ is equal to the corresponding expression for all $M \in \mathcal{P}$.

Now, up to an additional simple assumption, the kernel decomposition takes a clear meaning: suppose that an operator K has such a representation and that the basis $\{X_A\}$ is in $\text{Dom } K$, then writing $\sum_N k'(M, N)\mathbf{1}_A(N) = (KX_A)(M)$ yields the fundamental formula

$$\langle X_M, KX_A \rangle = k'(M, A). \quad (18)$$

Thanks to this formula, (10) becomes

$$\forall M, \sum_N |\langle X_M, KX_N \rangle f(N)| < +\infty,$$

and the other two assumptions (square-integrability and equality of expressions) simply mean that one can write rigorously

$$\forall M \quad \langle X_M, K \sum_N f(N)X_N \rangle = \sum_N \langle X_M, KX_N \rangle f(N).$$

What this means indeed is that kernel representations are just another way to write the above expansion. Of course there are conditions for this expansion to be meaningful and conditions for the obtained representation to actually represent the original operator. We discuss these conditions after the following proposition:

Proposition 2 *Let K be an operator with domain such that*

$$\{X_A, A \in \mathcal{P}\} \subset \text{Dom } K \subset s\mathcal{E}.$$

Then K can be extended to a kernel operator if and only if for every $f \in \text{Dom } K$ and every M in \mathcal{P} ,

$$\begin{cases} \sum_N |\langle X_M, KX_N \rangle f(N)| < +\infty \text{ and} \\ \sum_N \langle X_M, KX_N \rangle f(N) = Kf(M). \end{cases}$$

In that case, the associated kernel is given by

$$k'(A, B) = \langle X_A, KX_B \rangle.$$

Proof.

Thanks to Proposition 1, Theorem 1 and formula (18), this is a simple rephrasing of our definition. □

It is clear that, if the domain of the operator K is not contained in the subexponential subset, then the obtained kernel operator can be such that $\{X_A\} \subsetneq \text{Dom } K_k$ and $\{X_A\} = \text{Dom } K \cap \text{Dom } K_k$.

It is also clear that, even if

$$\sum_N \left| \langle X_M, K X_N \rangle f(N) \right| < +\infty$$

and

$$\sum_M \left| \sum_N \langle X_M, K X_N \rangle f(N) \right|^2 < +\infty,$$

for any f in $\text{Dom } K$, so that the associated kernel operator K_k is well defined on $\text{Dom } K$ and coincides with K on $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$, one needs a kind of closability assumption to make sure that the kernel operator is indeed an extension of K : this assumption is exactly the condition

$$\sum_N \langle X_M, K X_N \rangle f(N) = K f(M). \tag{19}$$

It does not seem that a more concise formulation can be found: the usual closability property would be that if a sequence $(u_n)_{n \geq 0}$ converges to zero and is such that the sequence of images $(K u_n)_{n \geq 0}$ is convergent, then its limit is zero.

The assumption (19) is weaker than closability in the sense that it only considers approximating sequences $(u_n)_{n \geq 0}$ made of partial sums of $\sum_N f(N) X_N$, but also stronger than closability in the sense that convergence to zero of $(u_n)_{n \geq 0}$ with the weak convergence assumption on the images that $\langle X_M, K u_n \rangle$ converges for all M and defines a square-integrable function of M must imply that that limit is zero.

On the other hand, it is clear that these properties are satisfied if one assumes that K has an adjoint defined on all vectors X_M , M in \mathcal{P} . Indeed in that case, we have the following result; note that no assumption of the type $\text{Dom } K \subset s\mathcal{E}$ is needed; actually the proof of this theorem proves the stronger summability assumptions on the kernels k themselves and not on the transforms k' .

Theorem 2 *Let K be an operator on $l^2(\mathcal{P})$ such that the set of all X_A is in $\text{Dom } K \cap \text{Dom } K^*$. Then the kernel operator defined by (18) is a closed extension of K .*

Proof.

Let us define the kernel k by (18). We will show that assumption (7) holds for *any* vector f of $l^2(\mathcal{P})$. Indeed, let us fix U, V, W ; then from the Mœbius inversion formula,

one has for all N disjoint from U, V, W :

$$\begin{aligned} |k(U, V, N)| &\leq \sum_{\alpha \subset V} |k'(U + \alpha, N + \alpha)| \\ &\leq \sum_{\alpha \subset V} |\langle X_{U+\alpha}, K X_{N+\alpha} \rangle| \\ &\leq \sum_{\alpha \subset V} |\langle K^* X_{U+\alpha}, X_{N+\alpha} \rangle|, \end{aligned}$$

which is a finite sum of square-summable terms. Besides, $N \mapsto f(V + W + N)$ is also square-summable, and therefore $\sum_N |k(U, V, N)f(V + W + N)|$ is finite.

The condition on f appears in the sequel: the domain of the kernel operator $K_k f$ is the set of vectors f in $\mathbb{T}\Phi$ such that

$$K_k f(M) = \sum_N \langle X_M, K X_N \rangle f(N)$$

defines a function belonging to $l^2(\mathcal{P})$. That quantity is equal to

$$\sum_N \langle K^* X_M, X_N \rangle f(N) = \langle K^* X_M, f \rangle,$$

so that the domain of K_k is the set of vectors f such that $M \mapsto \langle K^* X_M, f \rangle$ is square-integrable. For all f in $\text{Dom } \overline{K}$, $\langle K^* X_M, f \rangle = \langle X_M, \overline{K} f \rangle$, so $\text{Dom } \overline{K} \subset \text{Dom } K_k$ and $K_k f = \overline{K} f$.

We now prove that K_k is closed: let $(f_n)_{n \geq 0}$ be a sequence in $\text{Dom } K_k$ that converges to some f in $\mathbb{T}\Phi$ and such that $(K_k f_n)_{n \geq 0}$ converges to some ϕ in $\mathbb{T}\Phi$. Then

$$\begin{aligned} \sum_M |\langle K^* X_M, f \rangle|^2 &= \sum_M \lim |\langle K^* X_M, f_n \rangle|^2 \\ &\leq \liminf \sum_M |\langle K^* X_M, f_n \rangle|^2 \\ &= \liminf \|K_k f_n\|^2 \\ &= \|\phi\|^2 \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

so that f lies in $\text{Dom } K_k$; besides

$$\begin{aligned} K_k f(M) &= \langle K^* X_M, f \rangle \\ &= \lim \langle K^* X_M, f_n \rangle \\ &= \lim \langle X_M, K_k f_n \rangle \\ &= \phi(M) \end{aligned}$$

holds for every M in \mathcal{P} so that $\phi = K_k f$ and the proof is complete. □

Remark : the inclusion $\overline{K} \subset K_k$ is *a priori* not an equality.

This theorem gives numerous examples of operators that admit a kernel representation.

3 Integral representation of operators on toy Fock space

In this section we restrict ourselves to operators on the toy Fock space $\mathbb{T}\Phi = l^2(\mathcal{P})$ of quantum stochastic calculus, for which $\mathcal{A} = \mathbb{N}$; indeed we wish to consider integrals of operators, and this demands a natural ordering on our set \mathcal{A} . Let us suppose that an operator K on $\mathbb{T}\Phi$ has a kernel representation in the sense of Definition 3. This kernel representation is formally an expression of K as $\sum_{A,B,C} k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-$. Let us go on with formal expressions and apply careless manipulations to this sum: we write for all $(A, B, C) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ $a_A^+ a_B^\circ a_C^- = a_{A \setminus i}^+ a_B^\circ a_C^- a_i^+$ when *e.g.* the largest element i in $A \cup B \cup C$ is in A , and regroup terms. We obtain

$$\begin{aligned}
 &k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i \sum_{A,B,C < i} k(A + i, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^+ \\
 &+ \sum_i \sum_{A,B,C < i} k(A, B + i, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^\circ + \sum_i \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C + i) a_A^+ a_B^\circ a_C^- a_i^-,
 \end{aligned}$$

that is, we obtain an integral representation of K with the following integrands:

$$\begin{cases}
 k_i^+ = \sum_{A,B,C < i} k(A + i, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \\
 k_i^\circ = \sum_{A,B,C < i} k(A, B + i, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- \\
 k_i^- = \sum_{A,B,C < i} k(A, B, C + i) a_A^+ a_B^\circ a_C^-
 \end{cases} \tag{20}$$

Giving more rigorous meaning to that demands, of course, a definition of the integrals. The definitions are actually quite simple (see [Pau]): the domain of a sum $\sum_i h_i$ is the set of vectors f such that for all $A \in \mathcal{P}$, $\sum_i h_i f(A)$ is a summable series and such that this defines a square-integrable function of A . An integral $\sum_i h_i^\xi a_i^\xi$ is such a sum with $h_i = h_i^\xi a_i^\xi$; on the other hand, one can see from Definition 3 and from the expression (1) that a kernel representation is simply a series $\sum_{A,B,C} (k(A, B, C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-)$ in

the above sense. This justifies the above manipulations except for domain properties; what it exactly yields is

$$K \subset k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i (k_i^+ a_i^+ + k_i^\circ a_i^\circ + k_i^- a_i^-),$$

which does not prove in our sense that our operator has an integral representation, since the right-hand side is itself an extension of the integral

$$k(\emptyset, \emptyset, \emptyset) + \sum_i k_i^+ a_i^+ + \sum_i k_i^\circ a_i^\circ + \sum_i k_i^- a_i^-. \quad (21)$$

What we have shown is that on some domain (the intersection of the domain of this integral and the domain of the operator), the operator coincides with the integral. What's more, if a vector X_A is in the domain of K , then it is also in the domain of the integral (21), since only one of the three series $\sum_i k_i^\epsilon a_i^\epsilon X_A$ has an infinite number of nonzero terms.

The interesting aspect of this formal computation is that the integrands defined by (20) are everywhere defined as finite sums of everywhere defined operators, and are described as simple kernel operators with explicit kernels. Using the formula (18) then gives the action of the operators k_i^ϵ expressed as functions of K :

$$\begin{cases} \langle X_A, k_i^+ X_B \rangle = \mathbb{1}_{A \Delta B < i} \langle X_{A_i[+i]}, K X_{B_i[]} \rangle \\ \langle X_A, k_i^- X_B \rangle = \mathbb{1}_{A \Delta B < i} \langle X_{A_i[]}, K X_{B_i[+i]} \rangle \\ \langle X_A, k_i^\circ X_B \rangle = \mathbb{1}_{A \Delta B < i} \left(\langle X_{A_i[+i]}, K X_{B_i[+i]} \rangle - \langle X_{A_i[]}, K X_{B_i[]} \rangle \right) \end{cases}$$

Using the fundamental operators of abstract Ito calculus on toy Fock space p_i, d_i , these operators have much more interesting expressions. We recall briefly from [Pau] the definitions of these operators: for $f \in \mathbb{T}\Phi$ and $i \in \mathbb{N}$, $p_i f$ and $d_i f$ are defined as the vectors of $\mathbb{T}\Phi$ such that, for $A \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} p_i f(M) &= \mathbb{1}_{M < i} f(M), \\ d_i f(M) &= \mathbb{1}_{M < i} f(M + i). \end{aligned}$$

In particular,

$$\begin{aligned} p_i X_A &= \mathbb{1}_{A < i} X_A, \\ d_i X_A &= \mathbb{1}_{A < i} X_{A-i}, \end{aligned}$$

from which one sees immediately that one has

$$\begin{cases} k_i^+ p_i = d_i K p_i \\ k_i^- p_i = p_i K a_i^+ p_i \\ k_i^\circ p_i = d_i K a_i^+ - p_i K p_i \end{cases} \quad (22)$$

The above discussion proves the following result:

Theorem 3 *Let K be an operator on $\mathcal{T}\Phi$ such that the set of all X_A is in $\text{Dom } K \cap \text{Dom } K^*$. Then the operator*

$$\lambda + \sum_i k_i^+ a_i^+ + \sum_i k_i^\circ a_i^\circ + \sum_i k_i^- a_i^- - K,$$

where the operators k_i^ϵ are defined by (22) and $\lambda = \langle \mathbb{1}, K \mathbb{1} \rangle$, is a restriction of the zero process and its domain contains the set $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$.

The p_i 's on the right of expressions in (22) are here only for the sake of symmetry; if one notices that $d_i = p_i a_i^-$ and that a_i^+ , a_i^- are mutually adjoint, these formulas show that $(k^*)_i^+ = k_i^-$, $(k^*)_i^- = k_i^+$ and $(k^*)_i^\circ = k_i^\circ$, where the $(k^*)^\epsilon$ are the integrands in the integral representation of K^* .

References

- [At1] S. ATTAL: Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space, *Communications in Mathematical Physics* 175 (1996), Springer Verlag, pp. 43-62.
- [At2] S. ATTAL: Approximating the Fock space with the toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVI* (2002), Springer Verlag, pp. 477-491.
- [B-L] V.P. BELAVKIN and J.M. LINDSAY: The kernel of a Fock space operator II, *Quantum probability and related topics VIII* (1993), World scientific, pp. 87-94.
- [Lin] J.M. LINDSAY: The kernel of a Fock space operator I, *Quantum probability and related topics VIII* (1993), World scientific, pp. 271-280.
- [Maa] H. MAASSEN: Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels, *Quantum probability and related topics II*, Springer-Verlag L.N.M. 1136 (1985), pp. 361-374.

- [Mey] P.A. MEYER: Quantum probability for probabilists, Springer-Verlag L.N.M. 1538 (1993).
- [Pau] Y.PAUTRAT: From Pauli matrices to quantum Ito formula, *Prépublication de l'Institut Fourier*, 2002.

Annexe B

Matrices de Pauli et formule d'Itô quantique

From Pauli matrices to quantum Ito formula

Yan Pautrat

Institut Fourier
UMR 5582
BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
France

Abstract

The aim of this article is to show that the famous quantum Ito formula (which contains the classical Ito formula) is obtained as a rigorous limit of the Pauli matrices commutation relations. This result is obtained by exploiting Attal's approximation of the quantum noises by normalized spin chains. Here we study this theory further by developing a quantum stochastic calculus on the natural state space for spin chains. A representation result obtained by the author allows us to compute explicitly approximations of quantum stochastic integrals. We finally prove that the formula for composing two quantum stochastic integrals can be proved by our approximation scheme and the commutation relations for Pauli matrices. ¹

Introduction

In [At3], Attal showed that the usual Fock space $\Phi = \Gamma_{sym}(L^2(\mathbb{R}_+))$ of quantum stochastic calculus, together with its quantum noises, can be approximated by the state space of a spin chain and by the usual Pauli matrices. What's more, he constructed this discrete approximation as a concrete subspace of the Fock space Φ . The question whether one can rigorously prove that the quantum Ito formula is a limit of the formulas implied by the Pauli matrices commutation relations is a natural one, which we solve here.

Keywords: quantum probability, quantum stochastic integrals, Fock spaces, toy Fock space, quantum Ito formula

AMS classification:81S25, 60H05

Let us be more precise: on the toy Fock space (the natural state space for a spin chain), one can equivalently consider the Pauli matrices or the creation, annihilation and conservation operators a^+, a°, a^- . It has been shown by the author in [Pau] that any reasonable (even unbounded) operator on the toy Fock space can be described as the sum of three integrals $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ for $\epsilon = +, \circ, -$. There is, as we proved, an Ito formula for the composition of two integrals:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\epsilon a_i^\epsilon \sum_{i \in \mathbb{N}} k_i^\eta a_i^\eta = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\epsilon \left(\sum_{j < i} k_j^\eta a_j^\eta \right) a_i^\epsilon + \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j < i} h_j^\epsilon a_j^\epsilon \right) k_i^\eta a_i^\eta + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon, \eta},$$

where $a^{\epsilon, \eta}$ is actually $a^\epsilon \cdot a^\eta$, so that it is given by the following table:

\uparrow	—	○	+	×
—	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-
○	0	a°	a^+	a°
+	a°	0	0	a^+
×	a^-	a°	a^+	a^\times

which, as we recall, is a consequence of the Pauli matrices commutation relations. We call that table the *discrete time* Ito table. On the other hand, it is shown that on the Fock space, and under some analytical conditions, (see [At1],[A-L], [A-M]) there is also an Ito formula, of similar form

$$\int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon \int_0^\infty K_t^\eta da_t^\eta = \int_0^\infty H_t^\epsilon \left(\int_0^t K_s^\eta da_s^\eta \right) + \int_0^\infty \left(\int_0^t H_s^\epsilon da_s^\epsilon \right) K_t^\eta da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^{\epsilon, \eta}$$

for the continuous time integrals, but here $da^{\epsilon, \eta}$ is given by

\uparrow	—	○	+	×
—	0	da^-	da^\times	0
○	0	da°	da^+	0
+	0	0	0	0
×	0	0	0	0

which we call the *continuous time* Ito table.

This paper is organized as follows: in section one we develop a full theory of quantum stochastic calculus on toy Fock space and give the statement of the theorem of representation as quantum stochastic integrals which we use in the sequel. In section two we recall Attal’s approximation scheme and use our explicit formulas of representations to compute the approximation of continuous-time quantum stochastic integrals; we will see that the form of the projections is not as trivial as one would expect. In section three we

recover the Ito formula with the associated continuous time Ito table from our approximation scheme and the commutation relations for Pauli matrices.

This paper only tackles with simple toy Fock space; the case of toy Fock space “of higher multiplicity” gives rise to very interesting interpretations in terms of processes of martingales with discrete state spaces; this is the subject of a forthcoming joint paper with Stéphane Attal.

1 Stochastic calculus on toy Fock space

1.1 Definitions

The toy Fock space $\mathbb{T}\Phi$ is most naturally defined as the antisymmetric Fock space over $l^2(\mathbb{N})$. We will nevertheless use Guichardet’s shorthand notation (see [Gui]) that allows one to identify $\mathbb{T}\Phi$ with the easier to handle $l^2(\mathcal{P})$, that is, the space of all maps $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$, such that

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} |f(A)|^2 < +\infty,$$

where \mathcal{P} is the set of finite subsets of \mathbb{N} .

When $\mathbb{T}\Phi$ is seen as $l^2(\mathcal{P})$, a natural basis arises, that of the indicators $\mathbb{1}_A$ of elements A of \mathcal{P} ; we will denote by X_A these vectors, and by Ω the vector X_\emptyset , called the *vacuum vector*. Every vector $f \in \mathbb{T}\Phi$ thus admits an orthogonal decomposition of the form

$$f = \sum_{A \in \mathcal{P}} f(A)X_A.$$

The toy Fock space has an important property of tensor product decomposition: for any partition $\cup N_j$ of \mathbb{N} , denote by $\mathbb{T}\Phi_{N_j}$ the space $l^2(\mathcal{P}_{N_j})$ where \mathcal{P}_{N_j} is the set of finite subsets of N_j ; then $\mathbb{T}\Phi_{N_j}$ can be identified with a subspace of $\mathbb{T}\Phi$ and one has the explicit isomorphism

$$\mathbb{T}\Phi = \bigotimes_j \mathbb{T}\Phi_{N_j},$$

where we identify any X_A with $\bigotimes_j X_{A \cap N_j}$. We will mainly consider cases where the N_j ’s are of the form $\{0, \dots, i-1\}$ or $\{i, \dots\}$ in which cases we denote the associated spaces by $\mathbb{T}\Phi_i$, $\mathbb{T}\Phi_{[i]}$ respectively.

A particular family of elements of $\mathbb{T}\Phi$ will be useful in the sequel: it is the family of *exponential vectors*. To every u in $l^2(\mathbb{N})$ we associate an function on \mathcal{P} by

$$e(u)(A) = \prod_{i \in A} u(i) \text{ for } A \in \mathcal{P},$$

an it can be seen to define a vector in $\mathbb{T}\Phi$ by the inequality

$$n! \sum_{|A|=n} \left| \prod_{i \in A} |u(i)| \right|^2 \leq \left(\sum_{i \geq 0} |u(i)|^2 \right)^n,$$

but this yields only $\|e(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$ and no (simple) formula for $\langle e(u), e(v) \rangle$. The family of exponential vectors is total but contrarily to the case of exponentials of the Fock space $\Gamma_{sym}(L^2(\mathbb{R}_+))$, a family of exponentials of distinct functions is not necessarily linearly independent: consider for example the case of $u = (0, \dots)$, $v = (1, 0, \dots)$ and $w = (2, 0, \dots)$. Then one has $e(u) - 2e(v) + e(w) = 0$.

Fundamental operators on $\mathbb{T}\Phi$ one defines for all $i \in \mathbb{N}$ three operators by their action on the basis $\{X_A\}$:

$$a_i^+ X_A = \begin{cases} X_{A \cup \{i\}} & \text{if } i \notin A \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_i^- X_A = \begin{cases} X_{A \setminus \{i\}} & \text{if } i \in A \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_i^\circ X_A = \begin{cases} X_A & \text{if } i \in A \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and the more general operators a_M^+ , a_M^- , a_M° for $M \in \mathcal{P}$ by

$$a_M^\epsilon = \prod_{i \in M} a_i^\epsilon, \quad \epsilon \in \{+, -, \circ\}.$$

Their action is therefore given by

$$a_M^+ X_A = \begin{cases} X_{A \cup M} & \text{if } M \cap A = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_M^- X_A = \begin{cases} X_{A \setminus M} & \text{if } M \subset A \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$a_M^\circ X_A = \begin{cases} X_A & \text{if } M \subset A \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We will simplify notations to $a_M^+ X_A = X_{A+M}$, $a_M^- X_A = X_{A-M}$, using the convention that $M + A = M \cup A$ (respectively $M - A = M \setminus A$) if

$M \cap A = \emptyset$ (respectively $M \subset A$) and that the associated quantity is null otherwise. This will practically be a compact notation, in summations where the index are subsets, for conditions on those indices, and this shall lead to no ambiguity: for example, for fixed C in \mathcal{P} , a sum $\sum_{A+B \subset C}$ is simply a sum over all *disjoint* subsets A, B of C . One more word of notation is needed here for such manipulations on sets: an inequality of type $A < j$ means that $i < j$ for all i in A . Besides, we won't make a difference, in the writing of such quantities, between the set $\{i\}$ and the point i .

The above operators are closable, of bounded closures (with norm 1), and we will keep the same notations for their closures, which we call operators of *creation* (a^+), *annihilation* (a^-) and *conservation* (a°).

1.2 Relations with Pauli matrices

A more physical description of our framework would start with the following: quantum mechanically speaking, a particle with, for example, two energy levels should be described by the complex vector space of dimension two: \mathbb{C}^2 . The customary description for the most important operators of position and impulsion, which we denote for a few lines by Q and P respectively, is

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

and Q, P satisfy the commutation relation

$$QP - PQ = 2iI.$$

The $*$ -algebra generated by Q and P is the whole of the algebra of complex 2×2 matrices; that algebra is also linearly generated by I, Q, P and QP . If we denote for consistency $Q, P, -iQP$ by $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ respectively, we obtain the famous Pauli matrices. We therefore have a basis $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ with particular algebraic relations.

Now if we denote by Ω, X the canonical basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, there is a more natural basis for the vector space of 2×2 matrices, that is, I, a^+, a^-, a° with

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

These operators satisfy

$$a^+ \Omega = X \quad a^+ X = 0$$

$$a^- \Omega = 0 \quad a^- X = \Omega$$

$$a^\circ \Omega = 0 \quad a^\circ X = X,$$

and we have the relations

$$a^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$$

$$a^- = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$$

$$a^\circ = \frac{1}{2}(I - \sigma_z),$$

so that the commutation relations for a^+ , a^- , a° are straightforward consequences of those for Pauli matrices.

Now our toy Fock space is simply the state space for a spin chain, that is, an infinity of distinguishable particles with two energy levels; besides, the operators a_i^ϵ we consider are just independent copies of the above a^ϵ , $\epsilon = +, -, \circ$, that is, for any i , a_i^ϵ is

$$\text{Id} \otimes a^\epsilon \otimes \text{Id}$$

in the decomposition

$$\mathbb{T}\Phi = \mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}} \otimes \mathbb{T}\Phi_{(i)}.$$

The relation of the objects we consider with the physically more customary Pauli matrices is therefore clear.

1.3 Ito calculus on $\mathbb{T}\Phi$

The main difference between Ito calculus on Toy Fock space and on regular Fock space is that predictability should replace adaptability for a simpler transcription of the classical results. Therefore we define the (everywhere defined) *predictable* projection and gradient at time $i \in \mathbb{N}$, of a vector f in $\mathbb{T}\Phi$ by

$$p_i f(M) = \mathbf{1}_{M < i} f(M)$$

$$d_i f(M) = \mathbf{1}_{M < i} f(M \cup i)$$

where $\mathbf{1}_{M < i}$ is equal to one if $M < i$, and zero otherwise.

These operators are called *predictable* because for any $f \in \mathbb{T}\Phi$, both $(p_i f)_{i \geq 0}$ and $(d_i f)_{i \geq 0}$ are *predictable processes*, that is, are sequences of vectors such that the i -th vector belongs to $\mathbb{T}\Phi_i$. In contrast with the continuous time case, there is no definition problem for the d_i 's as individual operators. We will write, to simplify notations,

$$d_A = d_{i_1} \dots d_{i_n} \text{ if } A = \{i_1 < \dots < i_n\},$$

and

$$d_\emptyset = \text{Id}.$$

The other essential tool for quantum Ito calculus is the abstract Ito integral:

Definition 1.1 *A predictable process of vectors $(f_i)_{i \geq 0}$ is said to be Ito-integrable if*

$$\sum \|f_i\|^2 < +\infty.$$

One then defines its Ito integral as the sum of mutually orthogonal terms

$$\sum_i f_i X_i.$$

It can be alternatively described as the vector $I(f)$ such that

$$I(f)(M) = f_{\vee M}(M - \vee M) \text{ and } I(f)(\emptyset) = 0,$$

where $\vee M$ denotes the largest element in the n -uple M .

Let us stress the fact that, in $f_i X_i$ the product is just a tensor product in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_i$ thanks to the previsibility of the process: f_i belongs to $\mathbb{T}\Phi_i$, X_i belongs to $\mathbb{T}\Phi_i$.

The condition for the alternative definition to actually define a square-integrable function of A is easily seen to be the above Ito-integrability condition.

Substituting the equality $d_i f = \sum_{A < i} f(A + i) X_A$ in the chaotic decomposition of a vector f yields the following results:

Proposition 1.2 *Any $f \in \mathbb{T}\Phi$ admits a unique decomposition of the form*

$$f = f(\emptyset)\Omega + \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i f X_i$$

and one has the associated isometry formula:

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \|d_i f\|^2.$$

This decomposition is called the predictable representation of f .

The isometry formula polarizes to the following adjoint relation:

$$\left\langle \sum_i f_i X_i, g \right\rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle f_i, d_i g \rangle$$

for all $g \in \mathbb{T}\Phi$ and all Ito-integrable process $(f_i)_{i \geq 0}$ of vectors of $\mathbb{T}\Phi$.

1.4 Quantum stochastic integration on $\mathbb{T}\Phi$

Our definition of quantum stochastic integrals is partly inspired by their continuous-time analogues as defined by Attal and Lindsay (see [A-L]); indeed, it will turn out that a very natural definition of integrals as sums $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ is equivalent to a discrete-time transcription of Attal and Lindsay's algebraic definitions. First of all we have to define predictability of an operator on $\mathbb{T}\Phi$; a classical, i -predictable random variable, identified in our framework with the associated multiplication operator \mathcal{M}_f , has the property of decomposing as $M_f \otimes \text{Id}$ in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$. We keep that feature as ground for the definition of i -predictable operators:

Definition 1.3 *An operator is i -predictable if it is of the form $h \otimes \text{Id}$ in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{[i]}$.*

It is clear from this definition that an i -predictable operator is bounded and therefore can be extended to an everywhere defined operator of the above form. We will therefore always assume predictable operators to be everywhere defined.

The following lemma can be deduced from the former definition and links our definition with a more algebraic approach which would be a transcription of Attal and Lindsay's definition:

Lemma 1.4 *A bounded operator h on $\mathbb{T}\Phi$ is i -predictable if and only if it satisfies the following conditions:*

- *Its domain $\text{Dom } h$ is stable by p_i and by all operators d_j , $j \geq i$.*
- *The following equalities hold on $\text{Dom } h$:*

$$\begin{aligned} h p_i &= p_i h \text{ and} \\ h d_j &= d_j h \text{ for all } j \geq i. \end{aligned}$$

Proof.

It is clear that an i -predictable operator satisfies the above properties. Conversely, one can prove that the commutation relations in the statement of the lemma are equivalent to the relation

$$h f(M) = (h p_i d_{M \cap \{i, \dots\}}) f(M \cap \{0, \dots, i-1\}) \quad (1.1)$$

for all f in $Dom h$, all M in \mathcal{P} . From this relation one can then show that, for any vector of the form $f \otimes g$ in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$, one has $f \in Dom h$ and $h(f \otimes g) = (hf) \otimes g$. The boundedness of h implies that it is of the form $h \otimes Id$.

□

We will now define quantum stochastic integrals in discrete time; first remark that we wish these integrals to give analogues of predictable representations for operators; this means that we want to be able to write operators in the form $\sum_i h_i a_i$. What's more, we wish to be able to consider the classical case where h_i, a_i are multiplication operators and yet the composition $h_i a_i$ should involve no probabilistic interpretation, so that the operators h_i and a_i should be tensorially independent and the composition $h_i a_i$ should be a tensor decomposition in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$. We have remarked already that $a_i^+, a_i^-, a_i^\circ, Id$, is a basis for $\mathbb{T}\Phi_{\{i\}}$; for all these reasons we will consider integrals as series of the form $\sum_i h_i a_i^\epsilon$ where every h_i is i -predictable.

We call *predictable process* a process $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of operators, such that every h_i is i -predictable.

Definition 1.5 Let $(h_i^\epsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ be a predictable process. For any ϵ in $\{+, -, \circ, \times\}$, we define the integral of $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ with respect to a^ϵ , as the operator series $\sum_{i \in \mathbb{N}} h_i a_i^\epsilon$ in the weak sense that

- $Dom \sum_i h_i a_i^\epsilon$ is the set of all $f \in \mathbb{T}\Phi$ such that

$$\begin{cases} \text{for all } M \in \mathcal{P}, \sum_{i \in \mathbb{N}} |h_i a_i^\epsilon f(M)| < +\infty \\ M \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i a_i^\epsilon f(M) \text{ is square-integrable.} \end{cases}$$

- $\sum_i h_i a_i^\epsilon f$ is defined by

$$\left(\sum_i h_i a_i^\epsilon f\right)(M) = \sum_i (h_i a_i^\epsilon f(M))$$

for all M in \mathcal{P} .

For some of the results to come we will need more restrictive summability assumptions; we therefore define *restricted integrals*:

Definition 1.6 Let $(h_i^\epsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ be a predictable process. For any ϵ in $\{+, -, \circ, \times\}$, we define the restricted integral $\sum_{i \in \mathbb{N}}^R h_i a_i^\epsilon$ of $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ with respect to a^ϵ , as the restriction of the integral $\sum_{i \in \mathbb{N}} h_i a_i^\epsilon$ to the set of vectors f in $Dom \sum_i h_i a_i^\epsilon$ which are such that

$$M \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} |h_i a_i^\epsilon f(M)|$$

is a square-integrable function on \mathcal{P} .

We have talked about the relation between the above described, natural definitions of integrals and discrete-time analogues of Attal and Lindsay's algebraic definitions of quantum stochastic integrals. One can see from the definitions of operators a^ϵ , $\epsilon = +, \circ, -$, that

- the quantity $a_i^+ f(M)$ is null if $i \notin M$ and if $i \in M$ then $a_i^+ f(M) = f(M - i)$. Therefore we have for all M in \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^+ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M - i),$$

and the action of $\sum_i h_i a_i^+$ gives a “discrete Skorohod integral” of $h_i f$.

- the adapted gradient d_i equals $p_i a_i^-$, so that for all M in \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^- f(M) = \sum_i h_i f(M + i),$$

- the above two remarks and the equality $a_i^\circ = a_i^+ a_i^-$ imply that, for all M in \mathcal{P} ,

$$\sum_i h_i a_i^\circ f(M) = \sum_{i \in M} h_i f(M)$$

and in each of these equalities it is equivalent for one expression or for the other to define a summable series (in the case where $\epsilon = -$) and to define an element of $l^2(\mathcal{P})$. It is therefore clear that our integrals are exactly transcriptions of Attal and Lindsay's integrals as defined in [A-L]; in a similar way, the restricted integrals we defined are analogues of their restricted integrals.

In particular these integrals handle just like Attal and Lindsay's, except that, thanks to the discrete-time framework, the integrands h_i are bounded so that one of the domain conditions disappears; yet it is, of all conditions, the least intrinsic to the integral. We take advantage of these analogies to state a few properties of these integrals and refer the reader to the proofs in [A-L] instead of reproducing rather tedious computations. Of the properties we state here, the first is a discrete-time Hudson-Parthasarathy formula for the action of an integral on the exponential domain; the second is an alternative characterization of restricted integrals, in Attal-Meyer form. The third is the famous *Ito formula* which gives the integral representation for the composition of two stochastic integrals.

Proposition 1.7 (Hudson-Parthasarathy formulas) *Let $(h_i)_{i \geq 0}$ be a predictable process, let $\epsilon \in \{+, \circ, -\}$ and assume an exponential vector $e(u)$ to*

be in the domain of the restricted integral $\sum_i^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon$. Then for all v in $l^2(\mathbb{N})$ one has

$$\begin{aligned} \langle e(u), \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^+ a_i^+ e(v) \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{u(i)} \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^+ e(v) \rangle && \text{if } \epsilon = + \\ \langle e(u), \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^- a_i^- e(v) \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{N}} v(i) \langle e(u), h_i^- e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle && \text{if } \epsilon = - \\ \langle e(u), \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\circ a_i^\circ e(v) \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{u(i)} v(i) \langle e(u \mathbb{1}_{\neq i}), h_i^\circ e(v \mathbb{1}_{\neq i}) \rangle && \text{if } \epsilon = \circ \\ \langle e(u), \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\times a_i^\times e(v) \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle e(u), h_i^\times e(v) \rangle && \text{if } \epsilon = \times \end{aligned}$$

and every one of the above series is summable. Here $u \mathbb{1}_{\neq i}$ (respectively $v \mathbb{1}_{\neq i}$) represents the sequence which is equal to u (respectively to v), except for the i -th term, which is null.

The following characterization for restricted integrals can be a most useful tool, especially as it very nicely summarizes the domain conditions for an integral to be defined.

Proposition 1.8 (Attal-Meyer characterization) *Let $(h_i^\epsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ be a predictable process and let $\epsilon \in \{+, \circ, -\}$; the restricted integral $\sum_{i \in \mathbb{N}}^R h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ as the operator h that satisfies*

$$\begin{aligned} hf &= \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i d_i f X_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^+ p_i f X_i && \text{if } \epsilon = +, \\ hf &= \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i d_i f X_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^- d_i f && \text{if } \epsilon = -, \\ hf &= \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i d_i f X_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\circ d_i f X_i && \text{if } \epsilon = \circ, \\ hf &= \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i d_i f X_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\times p_i f && \text{if } \epsilon = \times, \end{aligned}$$

where $h_i = \sum_{j < i} h_j^\epsilon a_j^\epsilon$ and where these equalities mean that

- a vector f is in the domain of h if and only if $h_i d_i f$ is Ito-integrable and the second series is Ito-integrable or summable in norm (depending on ϵ),
- equality holds.

That characterization turns out to be very useful in many proofs; for example the proof of the following proposition, which seems to reduce to a simple permutation of two summations, is made quite painful because of domain considerations. Proposition 1.8 summarizes very nicely these problems so that the proof becomes a (even then tedious) play with commutation relations between integrals and operators p_i, d_i . Notice that in contrast with the continuous-time Attal-Meyer definition, the above is not an implicit definition via a kind of differential equation; the difference is that here, an integral stopped at time i is readily defined as a finite sum of operators.

The next theorem expresses the composition of two quantum stochastic integrals in integral form. Note that, in the following proposition, the considered integrals are restricted ones.

Theorem 1.9 (Ito formula) *Let ϵ and η be two elements of $\{+, \circ, -, \times\}$ and $(h_i^\epsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(k_i^\eta)_{i \in \mathbb{N}}$ be two predictable operator processes on $\mathbb{T}\Phi$. Then the operator*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}}^R h_i a_i^\epsilon \sum_{i \in \mathbb{N}}^R k_i a_j^\eta i - \sum_{i \in \mathbb{N}}^R i h_i^\epsilon k_i a_i^\epsilon - \sum_{i \in \mathbb{N}}^R h_i k_i^\eta a_i^\eta - \sum_{i \in \mathbb{N}}^R h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon, \eta}, \quad (1.2)$$

is a restriction of the zero process; the symbol $a^{\epsilon, \eta}$ is given by the following table

$\overrightarrow{\Gamma}$	-	\circ	+	\times	(1.3)
-	0	a^-	$a^\times - a^\circ$	a^-	
\circ	0	a°	a^+	a°	
+	a°	0	0	a^+	
\times	a^-	a°	a^+	a^\times	

so that $a^{\epsilon, \eta}$ is simply $a^\epsilon a^\eta$.

1.5 Integral representations of operators

Here we simply recall results from [Pau]. In that paper we characterized operators on $\mathbb{T}\Phi$ which can be represented as quantum stochastic integrals, and obtained explicit formulas for the integrands. The most useful result was the following:

Theorem 1.10 *Let h be an operator on $\mathbb{T}\Phi$ such that all vectors X_A belong to $\text{Dom } h \cap \text{Dom } h^*$. Then the integral operator with integrands*

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = d_i h p_i \\ h_i^- p_i = p_i h a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = d_i h a_i^+ p_i - p_i h p_i \end{cases} \quad (1.4)$$

and $\lambda = \langle \Omega, h\Omega \rangle$ is such that

$$h - \left(\lambda + \sum_{i \geq 0} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i \geq 0} h_i^- a_i^\circ + \sum_{i \geq 0} h_i^\circ a_i^\circ \right)$$

is a restriction of the zero process and the set $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ is in its domain.

This theorem is not quite enough if we want to consider predictable processes of operators, that is, sequences $(h_i)_i$ of operators such that h_i is i-predictable, and represent such a process by

$$h_i = \sum_{\epsilon=+,0,-,\times} \sum_{j < i} h_j^\epsilon a_j^\epsilon.$$

The presence of an integral with respect to a^\times is unavoidable if we want the h_j^ϵ 's to be independent of i . Minor adaptations of the above result lead to slightly different formulas and the boundedness of predictable operators simplifies the analytical problems:

Corollary 1.11 *Let $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ be a predictable process of operators on $\mathcal{T}\Phi$. Then for every j the operator h_j is equal to*

$$\lambda + \sum_{i < j} h_i^+ a_i^+ + \sum_{i < j} h_i^- a_i^\circ + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ + \sum_{i < j} h_i^\times a_i^\times$$

where

$$\begin{cases} h_i^+ p_i = & d_i h_{i+1} p_i \\ h_i^- p_i = & p_i h_{i+1} a_i^+ p_i \\ h_i^\circ p_i = & d_i h_{i+1} a_i^+ p_i - p_i h_{i+1} p_i \\ h_i^\times p_i = & p_i (h_{i+1} - h_i) p_i \end{cases} \quad (1.5)$$

and $\lambda = \langle \Omega, h_0 \Omega \rangle$.

2 Approximations of continuous-time integrals

2.1 A reminder on quantum stochastic calculus

We shall here recall briefly some necessary definitions and results from quantum stochastic calculus on regular Fock space, which will seem very analogous to the discrete time theory developed above. First of all, the Fock space is defined as $\Phi = L^2(\mathcal{P})$, *i.e.* the set of functions on the set \mathcal{P} of finite subsets

of \mathbb{R}_+ when \mathcal{P} is equipped with the measure such that the empty set is the only atom, of mass one, and the measure is equal to the n -th dimensional Lebesgue measure on sets of cardinality n . The canonical variable will be denoted by σ , and the infinitesimal volume element by $d\sigma$. We keep the same kind of conventions for the notations on sets as in the discrete case.

Precisely, the elements of Φ are the functions defined on all increasing simplexes $\Sigma_n = \{t_1 < \dots < t_n\}$ of \mathbb{R}_+ such that

$$\sum_n \int_{\Sigma_n} |f(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n < +\infty. \quad (2.1)$$

It is clear from this *chaotic representation* that Φ is isomorphic to the chaos space of any normal martingale (*e.g.* the brownian motion, the compensated Poisson process, the Azéma martingales, etc.). We shall label Φ_t the analogous set of functions defined on simplexes of $[0, t]$; Φ_t will be canonically included in Φ .

A particular set of elements in Φ is relevant, that is the *exponential domain*: an exponential over a function $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ is defined by

$$\mathcal{E}(u)(\sigma) = \prod_{s \in \sigma} u(s). \quad (2.2)$$

It is an element of Φ , as one can see that $\|\mathcal{E}(u)\|^2 \leq e^{\|u\|^2}$. Besides, the exponential domain $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ is total in Φ and is easy to handle so that it is a domain of choice for many proofs.

Abstract Ito calculus Let us consider for all t the element χ_t of Φ defined as follows:

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} \mathbf{1}_{s < t} & \text{if } \sigma = \{s\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The isomorphism from Φ to any chaos space sends χ_t to the brownian motion at time t when onto the chaos space of brownian motion, to the Poisson process at time t when onto the chaos space of Poisson process, etc. One can define an integral of *adapted processes* $(f_t)_{t \geq 0}$ of elements of Φ (that is, such that $f_t \in \Phi_t$ for almost all t), with respect to the curve $(\chi_t)_{t \geq 0}$ (see [At2]), denoted

$$I(f) = \int f_t d\chi_t$$

and satisfying

$$\|I(f)\|^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \|f_t\|^2 dt, \quad (2.3)$$

as soon as the latter real-valued integral is finite; the complete construction uses the isometry property (2.3) for step processes. This integral is called the (abstract) *Ito integral*.

There is an alternate construction for this integral:

$$I(f)(\sigma) = f_{\vee\sigma}(\sigma-) \quad (2.4)$$

where $\vee\sigma$ is the largest element in σ and $\sigma- = \sigma \setminus (\vee\sigma)$. The natural conditions for this to be well defined can be seen to be the same as above, namely the square-integrability of the process $(\|f_t\|)_{t \geq 0}$.

Let us define the two fundamental operators of abstract Ito calculus on Φ :

- the *adapted projection* P_t is defined for all t , as the orthogonal projection onto Φ_t . Explicitly, for any $f \in \Phi$,

$$P_t f(\sigma) = \mathbf{1}_{\sigma < t} f(\sigma); \quad (2.5)$$

- the *adapted gradient* is defined by

$$D_t f(\sigma) = \mathbf{1}_{\sigma < t} f(\sigma \cup t). \quad (2.6)$$

Substituting (2.6) in (2.4) yields immediately

$$f = f(\emptyset) + \int D_t f d\chi_t \quad (2.7)$$

and

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \int \|D_t f\|^2 dt. \quad (2.8)$$

Now notice that we have not been precise in our definition of the operators D_t ; actually it is quite ill-defined in the sense that an individual D_t is not a well-defined operator and all one can say is, thanks to formula (2.8), that for any f , $D_t f$ is defined for almost all t .

Formula (2.7) is the continuous time analogue of a formula proved in Proposition 1.2; it is the predictable representation together with the associated isometry formula on Fock space.

Quantum stochastic integrals We shall here define integrals

$$\int_0^\infty H_s da_s^\epsilon$$

with respect to the three quantum noises da^+ , da° , da^- and to time, which corresponds to the noise da^\times .

The heuristics of the Attal-Meyer quantum stochastic calculus, which we present in a simplified way, derives from the fact that the noises, which will turn out to be differentials of continuous-time fundamental operators, should act just like the fundamental operators of toy Fock space, that is:

- any da_t^ϵ acts only on $\Phi_{[t, t+dt]}$, which from (2.7) can be seen as “generated” by Ω and $d\chi_t$ and
- the da_t^ϵ are given by the following table:

$$da_t^+ \Omega = d\chi_t \text{ and } da_t^+ d\chi_t = 0$$

$$da_t^- \Omega = 0 \text{ and } da_t^- d\chi_t = dt \Omega$$

$$da_t^\circ \Omega = 0 \text{ and } da_t^\circ d\chi_t = d\chi_t$$

$$da_t^\times \Omega = dt \Omega \text{ and } da_t^\times d\chi_t = 0.$$

These heuristics allow us to define integrals $\int H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ for adapted processes $(H_s^\epsilon)_{s \geq 0}$, that is, processes of operators such that for almost all s , all $f \in \text{Dom } H_s$,

$$P_s f \in \text{Dom } H_s^\epsilon, \quad D_u f \in \text{Dom } H_s^\epsilon \text{ for a.a. } u \geq s \text{ and}$$

$$H_s^\epsilon P_s f = P_s H_s^\epsilon f \text{ and } H_s^\epsilon D_u f = D_u H_s^\epsilon f \text{ for a.a. } u \geq s.$$

In that case, a formal computation leads us to give the following definition: the integral $\int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ is defined as the only operator which satisfies the following equality:

$$Hf = \int_0^\infty H_s D_s f d\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s^+ P_s f d\chi_s & \text{if } \epsilon = + \\ \int_0^t H_s^- D_s f ds & \text{if } \epsilon = - \\ \int_0^t H_s^\circ D_s f d\chi_s & \text{if } \epsilon = \circ \end{cases} \quad (2.9)$$

with $H_s = P_s H P_s$. That is, f is in the common domain of the integrals if and only if the right-hand side is well defined and equality holds. One can define an integral $\int_a^b H_s da_s^\epsilon$ as the integral of the process equal to H_s for $s \in [a, b]$ and zero otherwise; one then notices that (2.9) holds equivalently with $H_s = \int_0^s H_r^\epsilon da_r^\epsilon$. We also define the integral of an adapted process $(H_s^\times)_{s \geq 0}$ as the strong integral $\int H_s^\times ds$. The operators a_t^ϵ are then defined as the integrals $\int_0^t da_s^\epsilon$ in the above sense.

We give here as a corollary the formulas of Hudson and Parthasarathy, which originally were the cornerstone of the first theory of quantum stochastic integration on Fock space

Hudson-Parthasarathy formula Let us consider a quantum stochastic integral H defined on the exponential domain (see (2.2)). Then the following equality holds for all $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$, almost all $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\langle \mathcal{E}(u), H\mathcal{E}(v) \rangle = \int_0^\infty \phi(s) \langle \mathcal{E}(u), H_s^\epsilon \mathcal{E}(v) \rangle ds \tag{2.10}$$

where

$$\phi(s) = \begin{cases} \bar{u}(s) & \text{if } \epsilon = + \\ v(s) & \text{if } \epsilon = - \\ \bar{u}(s)v(s) & \text{if } \epsilon = \circ \\ 1 & \text{if } \epsilon = \times. \end{cases}$$

2.2 Explicit formulas for the projections of integrals

We use here the embedding of toy Fock space in regular Fock space defined by Attal in [At3] and the formulas (1.4) to obtain the projection of an integral operator in discrete time. Let us first recall the definitions of [At3]: for any subdivision $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots\}$ of \mathbb{R}_+ (we mean by “subdivision of \mathbb{R}_+ ” that the subdivision is not bounded, that is, that the sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverges to infinity), one defines the following on Φ :

$$a_i^- = \text{Id} \otimes \frac{a_{t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P^{(1)} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^+ = \text{Id} \otimes P_i^{(1)} \frac{a_{t_{i+1}}^+ - a_{t_i}^+}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \otimes \text{Id}$$

$$a_i^\circ = \text{Id} \otimes P^{(1)} (a_{t_{i+1}}^\circ - a_{t_i}^\circ) P^{(1)} \otimes \text{Id},$$

where $P^{(1)}$ represents the projection on the chaos of order 1, and where the tensor decomposition is meant in $\Phi_{t_i} \otimes \Phi_{[t_i, t_{i+1}]} \otimes \Phi_{[t_{i+1}, \infty]}$. The space $\text{T}\Phi(\mathcal{S}) \subset \Phi$ is defined as the closed subspace spanned by the vectors $X_A = \prod_{i \in A} X_i$ for $A \in \mathcal{P}$; it is isomorphic to the toy Fock space, and the restrictions of the above operators a_A^ϵ coincide with the operators defined in the previous section. We denote by $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ the projection on the subspace $\text{T}\Phi(\mathcal{S})$.

The main relations for our computations are given in the following lemma:

Lemma 2.1 *Let us fix a given partition $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$. One has for all $f \in \Phi$,*

$$p_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} P_{t_i} f,$$

$$d_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} D_t f dt,$$

and

$$\mathbb{E}_S \int_0^\infty f_t d\chi_t = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \sum_{i \geq 0} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} f_t dt X_i.$$

Proof.

The third equality is a consequence of the predictable representation property on toy Fock space and of the second equality; the first is straightforward. We therefore prove only the second one:

Since $d_i = p_i a_i^-$, one has:

$$d_i \mathbb{E}_S f = p_i a_i^- \mathbb{E}_S f = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathbb{E}_S P_{t_i} ((a_{t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-) f),$$

but

$$(a_{t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-) f = \int_{t_i}^\infty (a_{t_i \wedge t_{i+1}}^- - a_{t_i}^-) D_t f d\chi_t + \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_t f dt$$

by the Attal-Meyer formulas, so

$$\begin{aligned} d_i \mathbb{E}_S f &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} p_i \mathbb{E}_S \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} D_t f dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathbb{E}_S \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} D_t f dt \right). \end{aligned}$$

□

We need to make some assumptions on the considered operator integrals: indeed we want to compute operators $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ and need these to have large enough domain for us to apply our representation theorem 1.10. The following will therefore be assumed from now on:

(HD) The integrals $\int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ and $\int_0^\infty (H_s^\epsilon)^* da'^\epsilon$ are well-defined on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ and all its images by any \mathbb{E}_S .

Here ϵ' is defined by the following:

$$+ ' = - \quad - ' = + \quad \circ ' = \circ.$$

The assumption **(HD)** implies in particular, if we denote $H = \int_0^\infty H_s da_s^\epsilon$, that H^* equals $\int_0^\infty (H_s^\epsilon)^* da'^\epsilon$ on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ and all its projections by \mathbb{E}_S .

The above hypothesis implies in particular that the projections $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ and $\mathbb{E}_S H^* \mathbb{E}_S$ are defined on all finite linear combinations of X_A 's. Indeed, by Lemma 3.2

$$\mathbb{E}_S \mathcal{E}(1) = \Omega$$

$$\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} X_i + \Omega$$

$$\mathbb{E}_S \mathcal{E}(\mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}] \cup [t_j, t_{j+1}]}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \sqrt{t_{j+1} - t_j} X_{i,j} + \sqrt{t_{i+1} - t_i} X_i + \sqrt{t_{j+1} - t_j} X_j + \Omega$$

and so on. We therefore apply Theorem 1.10 to obtain the following:

Proposition 2.2 *Let $H = \int H_t^\epsilon da_t^\epsilon$ be a quantum stochastic integral on Φ that satisfies the assumptions **(HD)**. Then $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ has a representation as a discrete quantum stochastic integral which holds at least on vectors $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$ and the integrands h_i^+, h_i^-, h_i° are given by:*

- for $\epsilon = +$,

$$h_i^+ = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ dt$$

$$h_i^- = 0$$

$$h_i^\circ = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^+ (a_t^+ - a_{t_i}^+) dt$$

- for $\epsilon = -$,

$$h_i^+ = 0$$

$$h_i^- = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^- dt$$

$$h_i^\circ = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} (a_t^- - a_{t_i}^-) H_t^- dt$$

- for $\epsilon = \circ$,

$$h_i^+ = 0$$

$$h_i^- = 0$$

$$h_i^\circ = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^\circ dt$$

where the equalities are over $\mathcal{T}\Phi_i$ (considering, for the right-hand-side, $\mathcal{T}\Phi_i$ as a subspace of Φ_{t_i}) and where all operator integrals are in the strong sense.

In the case where $\epsilon = \circ$, the integral representation has the exponential domain of $\mathcal{T}\Phi$ in its restricted domain.

Remark: it is rather disappointing that the discrete-time is not defined on a larger space, for example on the exponential domain of $\mathbb{T}\Phi$ in the case where $\epsilon = +$ ou $-$. Let us discuss this phenomenon: notice first that, in any case,

$$h_i^+ a_i^+ + h_i^- a_i^- + h_i^\circ a_i^\circ = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\epsilon da_s^\epsilon \mathbb{E}_{\mathcal{S}}.$$

Denote $H_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\epsilon a_s^\epsilon$. For all $f \in \text{Dom } h$, all $A \in \mathcal{P}$, one has

$$\sum_i |h_i^\epsilon a_i^\epsilon f(A)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_i |h_i^\circ a_i^\circ f(A)| < +\infty, \quad (2.11)$$

so that the problems will arise from summability over A in \mathcal{P} . To prove the above claim (2.11), notice first that it is straightforward when $\epsilon = +$; continue with $\epsilon = -$. The sum $\sum_i |\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(A)|$ is smaller than

$$\sum_i \frac{1}{\sqrt{(t_{i_1+1} - t_{i_1}) \cdots (t_{i_n+1} - t_{i_n})}} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \cdots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}} |H_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(s_1, \dots, s_n)| ds_1 \cdots ds_n \quad (2.12)$$

if $A = \{i_1, \dots, i_n\}$. This is smaller than

$$\sum_i \mathbb{1}_{i=i_n} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_s D_s \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f\|^2 ds \right)^{1/2} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_s^- D_s \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f\|$$

which is finite. Besides, $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} H_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ is $h_i^- a_i^- + h_i^\circ a_i^\circ$ and the condition $\sum_i |h_i^\circ a_i^\circ f(A)|$ is straightforward since only a finite number of terms in the sum are non null and this implies the condition on $\sum_i h_i^- a_i^-$.

Then one has $\sum_{A \in \mathcal{P}} |\sum_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} H_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f(A)|^2 < +\infty$ since it is dominated by $\|\sum_i H_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} f\|^2$. Therefore one deduces that

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_i (h_i^\epsilon a_i^\epsilon + h_i^\circ a_i^\circ) f(A) \right|^2 < +\infty, \quad (2.13)$$

but there is no reason why one should have

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_i h_i^+ a_i^+ f(A) \right|^2 < +\infty \quad \text{and} \quad \sum_{A \in \mathcal{P}} \left| \sum_i h_i^\circ a_i^\circ f(A) \right|^2 < +\infty;$$

choose for example $\epsilon = +$ and $f = \mathcal{E}(u)$ to see in detail what happens. For $t_i \leq t < t_{i+1}$ one has

$$P_t e(\tilde{u}) = e(\tilde{u}_i) + \tilde{u}(i) e(\tilde{u}_i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.14)$$

which implies (2.13) by the Attal-Meyer formulation but this does not imply that

$$\int_0^\infty \|H_t^+ e(\tilde{u}_i)\|^2 dt + \int_0^\infty \left\| H_t^+ \tilde{u}(i) e(\tilde{u}_i) \frac{\chi_t - \chi_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \right\|^2 dt < +\infty.$$

One can on the other hand obtain the definiteness of the integral $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ on the exponential domain from the fact that for $t_i \leq t < t_{i+1}$,

$$\frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} H_t^\circ e(\tilde{u}_i) = H_t^\circ D_t e(\tilde{u}).$$

The equality (2.14) is also the reason for the surprising presence of a a° integral in the projection of an integral with respect to a^ϵ when ϵ is $+$ or $-$.

We prove now that that parasite integral vanishes in the limit; yet, since we do not know if that integral is well-defined beyond the linear span of $\{X_A, A \in \mathcal{P}\}$, we have to prove that result on a subdomain of $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ such that its projections \mathbb{E}_S belong to that linear span. The set of exponential vectors of square-integrable functions with compact support fits that need:

Lemma 2.3 *Let $H = \int_0^\infty H_s da_s^\epsilon$ be an integral that satisfies the assumptions (HD) with $\epsilon = +$ or $-$. Then the parasite a° integral which arises in the projection $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ vanishes as the mesh size $|\mathcal{S}|$ of the partition tends to zero, in the sense that*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i^\circ a_i^\circ \mathbb{E}_S \mathcal{E}(v) \rangle$$

tends to zero as $|\mathcal{S}|$ goes to zero, for any u, v in $L^2(\mathbb{R}_+)$ with compact support.

Proof.

Take for example $\epsilon = +$; then one can see that

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S \sum_i h_i^\circ a_i^\circ \mathbb{E}_S \mathcal{E}(v) \rangle &= \sum_i \tilde{u}(i) \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), h_i^\circ e(\tilde{v}_i) \rangle \\ &= \sum_i \frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e(\tilde{u}_i), H_t^+ P_t(e(\tilde{v}_{i+1}) - e(\tilde{v}_i)) \rangle \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle D_t \mathbb{E}_S \mathcal{E}(u), H_t^+ P_t(e(\tilde{v}_{i+1}) - e(\tilde{v}_i)) \rangle. \end{aligned}$$

Now, by the assumptions (HD) we know that

$$\int_0^\infty \|(H_t^-)^* D_t \mathbb{E}_S \mathcal{E}(u)\| dt < +\infty$$

whereas $\|e(\tilde{v}_{i+1}) - e(\tilde{v}_i)\|$ is of order $\tilde{v}(i)$, which is smaller than

$$\sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(t)\|^2 dt}$$

and converges to zero uniformly in i (see Lemma 3.5 below).

□

Proof of Proposition 2.2

Let us prove for example the case $\epsilon = +$. Let us consider the action of h_i^+ , h_i^- , h_i° on a vector X_A with $A < i$. One has by (1.4) and Lemma 2.1,

$$\begin{aligned} h_i^+ X_A &= d_i \mathbb{E}_S H X_A \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_t D_t H X_A dt \end{aligned}$$

and the Attal-Meyer equations yield $D_t H X_A = H_t^+ X_A$. and we obtain the expression of h_i^+ . The value of h_i^- is easily computed:

$$\begin{aligned} h_i^- X_A &= p_i \mathbb{E}_S H a_i^+ X_A \\ &= \mathbb{E}_S P_{t_i} a_i^+ X_A \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned} h_i^\circ X_A &= d_i \mathbb{E}_S H a_i^+ X_A - p_i \mathbb{E}_S H X_A \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_t D_t H a_i^+ X_A dt - \mathbb{E}_S P_{t_i} H X_A. \end{aligned}$$

We need to compute $H a_i^+ X_A = H X_{A+i}$:

$$\begin{aligned} H X_{A+i} &= \int_0^\infty H_s D_s X_{A+i} d\chi_s + \int_0^\infty H_s^+ P_s X_{A+i} d\chi_s \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \frac{X_A}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} d\chi_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^+ X_A \frac{\chi_s - \chi_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} d\chi_s, \end{aligned}$$

so that

$$P_{t_i} D_t H X_{A+i} = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P_{t_i} H_t X_A + \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} P_{t_i} H_t^+ (X_A (\chi_t - \chi_{t_i}));$$

now we have

$$P_{t_i} H_t X_A - P_{t_i} H X_A = 0$$

for $t \geq t_i$ and

$$H_t^+(X_A(\chi_t - \chi_{t_i})) = H_t^+(a_t^+ - a_{t_i}^+)X_A.$$

The proof is complete. The other two cases are treated exactly in the same way.

□

Suppose now that we want to project an integral $H = \int H_s^\times da_s^\times$; if we compute $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ we obtain a discrete time integral of the form

$$\sum_i h_i^+ a_i^+ + \sum_i h_i^- a_i^- + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ. \tag{2.15}$$

Indeed, what we obtain is actually the projection of the (unique) integral representation of H in the form

$$\int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

where the projections are as before. Even if we compute the representation of the process $(\mathbb{E}_S \int_0^{t_i} H_s^\times da_s^\times)_{i \geq 0}$ what we obtain is more related to the above representation (2.15) of H than to the process $(H_s^\times)_{s \in \mathbb{R}_+}$. The reason is the following: the representation of H as $\int_0^\infty H_s^\times ds$ is not unique; if we compute projections according to our schemes, be it projections of the process or projections of the operator only, we compute an unique representation, that is, we try to compute a representation with more information than the original one, so that one can not relate explicitly the coefficients of the projection to the process $(H_s^\times)_{s \in \mathbb{R}_+}$. This is why it will be more convenient to take a completely different approach to project integrals $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$. We only state the following proposition, which shows an alternative way to project integrals with respect to time.

Proposition 2.4 *Let $H = \int_0^{+\infty} H_s^\times da_s^\times$ be an integral in Φ which satisfies the assumptions (HD). Then $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ can be written as the sum $\sum_{i \geq 1} h_i'^\times$, where*

$$h_i'^\times = \mathbb{E}_S \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_t^\times dt \mathbb{E}_S$$

is i -predictable for each i .

We should emphasize here on the fact that the representation given above is not a contradiction to the formulas (1.5): it is just another consequence of the fact that in discrete-time also, the representation of *one* operator h as $h = \sum_{\epsilon=+,0,-,\times} \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ is not unique.

3 Convergence of the Ito table

Here we want to prove that the Ito formula for continuous-time quantum stochastic integrals is a limit of the one for discrete-time integrals; to achieve this we actually reprove the quantum Ito formula for regular semimartingales as defined in [At1], using nothing but our approximation scheme and the Ito formula on toy Fock space. For this we define below our assumptions on the considered quantum stochastic integrals. The proof will be done in three steps: first, we will show that the unwanted a° integrals that appear when projecting integrals with respect to a^+ or a^- vanish, as well as the terms they create when two projections are composed. Second, we shall prove that, asymptotically, one can compute the composition of two projections using the *continuous* Ito table. The third step will be dedicated to showing that the remaining discrete-time integrals obtained after composition do converge to the continuous-time integrals we are looking for.

Throughout this section we will make the following assumptions on the operator integrals

$$H = \int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon :$$

$$(HS) \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ the integrands } H_t^\epsilon \text{ are bounded operators such that } t \mapsto \|H_t^\epsilon\| \text{ is:} \\ \quad \bullet \text{ square-integrable if } \epsilon = + \text{ or } -, \\ \quad \bullet \text{ integrable if } \epsilon = \times, \\ \quad \bullet \text{ essentially bounded if } \epsilon = \circ \\ 2. H \text{ is a bounded operator on } \Phi. \end{array} \right.$$

Notice that these assumptions are the ones made for all terms of a regular semimartingale process as defined in [At1].

For the rest of this paragraph assume that $\epsilon \neq \times$. With such assumptions, it is straightforward from general stochastic integration theory on Φ that $H = \int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon$ is the strong limit of the $\int_0^T H_t^\epsilon da_t^\epsilon$ as T goes to infinity, with uniform norm estimates. As a consequence, H is the strong sum of all $\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_t^\epsilon da_t^\epsilon$ and $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ is the strong sum of all

$$\mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_t^\epsilon dt \mathbb{E}_S = h_i^+ a_i^+ + h_i^- a_i^- + h_i^\circ a_i^\circ.$$

This implies in particular that the integral $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ obtained from an integral $\int H_s^\circ da_s^\circ$ by Proposition 2.2 is defined on the whole of $\mathbb{T}\Phi$. For the cases where $\epsilon = +$ or $-$ we still have to prove that $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ and $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ are defined separately and not only in $\sum_i (h_i^\epsilon a_i^\epsilon + h_i^\circ a_i^\circ)$. According to the remark made after Proposition 2.2 it suffices to show that, for all f in Φ , the expression $A \mapsto \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon \mathbb{E}_S f(A)$ defines an element of $\mathbb{T}\Phi$.

Lemma 3.1 *Let ϵ equal $+$ or $-$ and the integral $\int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ satisfy the assumptions **(HS)**. Then the integral $\sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$ associated to $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ has the whole of $\mathbb{T}\Phi$ for restricted domain.*

Proof.

By the Attal-Meyer characterization (Proposition 1.8) of restricted integrals it is enough to prove that for all f in Φ , the vector $\mathbb{E}_S f$ of $\mathbb{T}\Phi$ is such that $\sum_i \|h_i d_i \mathbb{E}_S f\|^2$ and $\sum_i \|h_i^+ p_i \mathbb{E}_S f\|^2$ or $\sum_i \|h_i^- d_i \mathbb{E}_S f\|^2$, depending on ϵ , are finite. This is obtained from the fact that

$$\|h_i\| \leq \|H\|$$

and that

$$\|h_i^\pm\|^2 \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_s\|^2 ds$$

is square-integrable. □

Let us fix the notations to be used in the rest of the paper: we will consider two integrals

$$H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon \quad \text{et} \quad K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$$

which satisfy the assumptions **(HS)**; ϵ and η can take the values $+, -, \circ$ or \times .

The projections $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$, $\mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S$ will be denoted by h , k respectively. In the case where ϵ or η is different from \times , the processes $(h_i^\epsilon)_{i \in \mathbb{N}}$, $(k_i^\eta)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(h_i^\circ)_{i \in \mathbb{N}}$, $(k_i^\circ)_{i \in \mathbb{N}}$ are as defined in Proposition 2.2; we will discuss again later the case of $\epsilon = \times$. If ϵ is $+$ or $-$ then we have seen that h is equal to

$$h = \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon + \sum_i h_i^\circ a_i^\circ;$$

we then denote by \tilde{h}° the integral $\sum_i h_i^\circ a_i^\circ$ which we will usually call the “parasite” term. As before, h_j will denote the integral stopped at time j

$$h_j = \sum_{i < j} h_i^\epsilon a_i^\epsilon + \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ;$$

and \tilde{h}_j° the integral

$$\tilde{h}_j^\circ = \sum_{i < j} h_i^\circ a_i^\circ.$$

We need a few lemmas to start the technical proofs:

Lemma 3.2 *Let u belong to $L^2(\mathbb{R}_+)$. The projection $\mathbb{E}_S \mathcal{E}(u)$ is again an exponential vector in $\mathcal{T}\Phi$ over the function $\tilde{u}(i) = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds$. When seen as a vector of Φ , it is not necessarily an exponential vector, but one has for all $t_i \leq t < t_{i+1}$,*

$$D_t e(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} e(\tilde{u}_i)$$

Proof.

For all $A = \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{P}$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_S \mathcal{E}(u)(A) &= \frac{1}{\sqrt{(t_{i_1+1}-t_{i_1}) \dots (t_{i_n+1}-t_{i_n})}} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \dots \int_{t_{i_n}}^{t_{i_n+1}} \mathcal{E}(u)(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n \\ &= \prod_{i \in A} \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) dt \\ &= \prod_{i \in A} \tilde{u}(i). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 *For all $s < t$, the operator $(a_t^+ - a_s^+) P_s$ is bounded on the exponential domain, with norm $\sqrt{t-s}$.*

Proof.

On Φ_s , the operator $(a_t^+ - a_s^+)$ is simply the tensor multiplication by $\chi_t - \chi_s$.

□

Lemma 3.4 *Let $\epsilon = +$ or $-$. Then for all $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, we have*

$$\|h_i^\epsilon e(\tilde{u}_i)\| \leq \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^\epsilon\| dt \|e(\tilde{u}_i)\| \quad (3.1)$$

$$\|\tilde{h}_i^\circ e(\tilde{u}_i)\| \leq \|u\|_{L^2} \sqrt{\int_0^\infty \|H_t^\epsilon\|^2 dt} \exp \|u\|^2/2 \quad (3.2)$$

Proof.

The first inequality is trivial from Lemma 3.3. The second one comes from $a_i^\circ e(\tilde{u}) = \tilde{u}(i) e(\tilde{u}_i) e(\tilde{u}_{(i)})$ and $\tilde{h}_i^\circ = \sum_{j < i} h_j^\circ a_j^\circ$.

□

Lemma 3.5 *Let f be an integrable function over \mathbb{R}_+ . One has*

$$\sup_{|t-s| < \delta} \int_s^t |f(u)| du \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Proof.

The function $x \mapsto \int_0^x |f(u)| du$ has arbitrarily small variations outside of a compact set, and is continuous, hence uniformly continuous, on that compact set.

□

We shall first simplify the case when $\epsilon = \times$, proving the fact that one can choose to consider the alternative description described at the end of the preceding section.

Lemma 3.6 *Let $H = \int_0^\infty H_s^\times ds$ be an operator satisfying **(HS)**. Then H is equal to the series $\sum_i h_i^\times$, where*

$$h_i p_i = \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i} H_t^\times dt \mathbb{E}_S p_i.$$

Proof.

First let us observe that, by the strong left-continuity of the process, which is obvious from **(HS)**, and Proposition 2.4, the result holds if we consider $h_i^{\prime \times}$ in place of h_i^\times . Now let us prove that

$$\begin{aligned} & \sum_i (h_i^{\prime \times} - h_i^\times) \\ &= \sum_i (\mathbb{E}_S \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds \mathbb{E}_S - \mathbb{E}_S (p_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds p_i) \otimes I \mathbb{E}_S) \end{aligned}$$

converges strongly to zero on the exponential set. Let us say a word about the tensor product which appears in that formula: the projection h_i is the action of $\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds$ before time t_i , so that its tensor product decomposition in $\mathbb{T}\Phi_i \otimes \mathbb{T}\Phi_i$ is given as in the above formula.

Since the considered operators are norm-bounded (with bound $2 \int_0^t \|H_s\| ds$), convergence on any vector in Φ will follow. The above operator, when applied

to an exponential vector $\mathcal{E}(u)$, yields

$$\begin{aligned}
& \sum_i (\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds e(\tilde{u}_i) - p_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}_i)) e(\tilde{u}_{[i]}) \\
&= \sum_i \left((I - p_i) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}_i) \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}_{i+1}) + \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds e(\tilde{u}_i) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds (e(\tilde{u}_{i+1}) - e(\tilde{u}_i)) \right) e(\tilde{u}_{[i]}) \\
&= \sum_i (p_{i+1} - p_i) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}_i) e(\tilde{u}_{[i]}) \\
&\quad - \sum_i (\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}_{i+1}) + \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds e(\tilde{u}_{i+1})) \\
&\quad + \sum_i (\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds (e(\tilde{u}_{i+1}) - e(\tilde{u}_i))).
\end{aligned}$$

The last sum is smaller in norm than $\sum_i |\tilde{u}(i)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_s^\times\| ds \|e(\tilde{u})\|$, hence smaller than the vanishing sequence $\int \|H_s^\times\| ds \sup_i |\tilde{u}(i)| \|\mathcal{E}(u)\|$. The second sum is

$$\sum_i \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^\times ds e(\tilde{u}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^\times ds e(\tilde{u}) \right),$$

hence appears as the sum of increments of a summable sequence; therefore it is either zero or of the form $\int_{t_i}^t H_s^\times ds e(\tilde{u})$ for the largest i s.t. $t_i \leq t$, in which case it is bounded by $\int_{t_i}^t \|H_s^\times\| ds \|\mathcal{E}(u)\|$ and therefore vanishes by Lemma 3.5. The first term is equal to

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_0^\infty (p_{i+1} - p_i) H_s^\times e(\tilde{u}_i) e(\tilde{u}_{[i]}) ds$$

where i is actually an $i(s)$, which is defined by $t_{i(s)} \leq s < t_{i(s)+1}$. The integrand is pointwise bounded by $\|H_s^\times\| \|\mathcal{E}(u)\|$, which is an integrable function, independently of the partition, and converges pointwise to zero with the mesh size of the partition. Lebesgue's dominated convergence theorem thus applies and the proof is complete. \square

Consequence of Lemma 3.6 Notice that a projection $\mathbb{E}_S \int H_s^\times da_s^\times$ will, in our scheme, be composed only with bounded operators. Besides, we will from now on only be interested in weak convergences so that one can always consider adjoint relations. Because of that, we will systematically replace the projection $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ of an integral $H = \int H_s^\times da_s^\times$ by the alternative description described in Lemma 3.6.

The following proposition constitutes the first of the three announced steps of our demonstration, that is, getting rid of the unwanted a° from the projection, and of the terms they induce after composition:

Proposition 3.7 *Let $\epsilon, \eta \in \{+, -, \circ, \times\}$ and let H, K be two operator integrals satisfying the assumptions **(HS)**. Then for all $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$,*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S \mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S \mathcal{E}(v) \rangle - \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon \sum_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle$$

tends to zero as the partition's mesh size tends to zero.

Proof.

If both ϵ and η are \circ , there is nothing to do but recall that $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ and $\mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S$ converge strongly on Φ and are uniformly bounded in norm. If one of ϵ, η is \times , the corresponding projection can be immediately replaced by the integral with respect to a^\times thanks to the emphasized consequence of Lemma 3.6.

To work out the other cases notice that

$$hk = ((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ)((k - \tilde{k}^\circ) + \tilde{k}^\circ) \text{ if } \epsilon \text{ and } \eta \text{ are both } + \text{ or } -,$$

$$hk = ((h - \tilde{h}^\circ) + \tilde{h}^\circ)k \text{ if for example } \epsilon \text{ only is } + \text{ or } -.$$

Besides, $h - \tilde{h}^\circ = \sum_i h_i^\epsilon a_i^\epsilon$, so that one only has to show that $\tilde{h}^\circ k, hk^\circ$ and $h^\circ \tilde{k}^\circ$ tend to zero in our weak sense. Thanks to adjointness properties the proof reduces to proving that

$$\tilde{h}^\circ k \text{ converges to zero for } \epsilon = -, + \text{ and any } \eta \tag{3.3}$$

and

$$\tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ \text{ converges to zero when } \epsilon \text{ and } \eta \text{ are both } + \text{ or } - \tag{3.4}$$

where convergence is meant “asymptotically on the exponential domain” in the same sense as in the proposition.

For the first assumption (3.3), let us observe that

$$\langle e(\tilde{u}), \tilde{h}^\circ k e(\tilde{v}) \rangle = \langle \tilde{h}^{\circ*} e(\tilde{u}), k e(\tilde{v}) \rangle$$

and that, since $k = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ is bounded and $(\tilde{h}^\circ)^* e(\tilde{u})$ is uniformly bounded by Lemma 3.4, one can replace $e(\tilde{v})$ by anything which tends to it in norm with the mesh size $|\mathcal{S}|$. One can approximate $K\mathcal{E}(v)$ by a linear combination of exponential vectors; let us suppose for simplicity that $K\mathcal{E}(v)$ is approximated by a single vector $\mathcal{E}(w)$. Then, since

$$\begin{aligned} \|ke(\tilde{v}) - e(\tilde{w})\| &= \|\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(w) - \mathbb{E}_{\mathcal{S}}K\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(v)\| \\ &\leq \|\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(w) - \mathbb{E}_{\mathcal{S}}K\mathcal{E}(v)\| + \|\mathbb{E}_{\mathcal{S}}K\mathcal{E}(v) - \mathbb{E}_{\mathcal{S}}K\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(v)\| \\ &\leq \|K\mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(w)\| + \|K\| \|\mathcal{E}(v) - \mathbb{E}_{\mathcal{S}}\mathcal{E}(v)\|, \end{aligned}$$

and both terms on the right-hand side can be made arbitrarily small if the partition is refined enough, one can replace $ke(\tilde{v})$ by $e(\tilde{w})$. Now our assumption reduces to showing that $\langle e(\tilde{u}), \tilde{h}^\circ e(\tilde{w}) \rangle$ tends to zero with $|\mathcal{S}|$. But it is equal to

$$\begin{aligned} &\sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), h_i^\circ e(\tilde{w}_i) \rangle \langle e(\tilde{u}_i), e(\tilde{v}_i) \rangle \\ &= \sum_i \frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e(\tilde{u}_i), P_{t_i}(a_t^- - a_{t_i}^-) H_t^- e(\tilde{w}_i) \rangle dt \langle e(\tilde{u}_i), e(\tilde{v}_i) \rangle \end{aligned}$$

if for example $\epsilon = -$ (the case $\epsilon = +$ is proved by dual computations). Using Lemma 3.3, one has

$$\begin{aligned} \left| \langle e(\tilde{u}), \tilde{h}^\circ e(\tilde{w}) \rangle \right| &\leq \sum_i \frac{|\tilde{u}(i) \tilde{w}(i)|}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^-\| dt \|e(\tilde{u})\| \|e(\tilde{w})\| \\ &\leq \sum_i |\tilde{u}(i) \tilde{w}(i)| \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^-\|^2 dt} \|e(\tilde{u})\| \|e(\tilde{w})\| \\ &\leq \|u\| \|w\| \exp \|u\| \exp \|w\| \sqrt{\sup_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^-\|^2 dt} \end{aligned}$$

and the last term converges to zero by Lemma 3.5.

To prove (3.4) let us write

$$\tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ = \sum_i h_i^\circ \tilde{k}_i^\circ a_i^\circ + \sum_i \tilde{h}_i^\circ k_i^\circ a_i^\circ + \sum_i h_i^\circ k_i^\circ a_i^\circ$$

using the discrete time Ito formula. That implies

$$\langle e(\tilde{u}), \tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ e(\tilde{v}) \rangle = \sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^\circ \tilde{k}_i^\circ + \tilde{h}_i^\circ k_i^\circ + h_i^\circ k_i^\circ) e(\tilde{v}_i) \rangle$$

up to uniformly bounded factors $\langle e(\tilde{u}_i), e(\tilde{v}_i) \rangle$. For the sake of lisibility, we will forget it and all its avatars from now on. Using Lemma 3.4 and the fact that $\tilde{h}_i^\circ, \tilde{k}_i^\circ$ are bounded with norms $\leq \|H\|, \|K\|$, one has a majoration of $|\langle e(\tilde{u}), \tilde{h}^\circ \tilde{k}^\circ e(\tilde{v}) \rangle|$ by three terms of the kind

$$\sum_i |\tilde{u}(i)\tilde{v}(i)| \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t\|^2 dt} \times$$

and since the series $\sum \tilde{u}(i)\tilde{v}(i)$ is convergent, one concludes again using Lemma 3.5. □

Proposition 3.8 *With the assumptions of Proposition 3.7, the quantity*

$$\langle \mathcal{E}(u), \mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S K \mathbb{E}_S \mathcal{E}(v) \rangle - \langle e(\tilde{u}), \left(\sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^\epsilon + \sum_i h_i k_i^\eta a_i^\eta + \sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon,\eta} \right) e(\tilde{v}) \rangle$$

tends to zero as the partition's mesh size tends to zero, where ϵ,η is computed using formally the continuous Ito formula.

Proof.

All that is left to prove is that

$$\text{for } (\epsilon, \eta) = (+, -), \text{ one has } \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0 \quad (3.5)$$

and

$$\text{for } (\epsilon, \eta) = (-, +), \text{ one has } \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0. \quad (3.6)$$

plus the convergence to zero in all cases involving an integral with respect to \times . The proofs of (3.5) (3.6) are the same; let us prove for example (3.5):

$$|\langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^- k_i^+ a_i^\circ e(\tilde{v}) \rangle| \leq \sum_i |\tilde{u}(i)| |\tilde{v}(i)| \|h_i^{-*} e(\tilde{u}_i)\| \|k_i^+ e(\tilde{v}_i)\|$$

up to a constant factor, and since

$$\|h_i^{-*} e(\tilde{u}_i)\| \leq \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^{-*}\|^2 dt} \|e(\tilde{u}_i)\|$$

and

$$\|k_i^+ e(\tilde{v}_i)\| \leq \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^+\|^2 dt} \|e(\tilde{v}_i)\|,$$

one concludes as before.

Now in the case where ϵ , for example, is \times , one writes the usual equalities

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), a^\eta(h^\times k^\eta)e(\tilde{v}) \rangle &= \sum_{i \geq 0} \langle e(\tilde{u}_i), h_i^\times k_i^\eta e(\tilde{v}_i) \rangle \langle e(\tilde{u}_{[i]}), e(\tilde{v}_{[i]}) \rangle \\ &= \sum_{i \geq 0} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e(\tilde{u}_i), H_t^\times K_s^\eta e(\tilde{v}_i) \rangle \langle e(\tilde{u}_{[i]}), e(\tilde{v}_{[i]}) \rangle dt ds \end{aligned}$$

(keep in mind that $\times.\eta = \eta$ in all cases), and this is dominated by the following quantities:

- $\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^\times\| dt \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^\times\| dt$ if $\eta = \times$,
- $\sum_i \sqrt{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^\times\| dt \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^\eta\|^2 dt}$ if $\eta = +, -$,
- $\sum_i (t_{i+1} - t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^\times\| dt \|K^\circ\|_\infty$ if $\eta = \circ$

where all majorations are up to constant factors. In all three cases the summed term in the majorant is a summable one multiplied by a vanishing one.

□

We now apply these results to prove the final result:

Theorem 3.9 (Ito formula in continuous time) *Let $H = \int_0^\infty H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ and $K = \int_0^\infty K_s^\eta da_s^\eta$ be two continuous-time integrals satisfying the assumptions **(HS)**. Then the following equality holds on Φ :*

$$\int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon \int_0^\infty K_t^\eta da_t^\eta = \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^\epsilon + \int_0^\infty H_t K_t^\eta da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^{\epsilon,\eta}$$

where $a^{\epsilon,\eta}$ is computed using the continuous Ito table.

Remark : we insist on the fact that this reproves the Ito formula on regular Fock space knowing nothing but its counterpart on the toy Fock space.

Proof.

We will prove that for any $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+)$ one has

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_t^\epsilon da_t^\epsilon \int_0^\infty K_t^\eta da_t^\eta \mathcal{E}(v) \rangle &= \\ \langle \mathcal{E}(u), \left(\int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^\epsilon + \int_0^\infty H_t K_t^\eta da_t^\eta + \int_0^\infty H_t^\epsilon K_t^\eta da_t^{\epsilon,\eta} \right) \mathcal{E}(v) \rangle. \end{aligned}$$

By Proposition 3.8, it suffices to show that

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon k_i a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\epsilon k_i^\eta a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H^\epsilon K^\eta da_s^{\epsilon,\eta} \mathcal{E}(v) \rangle \end{aligned}$$

but one can see that the previous propositions apply to the integrals $\int H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon$, $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, $\int H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta}$ so that one also has that

$$\begin{aligned} \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\epsilon K)_i^\epsilon a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s da_s^\epsilon \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (HK^\eta)_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_s K_s^\eta da_s^\eta \mathcal{E}(v) \rangle \\ \langle e(\tilde{u}), \sum_i (H^\epsilon K^\eta)_i^{\epsilon,\eta} a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{E}(u), \int_0^\infty H_s^\epsilon K_s^\eta da_s^{\epsilon,\eta} \mathcal{E}(v) \rangle \end{aligned}$$

where $(HK^\eta)_i^\eta$, $(H^\epsilon K)_i^\epsilon$ are the integrands associated by Proposition 2.2 (or by Lemma 3.6) to the integral $\int H_s K_s^\eta da_s^\eta$, etc. It suffices then to prove that

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\epsilon k_i - (H^\epsilon K)_i^\epsilon) a_i^\epsilon e(\tilde{v}) \rangle \rightarrow 0 \tag{3.7}$$

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i k_i^\eta - (HK^\eta)_i^\eta) a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle \rightarrow 0 \tag{3.8}$$

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\epsilon k_i^\eta - (H^\epsilon K^\eta)_i^{\epsilon,\eta}) a_i^{\epsilon,\eta} e(\tilde{v}) \rangle \rightarrow 0 \tag{3.9}$$

(3.7) and (3.8) derive one from another by adjointness. Let us prove the different cases one by one.

(3.7) in the case $\epsilon = -$ or $+$: let us take for example $\epsilon = +$.

$$\langle e(\tilde{u}), a^\epsilon (h^\epsilon k - (H^\epsilon K)_i^\epsilon) e(\tilde{v}) \rangle = \sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^+ k_i - (H^+ K)_i^+) e(\tilde{v}_i) \rangle.$$

The above quantities are equal to

$$\begin{aligned} &\sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \langle e(\tilde{u}_i), \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{t_i}(H_t^+ k_i - H_t^+ K_t) e(\tilde{v}_i) dt \rangle \\ &= \sum_i \frac{\overline{\tilde{u}(i)}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle H_t^{+*} e(\tilde{u}_i), (k_i - K_t) e(\tilde{v}_i) \rangle dt \end{aligned}$$

So the norm of the left-hand side is smaller than

$$\begin{aligned}
& \sum_i \frac{|\tilde{u}(i)|}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^{+*}\| \|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\| dt \\
& \leq \sum_i |\tilde{u}(i)| \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t\|^2 \|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\|^2 dt} \\
& \leq \|\tilde{u}\|_l^2 \sqrt{\int_0^\infty \|H_t^+\|^2 \|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\|^2 dt} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

by repeated use of the Cauchy-Schwarz formula and convenient erasing of constant terms. The index i in the last line is actually a $i(t)$.

But, since $k_i = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} K_{t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$,

$$\|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\| \leq \|K_{t_i}e(\tilde{v}_i)\| + \|K_t e(\tilde{v}_i)\|.$$

If $\eta = +, \circ, -$, then (K_t) is an operator martingale, so, since $t_i \leq t$ with $e(\tilde{v}_i) \in \Phi_{t_i}$,

$$\begin{aligned}
\|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\| & \leq \|\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K_{t_i} e(\tilde{v}_i)\| + \|K_t e(\tilde{v}_i)\| \\
& \leq 2 \|K e(\tilde{v}_i)\| \\
& \leq 2 \|K\| \|e(\tilde{v})\|.
\end{aligned}$$

A majoration of the same kind is immediately obtained in the case $\eta = \times$ since $\|K_t\| \leq \int \|K_s^\times\| ds$. One can then apply Lebesgue's dominated convergence theorem to the integral in (3.10). Besides,

$$\|(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i)\| \leq \|(\mathbb{E}_{\mathcal{S}} K_{t_i} - K_{t_i})e(\tilde{v})\| + \|(K_{t_i} - K_t)P_{t_i} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(v_{t_i})\|.$$

And both terms on the right-hand side tend to zero a.e.; the proof of (3.7) with $\epsilon = +$ or $-$ is now complete.

(3.7) in the case $\epsilon = \circ$:

we now consider the quantity

$$\sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^\circ k_i - (H^\circ K)_i^\circ) e(\tilde{v}_i) \rangle$$

where we forget once again the last factor. It is equal to

$$\begin{aligned}
& \sum_i \frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e(\tilde{u}_i), H_t^\circ (k_i - K_t) e(\tilde{v}_i) \rangle dt \\
& = \int_0^\infty \frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1}-t_i} \langle e(\tilde{u}_i), H_t^\circ (k_i - K_t) e(\tilde{v}_i) \rangle dt.
\end{aligned}$$

The bracket is uniformly bounded, and $t \mapsto \frac{\tilde{u}(i)}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}, \frac{\tilde{v}(i)}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}$ where once again i is actually a $i(t)$, tend to u, v in $L^2(\mathbb{R}_+)$ by the martingale convergence theorem. One can therefore consider, instead of the above, the quantity

$$\int_0^\infty \overline{u(t)v(t)} \langle e(\tilde{u}_i), H_t^\circ(k_i - K_t)e(\tilde{v}_i) \rangle dt$$

so that one can now apply Lebesgue's theorem in the same way as in the previous case.

(3.7) in the case $\epsilon = \times$: we consider

$$\begin{aligned} & \sum_i \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^\times k_i - (H^\times K)_i^\times) e(\tilde{v}_i) \rangle \\ &= \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle H_t^{\times*} e(\tilde{u}_i), (\mathbb{E}_S K_{t_i} - K_t) e(\tilde{v}_i) \rangle dt, \end{aligned}$$

which we can estimate as before by $\int \|H_s^\times\| ds$.

Let us now prove (3.9). First let us settle the problem when one of ϵ or η is \times ; we take for example $\epsilon = \times$. In this case we have to show that

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i h_i^\times k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}) \rangle$$

vanishes when the mesh size of the partition tends to zero. But that quantity is smaller in norm than

$$\sum_i \|(h_i^\times)^* e(\tilde{u})\| \|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v})\|$$

which in turn is smaller than a constant times

$$\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^{\times*}\| dt \|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i)\|. \tag{3.11}$$

Now the following observations will be used over and over again so that we make a lemma out of them but do not prove it.

Lemma 3.10 *One has the following estimates:*

- if $\eta = +$, then $k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i] = k_i^\eta e(\tilde{v} \mathbb{1}_{\neq i}) X_i$, and

$$\|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i]\| \leq \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^\eta\|^2 dt} \|\mathcal{E}(v)\|.$$

- if $\eta = -$, then $k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i) = \tilde{v}(i) k_i^\eta e(\tilde{v}_{\neq i})$ and

$$\|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i)\| \leq \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^\eta\|^2 dt} |\tilde{v}(i)| \|\mathcal{E}(v)\|.$$

- if $\eta = \circ$, then $k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i) = \tilde{v}(i) k_i^\eta e(\tilde{v}_{\neq i}) X_i$ and

$$\|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i)\| \leq \|K^\circ\|_\infty |\tilde{v}(i)| \|\mathcal{E}(v)\|.$$

- if $\eta = \times$, then $k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i) = (k_i^\times e(\tilde{v}_i)) (\Omega + \tilde{v}(i) X_i)$ and

$$\|k_i^\eta a_i^\eta e(\tilde{v}_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t^\times\| dt (1 + |\tilde{u}(i)|).$$

In the case we are interested in ((3.7) in the case $\epsilon = \times$), we obtain that in all cases, (3.11) is a sum of terms of the form $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^{\times*}\|$ times a term that vanishes uniformly in i with the mesh size of the partition.

There are four non trivial cases left: (ϵ, η) equal to $(-, +)$, (\circ, \circ) , $(\circ, +)$ and $(-, \circ)$. The last two cases have similar proofs; let us prove them first.

(3.9) in the case $(\epsilon, \eta) = (-, \circ)$ or $(\circ, +)$:

we take for example $(\epsilon, \eta) = (\circ, +)$. What we want to prove is that

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\circ k_i^- - (H^\circ H^+)_i^+) a_i^+ e(\tilde{v}) \rangle \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0.$$

This quantity is equal to

$$\begin{aligned} & \sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^\circ k_i^+ - \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_t H_t^\circ K_t^+ dt) e(\tilde{v}_i) \rangle \\ &= \sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \langle e(\tilde{u}_i), \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_t^\circ (\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+) dt e(\tilde{v}_i) \rangle \end{aligned}$$

hence the norm of the left-hand side is, up to a factor term depending only on u, v , smaller than:

$$\begin{aligned} & \sum_i \frac{|\tilde{u}(i)|}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^\circ\| \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+ \right) e(\tilde{v}_i) \right\| dt \\ & \leq \sup \|H_t^\circ\| \sum_i |\tilde{u}(i)| \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+ \right) e(\tilde{v}_i) \right\|^2 dt}. \end{aligned}$$

Since $e(\tilde{v}_{i|}) - e(\tilde{v}_i) = \tilde{v}(i)e(\tilde{v}_i)X_i$, substituting $e(\tilde{v}_i)$ with $e(\tilde{v}_{i|})$ creates an error term which is smaller than

$$\begin{aligned} & \left(\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_s^+ ds - K_t^+ \right) \tilde{v}(i)e(\tilde{v}_i)X_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \left(2 \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{(t_{i+1}-t_i)^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_s\| ds \right)^2 + \|K_t\|^2 \right) |\tilde{v}(i)| dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

up to a constant factor; but that is smaller by the Cauchy-Schwarz inequality than

$$\begin{aligned} & \left(\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_s\|^2 ds + \|K_t\|^2 \right) |\tilde{v}(i)|^2 dt \right)^{1/2} \\ & = \left(\sum_i |\tilde{v}(i)|^2 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_s\|^2 ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|K_t\|^2 dt \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

up to constant factors again. This tends to zero by Lemma 3.5.

Using the adaptation of operators, one sees easily that, once $e(\tilde{v}_{i|})$ has been substituted to $e(\tilde{v}_i)$, it can be in turn substituted with $e(\tilde{v})$; the usual majorations allow one to substitute it then with $\mathcal{E}(v)$. The convergence to zero of

$$\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_s^+ \mathcal{E}(v) ds - K_t^+ \mathcal{E}(v) \right\|^2 dt$$

is then a simple consequence of the L^2 martingale convergence theorem.

(3.9) in the case $(\epsilon, \eta) = (-, +)$: what we must show vanishes is

$$\sum_i \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^- k_i^+ - (H^- K^+)_i^\times) e(\tilde{v}_i) \rangle.$$

We show that

$$\sum_i \langle e(\tilde{u}_i), \left(h_i^- k_i^+ - \mathbb{E}_S \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_t^- K_t^+ dt \right) e(\tilde{v}_i) \rangle$$

vanishes. Its norm is easily shown to be smaller than

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^-\| \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+ \right) e(\tilde{v}_i) \right\| dt \\ & \leq \sum_i \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|H_t^-\|^2 dt} \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+ \right) e(\tilde{v}_i) \right\|^2 dt} \\ & \leq \|H^-\|_2 \sqrt{\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} k_i^+ - K_t^+ \right) e(\tilde{v}_i) \right\|^2 dt} \end{aligned}$$

and one concludes using Lemma 3.6.

(3.9) in the case $(\epsilon, \eta) = (\circ, \circ)$:
the last step is the proof that

$$\langle e(\tilde{u}), \sum_i (h_i^\circ k_i^\circ - (H^\circ K^\circ)_i^\circ) a_i^\circ e(\tilde{v}) \rangle \xrightarrow{|\mathcal{S}| \rightarrow 0} 0.$$

But it is equal to

$$\sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), (h_i^\circ k_i^\circ - (H^\circ K^\circ)_i^\circ) e(\tilde{v}_i) \rangle$$

up to the usual last factor in the sum. The above line is equal to:

$$\begin{aligned} & \sum_i \overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i) \langle e(\tilde{u}_i), \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (H_t^\circ k_i^\circ - H_t^\circ K_t^\circ) e(\tilde{v}_i) dt \rangle \\ & = \sum_i \frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle H_t^{\circ*} e(\tilde{u}_i), \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K_s^\circ - K_t^\circ) e(\tilde{v}_i) ds \rangle dt \\ & = \int_0^\infty \frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1}-t_i} \langle H_t^{\circ*} e(\tilde{u}_i), \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K_s^\circ - K_t^\circ) e(\tilde{v}_i) ds \rangle dt \end{aligned}$$

As in the proof of 3.3 we can replace $\frac{\overline{\tilde{u}(i)} \tilde{v}(i)}{t_{i+1}-t_i}$ by $\overline{u(t)} v(t)$. The norm of the integrated function is then smaller than

$$|u(t)v(t)| 2 \sup_s \|H_s^{\circ*}\| \sup_s \|K_s^\circ\| \|\mathcal{E}(u)\| \|\mathcal{E}(v)\|$$

which is integrable. By Lebesgue's theorem, the considered quantity tends to zero with the mesh size of the partition.

□

3.1 A remark on the classical Ito formula

It is well known that the classical Ito formula for quantum stochastic integrals with respect to any normal martingale is a consequence of the quantum Ito formula. Indeed, any normal martingale, that is, any martingale M with square bracket $[M]_t = t$, can be identified to a multiplication operator on Fock space. That operator has a quantum stochastic integral representation (see [At2]), so that its angle bracket can be obtained from the Ito formula.

Therefore, we have proved that, once the normality of the martingale is known, the value of the angle bracket is deduced from the quantum stochastic integral representation of the multiplication operator and the commutation relations for Pauli matrices. There is nothing very deep here since the integral representation of the multiplication operator itself is derived from the structure equation of the martingale (see for example [At2]), but it may help and shed some light on the general computations we have made.

The brownian motion $(B_t)_{t \geq 0}$ can be identified to the operator process $(a_t^+ + a_t^-)_{t \geq 0}$. If we consider a partition \mathcal{S} with constant steps δ , then the approximation of the multiplication operator by B_t will be $\sum_{i|t_i \leq t} \sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-)$ plus some terms which we have shown can be, in the limit when δ goes to zero, neglected. Besides, $a_i^+ + a_i^-$ is σ_x so that

$$\left(\sqrt{\delta}(a_i^+ + a_i^-)\right)^2 = \delta\sigma_x^2 = \delta I.$$

The operator δI is the approximation of the deterministic process $(t)_{t \geq 0}$. This, as we have shown, implies that $d\langle B \rangle_t = dt$.

Another example is the compensated Poisson process $(N_t - t)_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0}$. It can be identified with the operator process $(a_t^+ + a_t^- + a_t^\circ)_{t \geq 0}$. If we consider again a partition \mathcal{S} with constant step δ , $a_t^+ + a_t^- + a_t^\circ$ is projected to $\sum_{i|t_i \leq t} (\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times)$ plus asymptotically negligible terms. Since $\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times = \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}I$, we obtain

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right)^2 &= \delta\sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_z^2 + \frac{1}{4}I \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \sqrt{\delta}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z \\ &= \left(\sqrt{\delta}a_i^+ + \sqrt{\delta}a_i^- + a_i^\times\right) + \delta I \end{aligned}$$

because $\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0$ and $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = I$. That, as we have shown, implies that $d\langle X \rangle_t = X_t + t$.

References

- [At1] S. ATTAL: An algebra of non commutative bounded semimartingales, square and angle quantum brackets, *Journal of functional analysis* 124 (1994), Academic Press, pp. 292-332.
- [At2] S. ATTAL: Classical and quantum stochastic calculus, *Quantum probability and related topics X* (1998), World Scientific, pp.1-52.
- [At3] S. ATTAL: Approximating the Fock space with the toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVI*, Springer Verlag, to appear.
- [A-L] S. ATTAL AND J.M. LINDSAY: Quantum stochastic calculus with maximal operator domain, *The Annals of Probability*, to appear.
- [A-M] S. ATTAL AND P.A. MEYER: Interprétations probabilistes et extension des intégrales stochastiques non commutatives, *Sém. de probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, 312-327.
- [Gui] A.GUICHARDET: Symmetric Hilbert spaces and related topics, L.N.M 261 (1970), Springer Verlag.
- [Pau] Y.PAUTRAT: Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock space, preprint.

Annexe C

Représentations intégrales des opérateurs de seconde quantification

Stochastic integral representations of second quantization operators

Yan Pautrat

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France
pautrat@ujf-grenoble.fr

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the second quantization operator $\Gamma(h)$ of a bounded operator h on $L^2(\mathbb{R}_+)$, or for its differential second quantization operator $\lambda(h)$, to have a representation as a quantum stochastic integral. This condition is exactly that h writes as the sum of a Hilbert-Schmidt operator and a multiplication operator. We then explore several extensions of this result. We also examine the famous counterexample due to Journé and Meyer and explain its representability defect.¹

Introduction

Second quantization operators and differential second quantization operators on Fock spaces are the most basic operators that appear in the quantum theory of fields, after creation and annihilation operators. On the other hand, on Fock spaces of the form $\Phi_{\mathcal{K}} = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$, where \mathcal{K} is a separable Hilbert space, an effective theory of quantum stochastic integration is now well-developed and has found numerous applications (such as the ergodic properties of dissipative quantum systems). One of the basic questions in that context is to characterize the operators on $\Phi_{\mathcal{K}}$ which can be represented as a quantum stochastic integral. Many articles have been devoted to that problem (see for example [P-S], [At1], [Coq]), yet it is far from being closed.

We study here two particular families of operators: the second quantization operators $\Gamma(h)$ and the differential second quantization operators $\lambda(h)$,

¹**Keywords:** second quantization, differential second quantization, quantum probability, quantum stochastic integrals, Fock spaces

AMS classification: 81S25, 60H05

for a bounded operator h on $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. Rather surprisingly we find a necessary and sufficient condition for $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ to be represented as quantum stochastic integrals on the set of exponential vectors or on the set of finite particle vectors:

Theorem 1 *Let h be a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$. The following properties are equivalent:*

1. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a quantum stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ of exponential vectors
2. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a quantum stochastic integral representation on the set \mathcal{F} of finite particle vectors
3. h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}_\gamma$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator and \mathcal{M}_γ is a multiplication by an essentially bounded function γ .

Surprisingly also, the exact same theorem holds for differential second quantizations.

Theorem 2 *Let h be a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$. The following properties are equivalent:*

1. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a quantum stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ of exponential vectors
2. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a quantum stochastic integral representation on the set \mathcal{F} of finite particle vectors
3. h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}\gamma$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator and $\mathcal{M}\gamma$ is a multiplication by an essentially bounded function γ .

We furthermore derive fully explicit formulas for the integrands in the integral representation in both cases (differential and nondifferential); we give sufficient conditions for the existence of integral representations of such operators in the case of unbounded operators h . We also prove various results concerning the obtained representations.

The paper is organized as follows: in section one we give all the necessary theoretical background and notations. The second section is the core of this article: the above quoted theorem for (non differential) second quantizations is proved. Characterizations of the fact that $\Gamma(h)$ defines a regular

semimartingale (see [At1]) are also given and the counterexample of Journé and Meyer is discussed. In the third section we prove the result for differential second quantization operators. Section four handles the extension of our characterizations and formulas to the case of Fock space of higher (possibly infinite) multiplicity. In section five we treat the case of second quantization and differential second quantizations of *unbounded* operators, which often arise in physical applications of the theory. In that case we give simple sufficient conditions for the existence of a quantum stochastic integral representation.

1 Preliminaries

1.1 Quantum stochastic calculus

The usual framework of quantum stochastic calculus is the symmetric Fock space $\Gamma_{sym}(L^2(\mathbb{R}_+))$ over the space $L^2(\mathbb{R}_+)$, that is, the completion of

$$\bigoplus_{n \geq 0} L^2(\mathbb{R}_+)^{\otimes n}$$

where $L^2(\mathbb{R}_+)^{\otimes n}$ denotes the n -fold symmetric tensor product of $L^2(\mathbb{R}_+)$ for $n \geq 1$ and $L^2(\mathbb{R}_+)^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ by convention.

We denote by Φ that space; according to the above definition, the elements of Φ are sequences (f_0, f_1, \dots) where $f_0 \in \mathbb{C}$, f_n is a symmetric function on \mathbb{R}_+^n for $n \geq 1$, and

$$|f_0|^2 + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} |f_n(s_1, \dots, s_n)|^2 ds_1 \dots ds_n < +\infty.$$

We will use the more concise notation of Guichardet (see [Gui]): we identify sequences (f_0, f_1, \dots) with functions f on \mathcal{P} , \mathcal{P} being the set of finite subsets of \mathbb{R}_+ . Such a function belongs to Φ if

$$|f(\emptyset)|^2 + \sum_{n \geq 1} \int_{s_1 < \dots < s_n} |f(\{s_1, \dots, s_n\})|^2 ds_1 \dots ds_n < +\infty.$$

On \mathcal{P} we can define a measure simply by taking its restriction to the subset of \mathcal{P} that has n -uples for elements to be equal to the n -dimensional Lebesgue measure and taking the empty set to be an atom of mass one. Equipped with such a measure, $L^2(\mathcal{P})$ can be seen to be isomorphic to the space $\Gamma_{sym}(L^2(\mathbb{R}_+))$. From now on we will always work with this realization of

Fock space and write indifferently Φ or $L^2(\mathcal{P})$. The canonical element in \mathcal{P} will be denoted by σ and the infinitesimal element by $d\sigma$. We will also follow the convention that subsets $\{s_1, \dots, s_n\}$ are always written in ordered form: the s_i 's are always assumed to satisfy $s_1 < \dots < s_n$ unless otherwise stated.

Among vectors of $L^2(\mathcal{P})$ we denote by Ω the vacuum vector, which is the indicator of the empty set. For any t in \mathbb{R}_+ we will denote by Φ_t or by $L^2(\mathcal{P}_t)$ the subspace of $L^2(\mathcal{P})$ made of functions with support in $[0, t]$: for a function f in $L^2(\mathcal{P})$,

$$f \text{ belongs to } L^2(\mathcal{P}_t) \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ for a.a. } \sigma \text{ such that } \sigma \not\subset [0, t].$$

A vector f of Φ which belongs to $L^2(\mathcal{P}_t)$ is said to be *t-adapted*. For any n in \mathbb{N} we also define the n -th chaos as the subspace of Φ made of functions with support in the n -uples: for a function f in $L^2(\mathcal{P})$,

$$f \text{ belongs to the } n\text{-th chaos} \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \text{ if } \text{card } \sigma \neq n.$$

The n -th chaos is therefore equal to the closed subspace generated by all vectors of the form $u_1 \circ \dots \circ u_n$ with u_1, \dots, u_n in $L^2(\mathbb{R}_+)$.

In $L^2(\mathcal{P})$ we will often consider three most important subspaces: the first is the exponential domain $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$, the second is the subspace $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$ introduced by Coquio in [Coq], the last is the finite particle vector \mathcal{F} .

To any function u in $L^2(\mathbb{R}_+)$ we then associate a function $\mathcal{E}(u)$ on \mathcal{P} by

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u)(\emptyset) & = & 1 \\ \mathcal{E}(u)(\{s_1, \dots, s_n\}) & = & u(s_1) \dots u(s_n). \end{cases}$$

This $\mathcal{E}(u)$ is an element of $L^2(\mathcal{P})$ as one can see from the equality

$$\int_{s_1 < \dots < s_n} |u(s_1) \dots u(s_n)|^2 ds_1 \dots ds_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} |u(s)|^2 ds$$

which implies

$$\|\mathcal{E}(u)\|^2 = e^{\|u\|^2}.$$

The set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ is total in $L^2(\mathcal{P})$ (see [Mey]).

The set $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$ is the subspace of $L^2(\mathcal{P})$ generated by the vacuum vector and by the vectors $j(v, u)$ defined for any u, v in $L^2(\mathbb{R}_+)$ by

$$\begin{cases} j(v, u)(\emptyset) & = & 0 \\ j(v, u)(\{s_1, \dots, s_n\}) & = & v(s_n) u(s_1) \dots u(s_{n-1}). \end{cases}$$

From the relation $\mathcal{E}(u) = \Omega + j(u, u)$ one sees that $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$ contains the linear span of $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ so that $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$ is dense.

The finite particle domain \mathcal{F} is defined as the algebraic sum of n -th chaoses for n in \mathbb{N} . Thus for a vector f in $L^2(\mathcal{P})$,

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f(\sigma) = 0 \text{ if } \text{card } \sigma \geq N.$$

It is clear from the definition of Φ that \mathcal{F} is a dense subset as well and that it is generated by Ω and all vectors of the form $u_1 \circ \dots \circ u_n$.

Abstract Ito calculus For details on all objects defined in this paragraph, see [A-M] or [At3]. Let us consider for all t the element χ_t of $L^2(\mathcal{P})$ defined by

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \{s\} \text{ and } s < t \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A family $(f_t)_{t \geq 0}$ of elements of $L^2(\mathcal{P})$ is called an *adapted process* if for almost all t , the function f_t is t -adapted, that is, f_t belongs to $L^2(\mathcal{P}_t)$. For an adapted process $(f_t)_{t \geq 0}$ satisfying $\int \|f_t\|^2 dt < +\infty$, one can define the integral of $(f_t)_{t \geq 0}$ with respect to the curve $(\chi_t)_{t \geq 0}$. This defines an element of $L^2(\mathcal{P})$, denoted

$$\int_0^\infty f_t d\chi_t$$

which we call the *Ito integral* of $(f_t)_{t \geq 0}$. It has square norm

$$\left\| \int_0^\infty f_t d\chi_t \right\|^2 = \int_0^\infty \|f_t\|^2 dt. \tag{1.1}$$

That integral can be constructed from the case of step processes, extending the definition by the isometry formula (1.1). One can check that, as a function on \mathcal{P} , the integral $\int_0^\infty f_t d\chi_t$ is given by

$$\int_0^\infty f_t d\chi_t(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma = \emptyset \\ f_{\vee\sigma}(\sigma \setminus \vee\sigma) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.2}$$

where $\vee\sigma$ represents the largest element in σ . We define integrals $\int_a^b f_t d\chi_t$ to be the integral of the process $(f_t \mathbb{1}_{[a,b]}(t))_{t \geq 0}$.

Apart from this integral, the two main tools of abstract Ito calculus are the following families of operators: the adapted projections $(P_t)_{t \geq 0}$ and adapted gradients $(D_t)_{t \geq 0}$, which we now define.

For any f in Φ , the image of f by these operators is defined by

$$P_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{if } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$D_t f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma \cup \{t\}) & \text{if } \sigma \subset [0, t] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that for all f in $L^2(\mathcal{P})$, all t in \mathbb{R}_+ , $P_t f$ is a well-defined element of $L^2(\mathcal{P})$; the question of definiteness of D_t will be addressed a little further. What is clear is that, as soon as $P_t f$, $D_t f$ are defined, they belong to $L^2(\mathcal{P}_t)$: in particular the operator P_t is simply the orthogonal projection on the subspace $L^2(\mathcal{P}_t)$. Thus the families $(P_t f)_{t \geq 0}$ and $(D_t f)_{t \geq 0}$ are adapted; this allows us to consider the integral $\int_0^\infty D_t f d\chi_t$. One deduces from the definition of the integral (1.2) the following equality, valid for all f in Φ :

$$f = f(\emptyset) \Omega + \int_0^\infty D_t f d\chi_t \quad (1.3)$$

together with the isometry formula

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \int_0^\infty \|D_t f\|^2 dt. \quad (1.4)$$

Equality (1.3) is known as the previsible representation of f .

In the definition of operators D_t we have omitted to discuss the question of definiteness; now formula (1.4) shows that for all f in Φ , almost all t in \mathbb{R}_+ , the function $D_t f$ is a well-defined element of Φ . This can not be improved, so that an individual D_t is not defined as an operator.

On vectors of $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ or $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$ the operators P_t or D_t satisfy

$$\begin{aligned} P_t \mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(\pi_t u) & D_t \mathcal{E}(u) &= u(t) \mathcal{E}(\pi_t u) \\ P_t j(v, u) &= j(\pi_t v, \pi_t u) & D_t j(v, u) &= v(t) \mathcal{E}(\pi_t u), \end{aligned}$$

where π_t is the operator of multiplication by the indicator function of $[0, t]$ on $L^2(\mathbb{R}_+)$.

This gives in particular the previsible representations of exponential vectors and vectors $j(v, u)$:

$$\mathcal{E}(u) = \Omega + \int_0^\infty u(t) \mathcal{E}(\pi_t u) d\chi_t$$

and

$$j(v, u) = \int_0^\infty v(t) \mathcal{E}(\pi_t u) d\chi_t.$$

Second quantization operators For any bounded operator h on $L^2(\mathbb{R}_+)$ we define operators $\Gamma(h)$, $\lambda(h)$ on vectors of Φ of the form $u_1 \circ \dots \circ u_n$ with u_1, \dots, u_n in $L^2(\mathbb{R}_+)$ by

$$\Gamma(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ \dots \circ hu_n, \quad (1.5)$$

$$\lambda(h)(u_1 \circ \dots \circ u_n) = hu_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n + \dots + u_1 \circ \dots \circ u_{n-1} \circ hu_n. \quad (1.6)$$

These operators $\Gamma(h)$ and $\lambda(h)$ are then extended by linearity and closure; one can check that their domain is the set of all f in $L^2(\mathcal{P})$ such that, denoting f_n the restriction of f to the n -th chaos, we have

$$\sum_n \|\Gamma(h)f_n\|^2 < +\infty$$

or respectively

$$\sum_n \|\lambda(h)f_n\|^2 < +\infty.$$

The action of these operators on exponential vectors is easily expressed:

$$\begin{aligned} \Gamma(h)\mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(hu) \\ \lambda(h)\mathcal{E}(u) &= a_{hu}^+ \mathcal{E}(u). \end{aligned}$$

These two types of operators are linked by the following formula, which can be taken as the definition of differential second quantization operators, and explains the term differential: for any bounded h on $L^2(\mathbb{R}_+)$, any t in \mathbb{R} , one has

$$\Gamma(e^{ith}) = e^{it\lambda(h)}.$$

In the case of a selfadjoint operator h this means that $\lambda(h)$ is the (uniquely defined) generator of the unitary semigroup obtained by second quantization of the unitary semigroup with generator h .

We will mention in section five second quantizations of unbounded operators h . The definition for such operators is easily adapted from the above formulas (1.5), (1.6).

Quantum stochastic integration We will now define integrals of operator processes with respect to the three quantum noises da_t^+ , da_t^- , da_t° .

We consider quantum stochastic integrals as defined by Attal and Meyer in [A-M]. To describe it we first need to define adapted processes of operators:

Definition 1.1 *An adapted process of operators on Φ is a family $(H_s)_{s \geq 0}$ of operators on Φ such that, for almost all s , the operator H_s is s -adapted, that is:*

- *Dom H_s is stable by the operators P_s and D_u for a.a. $u \geq s$;*
- *for any f in Dom H_s the following equalities hold:*

$$\begin{aligned} H_s P_s f &= P_s H_s f \\ H_s D_u f &= D_u H_s f \text{ for a.a. } u \geq s. \end{aligned}$$

Now, for three adapted families $(H_s^+)_{s \geq 0}$, $(H_s^-)_{s \geq 0}$, $(H_s^\circ)_{s \geq 0}$ of operators on Φ and a scalar λ , the integral

$$\lambda \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

is defined as the only operator H that satisfies the following equality:

$$Hf = \lambda f(\emptyset) + \int_0^\infty H_s D_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^+ P_s f d\chi_s + \int_0^\infty H_s^- D_s f ds + \int_0^\infty H_s^\circ D_s f d\chi_s, \quad (1.7)$$

where H_s is $P_s H P_s$. The domain of H is then the set of all vectors f in Φ such that equation (1.7) is meaningful, that is:

- for almost all s in \mathbb{R}_+ , $D_s f$ belongs to $\text{Dom } H_s$, $\text{Dom } H_s^-$, $\text{Dom } H_s^\circ$ and $P_s f$ belongs to $\text{Dom } H_s^+$.
- the equality (1.7) holds (remark that H appears on both sides of the equation).

We define integrals $\int_a^b H_s^\epsilon da_s^\epsilon$ to be the integral of the process $(H_s^\epsilon \mathbb{1}_{[a,b]}(s))_{s \geq 0}$. Then it can be seen that an operator H_t is recovered as the restriction to Φ_t of

$$\lambda \text{Id} + \int_0^t H_s^+ da_s^+ + \int_0^t H_s^- da_s^- + \int_0^t H_s^\circ da_s^\circ.$$

In the theory of quantum stochastic integration a fourth type of integrals is usually considered: integrals $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$ with respect to the noise da_s^\times . The noise da_s^\times is actually equal to ds and that new integral is simply the strong integral $\int_0^\infty H_s^\times da_s^\times$. Therefore there is no interest in representing a *single* operator H as

$$\lambda \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ + \int_0^\infty H_s^\times da_s^\times.$$

Note that the picture is different if one looks for representation of processes of operators, in which case the introduction of the time integral is in general necessary.

In this paper we are interested in representing operators individually, so that we will consider representations as integrals

$$\lambda \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

only. What's more, we will always look for representations in which, for a.a. s , the operators H_s^+ , H_s^- , H_s° are closable; otherwise the unicity of the representation does not hold (see [At2]).

The Journé-Meyer counterexample The question of whether all operators on Fock space are representable as quantum stochastic integrals assuming simple domain assumptions was given a negative answer by Journé and Meyer in [J-M]: their counterexample consists of a bounded operator on $L^2(\mathcal{P})$ which is not representable on the whole of the exponential domain. The reason why we include this counterexample here is that the considered operator is a second quantization: Journé and Meyer consider the second quantization operator $\Gamma(h)$ where h is the Hilbert transform on $L^2(\mathbb{R}_+)$ (more precisely, to a function f in $L^2(\mathbb{R}_+)$ it associates the restriction to \mathbb{R}_+ of the Hilbert transform of f seen as an element of $L^2(\mathbb{R})$). Since the Hilbert transform is a unitary operator, the operator h is a contraction of $L^2(\mathbb{R}_+)$ so that the associated $\Gamma(h)$ is a bounded operator; yet this operator $\Gamma(h)$ is not representable on the whole of $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ – not even on the subset $\mathcal{E}(L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+))$. Indeed Journé and Meyer prove that, if some u in $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ is such that $\mathcal{E}(u)$ is in the domain of some integral operator H , then $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ has finite quadratic variation. Then they construct explicitly some u in $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ for which $t \mapsto P_t H \mathcal{E}(u_t)$ does not have finite quadratic variation.

The case of Fock space of higher multiplicity We present here briefly the counterpart of the above definitions in the case of Fock space of higher multiplicity.

For that consider some separable Hilbert space \mathcal{K} and fix a hilbertian basis $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$, where we assume for notational convenience that \mathcal{I} does not contain the index zero. The Fock space with multiplicity space \mathcal{K} , which we denote by $\Phi_{\mathcal{K}}$, is defined as the completion of

$$\bigoplus_{n \geq 0} L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})^{\otimes n}$$

as before, but again Guichardet's shorthand notation gives a more concise form and we describe it now without details. The Fock space $\Phi_{\mathcal{K}}$ is identified with $L^2(\mathcal{P}_{\mathcal{I}})$ where elements of $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ are finite subsets of $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$. An element of $\Phi_{\mathcal{K}}$ is now a function with variable σ of the form

$$\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}$$

where $n \in \mathbb{N}$, the s_k 's belong to \mathbb{R}_+ and the i_k 's belong to \mathcal{I} . As before we always write such a σ so that $s_1 < \dots < s_n$. The integrability condition for a function f on $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ to belong to $\Phi_{\mathcal{K}}$ is now

$$\sum_n \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathcal{I}} \int_{s_1 < \dots < s_n} |f(\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\})|^2 ds_1 \dots ds_n < +\infty.$$

The exponential vectors $\mathcal{E}(u)$, vectors $j(v, u)$ and finite particle vectors are defined in ways analogous to the case of simple Fock space Φ : exponential vectors are now constructed with respect to functions u in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ by

$$\mathcal{E}(u)(\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}) = u(s_1, i_1) \cdots u(s_n, i_n),$$

the set $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ of vectors $j(v, u)$ for v, u in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ is defined by

$$j(v, u) = \Omega + \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^\infty v(s, i) \mathcal{E}(u_s) d\chi_s^i,$$

and the finite particle domain is generated by Ω and vectors of the form

$$u_1 \circ \dots \circ u_n$$

for u_1, \dots, u_n in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

The abstract Ito calculus uses now a set of curves χ_t^i and operators D_t^i for $i \in \mathcal{I}$. For any f in $\Phi_{\mathcal{K}}$, we define $D_t^i f$ and $P_t f$ by

$$\begin{aligned} P_t f(\sigma) &= \begin{cases} f(\sigma) & \text{if } \sigma = \{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\} \text{ with all } s_i \text{ in } [0, t] \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ D_t^i f(\sigma) &= \begin{cases} f(\sigma \cup (t, i)) & \text{if } \sigma = \{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\} \text{ with all } s_i \text{ in } [0, t] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

To define an abstract Ito integral we consider again a family of elements $(\chi_t^i)_{t \geq 0}$ of $\Phi_{\mathcal{K}}$. For an adapted process $(f_t)_{t \geq 0}$ in $\Phi_{\mathcal{K}}$ an integral $\int_0^\infty f_t d\chi_t^i$ is defined for each i in \mathcal{I} by

$$\int_0^\infty f_t d\chi_t^i(\sigma) = \begin{cases} f_{s_n}(\sigma \setminus (s_n, i_n)) & \text{if } \sigma = \{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\} \text{ with } i_n = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and all integrals are defined as zero on the null set. To unify our notations we will denote by $\int f_t d\chi_t^0$ the time integral $\int f_t dt$, and by D_t^0 the projection P_t .

Now any vector f of $\Phi_{\mathcal{K}}$ has a previsible representation of the form

$$f = f(\emptyset) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^\infty D_t^i f d\chi_t^i$$

with associated isometry formula

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^\infty \|D_t^i f\|^2 dt;$$

second quantization and differential second quantization operators are defined as before, but now for operators h on $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$.

Stochastic integrals of operators are now to be considered with respect to a set of quantum noises $da_t^{i,j}$ for i, j both in $\mathcal{I} \cup \{0\}$. The noise $da_t^{0,0}$ will represent the time differential $dt \text{Id}$; $da_t^{0,i}$, $da_t^{i,0}$ and $da_t^{i,i}$ represent respectively the creation, annihilation and conservation operators at site $i \in \mathcal{I}$, the remaining ones $da_t^{i,j}$ for $i \neq j$ representing *exchange* operators.

Now an integral

$$\lambda \text{Id} + \sum_{i,j \in \mathcal{I} \cup \{0\}} \int_0^\infty H_s^{i,j} da_s^{i,j}$$

is defined as the operator H that satisfies

$$Hf = \lambda f(\emptyset) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^\infty H_s D_s^i f d\chi_s^i + \sum_{i,j \in \mathcal{I} \cup \{0\}} \int_0^\infty H_s^{i,j} D_s^i f d\chi_s^j.$$

This definition meets the one for Fock space of multiplicity one if \mathcal{I} is made of a single element.

Note that, as before, we will be interested in representing operators as sums of integrals that exclude integration with respect to time: only the noises $da_s^{i,j}$ for $(i, j) \neq (0, 0)$ will be considered in quantum stochastic integral representations.

2 Second quantization operators

2.1 A representation theorem

The main theorem to be proved in this section is the characterization of operators h on $L^2(\mathbb{R}_+)$ such that the operators $\Gamma(h)$, $\Gamma(h^*)$ are representable on the exponential domain or on the finite particle domain.

The explicit formulas for the integrands to appear in the representation are given along the proof, in (2.12), (2.13).

Theorem 2.1 *Let h be a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$. The following properties are equivalent:*

1. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ of exponential vectors
2. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set \mathcal{F} of finite particle vectors

3. h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}_\gamma$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator and \mathcal{M}_γ is a multiplication by an essentially bounded function γ .

Besides, if one of these holds, then the representation holds on the set $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

First we will prove the equivalence of 1. and 3.; the proof of the equivalence of 2. and 3. will then appear as a simplification.

The proof will be decomposed as follows:

- we prove in Proposition 2.2 below that 1. implies a seemingly weaker set of conditions **(C)**,
- we prove the equivalence of **(C)** and 3. in Lemma 2.6,
- we prove the implication 3. \Rightarrow 1.,
- we extend a representation to the domain $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

We recall that we denote by π_t the operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$ of multiplication by the indicator function of $[0, t]$. We will also denote by $\mathbb{1}_{[a,b]}$ the indicator function of $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ and by $\mathbb{1}_t$ the indicator of $[0, t]$.

Proposition 2.2 *If $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ then h satisfies the following set of conditions **(C)**:*

$$(\mathbf{C}) \left\{ \begin{array}{l} -\text{for a.a. } t, \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converges in } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ to a function } \alpha_t \text{ as } \epsilon \rightarrow 0, \\ -\text{for a.a. } t, \pi_t h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \text{ converges in } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ to a function } \beta_t \text{ as } \epsilon \rightarrow 0, \\ -\text{the functions } t \mapsto \|\alpha_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, t \mapsto \|\beta_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{ are square-integrable,} \\ -\text{for a.a. } t, \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \text{ converges to a scalar } \gamma(t) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \text{ and} \\ -\text{the function } t \mapsto \gamma(t) \text{ is essentially bounded.} \end{array} \right.$$

Proof of Proposition 2.2. We suppose here that the equality

$$\Gamma(h) = \lambda \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^+ da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ \quad (2.1)$$

holds on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$. We also assume that $\Gamma(h^*)$ has such a representation.

First let us remark that $\Gamma(h)\Omega = \Omega$; then the equality (2.1) implies :

$$\Omega = \lambda\Omega + \int_0^\infty H_s^+ \Omega d\chi_s$$

so that $\lambda = 1$ (and $H_s^+ \Omega = 0$ for almost all s , but we do not need this).

Now we compute $P_t \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u)$ and $P_t \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_t u)$ for some function u in $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u) &= \Omega + \int_0^{t+\epsilon} u(s)H_s \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s + \int_0^{+\infty} H_s^+ \mathcal{E}(\pi_{s \wedge (t+\epsilon)}u) d\chi_s \\ &\quad + \int_0^{t+\epsilon} u(s)H_s^- \mathcal{E}(\pi_s u) ds + \int_0^{t+\epsilon} u(s)H_s^\circ \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s, \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} P_t \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u) &= \Omega + \int_0^t u(s)H_s \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s + \int_0^t H_s^+ \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s \\ &\quad + \int_0^{t+\epsilon} u(s)P_t H_s^- \mathcal{E}(\pi_s u) ds + \int_0^t u(s)H_s^\circ \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s, \end{aligned}$$

whereas

$$\begin{aligned} P_t \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_t u) &= \Omega + \int_0^t u(s)H_s \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s + \int_0^t H_s^+ \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s \\ &\quad + \int_0^t u(s)H_s^- \mathcal{E}(\pi_s u) ds + \int_0^t u(s)H_s^\circ \mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s. \end{aligned}$$

Hence

$$\frac{1}{\epsilon} P_t (\Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u) - \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_t u)) = P_t \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} u(s)H_s^- \mathcal{E}(\pi_s u) ds.$$

But $s \mapsto |u(s)| \|H_s^- \mathcal{E}(\pi_s u)\|$ is integrable by definiteness of the da^- integral on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$, so that, for almost all t , the integral on the right-hand side above tends in norm to $u(t)H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u)$. The operator P_t is a projection and the limit $H_t^- \mathcal{E}(u_t)$ belongs to its image Φ_t , so that the right-hand side also converges to $u(t)H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u)$.

For simplicity we denote by $\pi_{[t, t+\epsilon]}$ the operator $\pi_{t+\epsilon} - \pi_t$. When restricted to the first chaos, the left-hand side, with this notation, is simply $(\pi_t h p_{[t, t+\epsilon]} u) / \epsilon$ so that we have proved that

$$\text{for a.a. } t, \pi_t h p_{[t, t+\epsilon]} u / \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) \text{ in } L^2 \text{ norm.} \quad (2.2)$$

where P^1 is the projection on the first chaos.

Applying that result in the case where u is taken to be $\mathbb{1}_{N]}$ for some N in \mathbb{N} yields the fact that

$$\text{for a.a. } t, \pi_t h \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]} / \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t) \text{ in } L^2 \text{ norm.} \quad (2.3)$$

We denote from now on $P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t)$, by α_t and remark that $t \mapsto \|\alpha_t\|$ is a locally integrable function since $t \mapsto |\mathbb{1}_{N]}(t)| \|H_t^- \mathcal{E}(\pi_t \mathbb{1}_{N])}\|$ is integrable for any N in \mathbb{N} .

By the assumption that $\Gamma(h^*)$ has an integral representation we obtain the dual assumptions, so that we have proved the two first conditions of **(C)**. We have not proved the third, that is, the square-integrability of $\|\alpha_t\|$ and $\|\beta_t\|$; we will address that issue after the last proof of convergence.

We prove the fourth property of **(C)**. Let us consider $\Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u)$ on the first chaos, for some u in $L^2(\mathbb{R}_+)$. For almost any $s \leq t + \epsilon$,

$$\begin{aligned} \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u)(s) &= u(s)H_s \mathcal{E}(\pi_s u)(\emptyset) + H_s^+ \mathcal{E}(\pi_s u)(\emptyset) \\ &\quad + \int_s^{t+\epsilon} u(r)H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s) dr + u(s)H_s^\circ \mathcal{E}(\pi_s u)(\emptyset), \end{aligned}$$

where the lower bound s for the a^- integral arises because $H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s)$ is zero for $r < s$ by adaptedness.

Thus one has, using the fact that $\Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon}u)(s) = h\pi_{t+\epsilon}u(s)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\pi_{t+\epsilon}u(s) ds &= \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} u(s) ds + \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} H_s^+ \mathcal{E}(\pi_s u)(\emptyset) ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} \int_s^{t+\epsilon} u(r)H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s) dr ds + \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} u(r)H_r^\circ \mathcal{E}(\pi_r u)(\emptyset) dr. \end{aligned} \quad (2.4)$$

For almost all t :

- the first term converges to $u(t)$,
- the second and fourth terms converge respectively to $H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)(\emptyset)$ and $u(t)H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u)(\emptyset)$ because of the integrability properties of $s \mapsto H_s^+ \mathcal{E}(\pi_s u)$, $s \mapsto u(s)H_s^\circ \mathcal{E}(\pi_s u)$,
- the third term vanishes. Indeed, an application of Fubini's theorem shows that

$$\left| \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} \int_s^{t+\epsilon} u(r)H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s) dr ds \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} |u(r)| \int_t^r |H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s)| ds dr,$$

and the integral $\int_t^r |H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)(s)| ds$ is smaller than $\sqrt{\epsilon} \|H_r^- \mathcal{E}(\pi_r u)\|$ for any r in $[t, t+\epsilon]$ by the Cauchy-Schwarz inequality. That third term is therefore equal to $\sqrt{\epsilon}$ times a convergent term.

Thus we have shown that

$$\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\pi_{t+\epsilon} u(s) ds \text{ converges as } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

But then

$$\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\pi_t u(s) ds = \langle (h^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]})/\epsilon, \pi_t u \rangle,$$

and $\pi_t H^* \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}/\epsilon$ converges in $L^2(\mathbb{R}_+)$, so that

$$\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\pi_{t+\epsilon} u(s) ds \text{ converges as } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Subtracting (2.6) from (2.5) one finally obtains that for all u in $L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\text{for almost all } t, \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\pi_{[t, t+\epsilon]} u(s) ds \text{ has a limit as } \epsilon \text{ tends to zero.}$$

In the case where u is equal to some indicator function $\mathbb{1}_N$ with $t < N$, this implies that

$$\text{for almost all } t, \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \text{ has a limit as } \epsilon \text{ tends to zero,}$$

and in that particular case we denote the limit by $\gamma(t)$. For every ϵ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h\mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}(s) ds \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\int |h\mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|h\| \end{aligned}$$

so that the function γ is necessarily essentially bounded.

We now prove the square-integrability of α_t and β_t . The argument is the following: we prove in Lemma 2.4 below that

$$u(t)\alpha_t = u(t)P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) \text{ almost everywhere in } \mathcal{P}$$

therefore showing that $t \mapsto u(t) \|\alpha_t\|_{L^2([0, t])}$ is integrable for any u in $L^2(\mathbb{R}_+)$, and conclude thanks to the the following lemma:

Lemma 2.3 *Let $p \in [1, +\infty[$. Let v be a measurable function such that uv is integrable for every u is in $L^p(\mathbb{R}_+)$. Then v is in $L^q(\mathbb{R}_+)$, where $q \in]1, +\infty]$ is the conjugate index of p .*

Proof of Lemma 2.3 If $u \mapsto \int uv$ is bounded, then the classical duality theorem imply that $v \in L^q(\mathbb{R}_+)$. It is therefore enough to prove that $u \mapsto uv$ is continuous between the two Banachs $L^p(\mathbb{R}_+)$ and $L^1(\mathbb{R}_+)$. By the closed graph theorem it is enough to prove that the graph of that application is closed: for that let us suppose that $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}_+)$ with $u_n v$ converging in $L^1(\mathbb{R}_+)$. Almost-everywhere convergence of subsequences holds in both cases, and this shows that the limit of $u_n v$ is uv .

□

The following is therefore a crucial step of our demonstration:

Lemma 2.4 For all $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, almost all t ,

$$P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = P^1 H_t^- \mathcal{E}(\mathbb{1}_t). \quad (2.7)$$

Proof of Lemma 2.4

First notice two simple consequences of (2.3) and (2.2):

- for all u, v , one has $(u + v)(t)P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t(u + v)) = u(t)P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) + v(t)P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t v)$,
- for any almost everywhere differentiable function u , the desired equality (2.7) holds for almost all t .

To prove the second point, consider an almost everywhere differentiable function u . For almost all t , the following three conditions hold:

$$\pi_t h \pi_{[t, t+\epsilon]} u / \epsilon \rightarrow u(t) P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u), \quad (2.8)$$

$$\pi_t h(u(t) \mathbb{1}_{[t, t+\epsilon]}) / \epsilon \rightarrow u(t) \alpha_t, \quad (2.9)$$

and u is differentiable at t . The differentiability of u at t implies that the function $|u - u(t)|/\epsilon$ is bounded on $[t, t + \epsilon]$ for small enough ϵ . Therefore the L^2 norm of $\pi_{[t, t+\epsilon]} \frac{u-u(t)}{\epsilon}$ converges to zero as ϵ goes to zero and so does the L^2 norm of $h \pi_{[t, t+\epsilon]} \frac{u-u(t)}{\epsilon}$. We deduce the equality (2.7) from (2.8) and (2.9).

Thanks to the first point, one can restrict the proof of Lemma 2.4 to the case of a positive function u . Besides, it is enough to prove equality (2.7) for almost all t in a compact interval $[0, T]$.

Consider therefore an almost everywhere positive function u in $L^2([0, T])$. The sequence $(v_n)_{n \geq 0}$ with $v_n = \sup(u, \frac{1}{n})$ converges to u in $L^2([0, T])$. Besides, classical convolution techniques allow us to approximate any v_n by a sequence of smooth functions which are almost everywhere greater than

$\frac{1}{n}$. Combining these two remarks provides us with a sequence of almost everywhere strictly positive smooth functions $(u_n)_{n \geq 0}$ which approximate u in $L^2([0, T])$.

For every n we have, since u_n is smooth,

$$\text{for almost all } t \text{ in } [0, T], \quad u_n(t)P^1H_t^-\mathcal{E}(\pi_t u_n) = u_n(t)P^1H_t^-\mathcal{E}(\mathbb{1}_t).$$

The following lemma strengthens that equality:

Lemma 2.5 *For any function u such that $u(t)P^1H_t^-\mathcal{E}(\pi_t u) = u(t)P^1H_t^-\mathcal{E}(\mathbb{1}_t)$ for almost all t , we have*

$$u(t)H_t^-\mathcal{E}(\pi_t u) = u(t) \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \quad (2.10)$$

for almost all t also.

Proof of Lemma 2.5 One of the first steps of the proof of Proposition 2.2 was to show that

$$\frac{1}{\epsilon} P_t (\Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_{t+\epsilon} u) - \Gamma(h)\mathcal{E}(\pi_t u))$$

converges to $u(t)H_t^-\mathcal{E}(\pi_t u)$. Now, on the n -th chaos, the above quantity is equal to

$$\frac{1}{\epsilon} P_t ((h\pi_{t+\epsilon} u)^{\circ n} - (h\pi_t u)^{\circ n}),$$

and writing $h\pi_{t+\epsilon} u = h\pi_{[t, t+\epsilon]} u + h\pi_t u$, and expanding that expression, we obtain that the above is

$$\frac{1}{\epsilon} P_t (h\pi_{[t, t+\epsilon]} u \circ (h\pi_t u)^{\circ(n-1)} + (h\pi_{[t, t+\epsilon]} u)^{\circ 2} \circ (h\pi_t u)^{\circ(n-2)} + \dots + (h\pi_{[t, t+\epsilon]}^{\circ n} u))$$

and since $\frac{1}{\epsilon} \pi_t h\pi_{[t, t+\epsilon]} u$ converges to $u(t)\alpha_t$, the normalisations imply that the above converges almost everywhere to $u(t)\alpha_t \circ (\pi_t h\pi_t u)^{\circ(n-1)}$, on the n -th chaos, so that we obtain equality (2.10). □

We now apply Lemma 2.5 to each of the functions u_n . In each relation we can simplify by $u_n(t)$ and still have an equality which holds almost everywhere. Besides, we have a countable set of almost-everywhere equalities so that:

For almost all t in $[0, T]$:

$$\text{for all } n, \quad H_t^-\mathcal{E}(\pi_t u_n) = \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u_n);$$

the right-hand-side converges in $L^2(\mathcal{P})$, hence the left-hand-side also does.

Since $\mathcal{E}(\pi_t u_n)$ converges to $\mathcal{E}(\pi_t u)$ which is in the domain of the closable operator H_t^- , the closability of H_t^- implies that for almost all t ,

$$H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u),$$

a relation which, projected on the first chaos, yields

$$\text{for almost all } t, P^1 H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \alpha_t.$$

□

This concludes the proof of Proposition 2.2.

□

We now take on the second step of our proof, that is, the equivalence of conditions (C) and 2.

Lemma 2.6 *For a bounded operator h , the conditions (C) in Proposition 2.2 are equivalent to the existence of a Hilbert-Schmidt operator K such that*

$$h = K + \mathcal{M}_\gamma,$$

where \mathcal{M}_γ is the multiplication operator by γ .

Proof of Lemma 2.6

That h being of the mentioned form implies conditions (C) is straightforward (and unnecessary for our purpose). Now, to prove the converse, let us define a kernel κ by

$$\begin{cases} \kappa(s, t) = \overline{\beta_t(s)} & \text{if } s < t \text{ and} \\ \kappa(s, t) = \alpha_s(t) & \text{if } s > t. \end{cases} \quad (2.11)$$

Our assumptions on α and β show that

$$\int_{0 < s < t} |\kappa(s, t)|^2 ds dt < +\infty$$

and

$$\int_{0 < t < s} |\kappa(s, t)|^2 ds dt < +\infty$$

so that the kernel κ defines a Hilbert-Schmidt operator K which is in particular a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$. The operator of multiplication by γ is

also bounded. Therefore we can consider $h - K - \mathcal{M}_\gamma$ instead of h and show that, if h satisfies **(C)** with α, β, γ all null then h is the null operator.

To prove that claim, observe that if $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, and $a < b$, then for almost every $t > b$:

$$\begin{aligned} h(u\mathbb{1}_{[a,b]})(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} h(u\mathbb{1}_{[a,b]})(s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle (h^* \mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]})/\epsilon, u\mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \end{aligned}$$

and the limit is zero since the restriction of $(h^* \mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]})/\epsilon$ to $[0, t]$ converges to zero in L^2 . Therefore $h(u\mathbb{1}_{[a,b]})$ is a.e. null on $[b, +\infty[$. The same property holds by symmetry for h^* .

For $c < d < a$,

$$\int_c^d h(u\mathbb{1}_{[a,b]})(s) ds = \langle h^* \mathbb{1}_{[c,d]}, u\mathbb{1}_{[a,b]} \rangle$$

which is zero by the previous step.

Therefore $h(u\mathbb{1}_{[a,b]})$ has support in $[a, b]$, so that for any $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, any interval I of \mathbb{R}_+ , one has

$$h(u\mathbb{1}_I) = \mathbb{1}_I(hu.)$$

From this one deduces that h is a multiplication operator. It is straightforward from the last condition in **(C)** with $\gamma = 0$ that this multiplication is null.

□

Proof of 3. \Rightarrow 1. of Theorem 2.1

Suppose that h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}_\gamma$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator with kernel κ . We then define for any $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t) u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u), \end{cases} \quad (2.12)$$

and extend all three operators by adaptedness. Remark that this means that on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$,

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = P_t \Gamma(h) a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = P_t a_{\kappa(t, \cdot)}^+ \Gamma(h) P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t. \end{cases} \quad (2.13)$$

From the above equations one can check that, if one denotes by \tilde{H}_t^+ , \tilde{H}_t^- , \tilde{H}_t° the operators defined in an analogous way from h^* instead of h , then the equalities

$$\begin{aligned} \tilde{H}_t^+ &= (H_t^-)^* \\ \tilde{H}_t^- &= (H_t^+)^* \\ \tilde{H}_t^\circ &= (H_t^\circ)^* \end{aligned}$$

hold on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$; this implies that the integrands we have defined are closable.

From formulas (2.12) one also derives the estimates

$$\begin{cases} \|H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)\|^2 \leq \int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds \|\pi_t u\|^2 \exp(\|h\|^2 \|\pi_t u\|^2) \\ \|H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u)\|^2 \leq \int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds \exp(\|h\|^2 \|\pi_t u\|^2) \\ \|H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u)\|^2 \leq (\|\gamma\|_\infty + 1)^2 \exp(\|h\|^2 \|\pi_t u\|^2), \end{cases} \quad (2.14)$$

which imply that for all $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $|u(t)| \|H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u)\|$ is integrable and $\|H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)\|$, $|u(t)| \|H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u)\|$ are square-integrable.

The operator

$$H = \text{Id} + \int_0^\infty H_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty H_s^- da_s^- + \int_0^\infty H_s^\circ da_s^\circ$$

is therefore well-defined on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$. One can check that the operator

$$\text{Id} + \int_0^\infty \tilde{H}_s^+ da_s^+ + \int_0^\infty \tilde{H}_s^- da_s^- + \int_0^\infty \tilde{H}_s^\circ da_s^\circ$$

is adjoint to H on the exponential domain, so that H has a densely defined adjoint, and therefore is closable.

We now prove that H actually equals $\Gamma(h)$ on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$. Let u belong to $L^2(\mathbb{R}_+)$. Then

$$\begin{aligned} H\mathcal{E}(u) &= \Omega + \int_0^\infty u(s)H_s\mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s + \int_0^\infty H_s^+\mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s \\ &\quad + \int_0^\infty u(s)H_s^-\mathcal{E}(\pi_s u) ds + \int_0^\infty u(s)H_s^\circ\mathcal{E}(\pi_s u) d\chi_s \end{aligned}$$

and for almost all $t \in \mathbb{R}_+$,

$$D_t H\mathcal{E}(u) = u(t)H_t\mathcal{E}(\pi_t u) + H_t^+\mathcal{E}(\pi_t u) + D_t \int_0^\infty u(s)H_s^-\mathcal{E}(\pi_s u) ds + u(t)H_t^\circ\mathcal{E}(\pi_t u)$$

so that, for $\sigma < t$ one has

$$\begin{aligned} D_t H\mathcal{E}(u)(\sigma) &= u(t)H_t\mathcal{E}(\pi_t u)(\sigma) + \int_0^t \kappa(s, t)u(s) ds (h\pi_t u)(\sigma) \\ &\quad + \int_t^{+\infty} u(s)H_s^-\mathcal{E}(\pi_s u)(\sigma \cup t) ds + u(t) (\gamma(t) - 1) (h\pi_t u)(\sigma). \end{aligned}$$

Where the a^- integral is restricted to $[t, +\infty[$ for reasons of adaptedness.

We will write $(h\pi_t u)(\sigma)$ for $\prod_{a \in \sigma} (h\pi_t u)(a)$ or the equivalent short notation for other functions, as is customary. We now use the fact that for a in σ ,

$$h\pi_t u(a) = \int_0^t \kappa(s, a)u(s) ds + u(a)\gamma(a)$$

and develop such expressions as $(h\pi_t u)(\sigma)$:

$$\begin{aligned} D_t H\mathcal{E}(u)(\sigma) &= u(t) (H_t\mathcal{E}(\pi_t u) - \mathcal{E}(h\pi_t u))(\sigma) + \sum_{\tau \subset \sigma} \prod_{a \in \tau \cup t} \left(\int_0^t \kappa(s, a)u(a) ds \right) (u\gamma)(\sigma \setminus \tau) \\ &\quad + \int_t^{+\infty} u(s) \sum_{b \in \sigma \cup t} \kappa(s, b)(h\pi_s u)(\sigma \cup t \setminus b) ds + \sum_{\tau \subset \sigma} \prod_{a \in \tau} \left(\int_0^t \kappa(s, a)u(a) ds \right) (u\gamma)(\sigma \cup t \setminus \tau). \end{aligned}$$

where all unions \cup denote *disjoint* unions. The term with the $\int_t^{+\infty}$ integral is equal to

$$\begin{aligned} &\int_t^{+\infty} \kappa(s, t)u(s) \sum_{\tau \subset \sigma} \prod_{a \in \tau} \int_0^s \kappa(r, a)u(r) dr ds (u\gamma)(\sigma \setminus \tau) \\ &\quad + \sum_{\tau \cup \nu \cup \{b\} = \sigma} \int_t^{+\infty} \kappa(s, b)u(s) \prod_{a \in \tau} \int_0^s \kappa(r, a)u(r) dr ds (u\gamma)(\nu + t) \\ &\quad + \sum_{\tau \cup \nu \cup \{b\} = \sigma} \int_t^{+\infty} \kappa(s, b)u(s) \prod_{a \in \tau \cup t} \int_0^s \kappa(r, a)u(r) dr ds (u\gamma)(\tau). \end{aligned}$$

From this formulation one can see that $(D_t H \mathcal{E}(u) - u(t) H_t \mathcal{E}(p_t u) - \mathcal{E}(h p_t u))(\sigma)$ is

$$((u\gamma)(t) + \int_0^\infty \kappa(s, t) u(s) ds) \sum_{\tau \cup \nu = \sigma} \int_0^\infty \prod_{a \in \tau} \kappa(r, a) u(r) dr (u\gamma)(\nu)$$

which equals $\mathcal{E}(hu)(\sigma \cup \{t\})$, and we have proved that

$$D_t H \mathcal{E}(u) - D_t \mathcal{E}(hu) = u(t) P_t (\mathcal{E}(hu) - \mathcal{E}(h \pi_t u)).$$

Since $H \mathcal{E}(u)(\emptyset) = \mathcal{E}(hu)(\emptyset)$, the previsible representation isometry (1.4) yields

$$\begin{aligned} \|H \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(hu)\|^2 &= \int_0^\infty |u(t)|^2 \|P_t (H \mathcal{E}(\pi_t u) - \mathcal{E}(h \pi_t u))\|^2 dt \\ &\leq \int_0^\infty |u(t)|^2 \|(H \mathcal{E}(\pi_t u) - \mathcal{E}(h \pi_t u))\|^2 dt, \end{aligned}$$

and this allows us to conclude that $H \mathcal{E}(\pi_T u) = \mathcal{E}(h \pi_T u)$ for any T in \mathbb{R}_+ thanks to Gronwall's lemma. The closability of H , which we have proved before, entails $H \mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(hu)$.

This ends the proof of the equivalence of 1. and 3.

Extension of the representation to \mathcal{J}

We consider the stochastic integral representation defined on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ above and prove now that it holds on all of the domain \mathcal{J} . First of all, since $D_t j(g, f) = g(t) \mathcal{E}(f_t)$, the estimates (2.14) are enough to prove that $t \mapsto \|H_t^- D_t j(g, f)\|$ and $t \mapsto \|H_t^\circ D_t j(g, f)\|^2$ are integrable. Now one needs to show that H_t^+ can be extended to $j(g, f)$: one defines it through (2.13). To prove that it is well-defined it is enough to show, since the restriction of $\Gamma(h)$ to the n -th chaos has norm $\|h\|^n$, that, denoting by P^n the projection on the n -th chaos,

$$\sum_{n \geq 0} \|h\|^{2n} \left\| P^n (a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t j(g, f)) \right\|^2 < +\infty,$$

and this series would be an upper bound for $\|H_t^+ P_t j(g, f)\|^2$. One can see that, for almost all $s_1 < \dots < s_n$,

$$\begin{aligned} a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t j(g, f)(s_1, \dots, s_n) &= \int_0^{s_n} \kappa(r, t) f(r) dr j(g, f)(s_1, \dots, s_n) \\ &\quad + \int_{s_n}^t \kappa(r, t) g(r) dr \mathcal{E}(f_t)(s_1, \dots, s_n), \end{aligned}$$

so that

$$\left\| P^n a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t j(g, f)(s_1, \dots, s_n) \right\|^2 \leq 2 \int_0^t |\kappa(r, t)|^2 dr (\|f\|^2 \|P^n j(g, f)\|^2 + \|g\|^2 \|P^n \mathcal{E}(f)\|^2).$$

Since $\sum_{n \geq 0} \|h\|^{2n} \|P^n j(g, f)\|^2$ and $\sum_{n \leq 0} \|h\|^{2n} \|P^n \mathcal{E}(f)\|^2$ are finite, this proves both that H_t^+ is well defined on \mathcal{J} and that $t \mapsto \|H_t^+ P_t j(g, f)\|$ is square-integrable. Therefore the considered quantum stochastic integral is defined on \mathcal{J} and a proof that it actually equals $\Gamma(h)$ on that set would be similar to the proof of equality on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

Proof in the case of the finite particle domain To obtain the equivalence of 2. and 3. in Theorem 2.1 we need to obtain the following implications:

- condition 2. implies conditions (C),
- condition 3. on the form of h implies condition 2.,

because the other parts of the proof are unchanged.

To prove conditions (C) from 2. one first computes for u in $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$P_t \Gamma(h) \int_0^{t+\epsilon} u(s) d\chi_s - P_t \Gamma(h) \int_0^t u(s) d\chi_s$$

and shows that this implies

$$(\pi_t h \pi_{[t, t+\epsilon]} u) / \epsilon = \frac{1}{\epsilon} P_t \int_t^{t+\epsilon} u(s) H_s^- \Omega ds$$

so that $\pi_t h \pi_{[t, t+\epsilon]} u / \epsilon$ converges to $u(t) H_t^- \Omega$. Since

$$u(t) H_t^- \Omega = H_t^- D_t \left(\int_0^\infty u(s) d\chi_s \right),$$

this implies as before that $P^1 H_t^- \Omega$ belongs to $L^2(\mathbb{R}_+)$ and that $t \mapsto \|\alpha_t\|$ is square-integrable. By duality this proves the first three conditions in (C).

The proof of the fourth and fifth conditions in (C) is similar to the one we have given in the case of the exponential domain, the assumed representation being applied to $\int u(s) d\chi_s$ instead of $\mathcal{E}(u)$.

Assuming that $h = K + \mathcal{M}_\gamma$ with Hilbert-Schmidt K and essentially bounded γ we know from the previous case that the quantum stochastic integral with integrands given by (2.12) is well-defined and equal to $\Gamma(h)$ on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$. It is immediate to see that the integral is also defined on \mathcal{F} ;

besides, it is clear from the formulas for the integrands that any chaos space is stable by the so defined integral operator. Therefore the equality of $\Gamma(h)$ and the integral operator on an exponential $\mathcal{E}(u)$ imply, for any n in \mathbb{N} , the equality on $u^{\circ n}$, hence by polarization the equality on any $u_1 \circ \dots \circ u_n$. This ends the proof of Theorem 2.1. □

Possible extensions of Theorem 2.1 It is clear that the hypothesis in 1. that the integral representation of the considered operator is valid on the whole of the exponential domain is most important to our proof: it is what enables us to prove that the functions $t \mapsto \|\alpha_t\|$, $t \mapsto \|\beta_t\|$ are square-integrable, implying that the kernel operator we construct is of Hilbert-Schmidt type. It would be interesting for applications to consider weaker assumptions such as the representability on $\mathcal{E}(L^2 \cap L^p)$, the set of exponentials of functions both in $L^2(\mathbb{R}_+)$ and $L^p(\mathbb{R}_+)$. In that case we obtain the property that $t \mapsto \|\alpha_t\|$ and $t \mapsto \|\beta_t\|$ belong to $L^2(\mathbb{R}_+) + L^q(\mathbb{R}_+)$ where $q = p/p - 1$, but this has no such simple consequences on the form of h as in the case we have treated. See [Pau] for detailed results and proofs.

2.2 The Journé-Meyer counterexample

First of all one should remark that the counterexample of Journé and Meyer is a counterexample to the representability of $\Gamma(h)$; nothing is said of the representability of $\Gamma(h^*)$. Yet the same phenomena appear as in our case and the representability of $\Gamma(h)$ on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ would be equivalent to the fact that h is of the form $K + \mathcal{M}_\gamma$ as before.

Indeed, here $h^* = -h$; this has no *a priori* consequence on the representability of $\Gamma(h^*)$ but it nevertheless allows us to obtain all conditions (C): the representability of $\Gamma(h)$ alone gives the first condition in (C), the relation $h = h^*$ gives the second one and the rest is proved as before. Therefore h is of the form $h = K + \mathcal{M}_\gamma$.

In the considered case the operator h satisfies $h\mathbb{1}_{[a,b]}(s) = \frac{1}{\pi} \log \frac{s-a}{s-b}$ for a.a. s (see [J-M]). This implies that $\frac{1}{\epsilon} h\mathbb{1}_{[t,t+\epsilon]}$ converges almost everywhere to $s \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{t-s}$, and this last function is not square-integrable, so that the above convergence can not hold in the L^2 sense. This operator h is therefore far from fulfilling conditions (C): the associated α_t is such that $\int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s$ does not define an element of Φ , so that the equality

$$H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \alpha_t(s) d\chi_s \circ \mathcal{E}(\pi_t h \pi_t u),$$

can not be given a definite meaning for any u .

This is why a stochastic integral representation can be defined only in a weaker way: indeed the representation defined in Parthasarathy's response [Par] is probably the best possible one: $H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u)$ is defined only for u 's with some regularity (enough to make the integral $\int_0^t \frac{1}{t-s} u(s) ds$ meaningful) and H_t^- is only defined as a distribution, through the action of its adjoint.

Let us make an additional remark: the function u pointed out by Journé and Meyer is actually bounded with compact support, so that it belongs to all sets $L^p(\mathbb{R}_+)$; this proves that $\Gamma(h)$ is not representable even on the smaller subspaces $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. As we noted before, a more general characterization of representability on such a subspace is given in [Pau]; in this example the representability defect is actually so strong (the kernel is not even square integrable in one variable) that that characterization does not teach us anything new about this particular case.

2.3 Second quantization operators as regular martingales

It is clear from formulas 2.12 or 2.13 that the boundedness of $\Gamma(h)$ is strongly linked to that of the operators H_t^+ , H_t^- , H_t° . This allows us to obtain a pleasant characterization of the operators of $\Gamma(h)$ that belong to one of Attal's semimartingale algebras (see [At1]).

We recall the definition of the two semimartingale algebras:

Definition 2.7 • *An operator H is an element of \mathcal{S}' if it has a quantum stochastic integral representation with bounded integrands H_t^+ , H_t^- and H_t° that moreover are such that $t \mapsto \|H_t^+\|$, $\|H_t^-\|$ are square integrable functions and $t \mapsto \|H_t^\circ\|$ is an essentially bounded function.*

- *An operator H is an element of \mathcal{S} if it is an element of \mathcal{S}' and is a bounded operator.*

Proposition 2.8 *For a second quantization operator $\Gamma(h)$ the following are equivalent:*

1. $\Gamma(h)$ belongs to \mathcal{S}' ,
2. $\Gamma(h)$ belongs to \mathcal{S} ,
3. h is of the form $K + \mathcal{M}_\gamma$ as in Theorem 2.1 and h is a contraction.

Proof.

We first prove that 3. implies that $\Gamma(h)$ is an element of \mathcal{S} . If h is a contraction then (2.14) shows that H_t^-, H_t° are bounded on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$, with norms smaller than $\sqrt{\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds}$, $(\|f\|_\infty + 1)$ respectively. That is, both can be extended as bounded operators on Φ , with $t \mapsto \|H_t^-\|$ and $t \mapsto \|H_t^\circ\|$ respectively square-integrable and essentially bounded. Now to prove that H_t^+ is bounded we recall the following earlier remark: if one denotes by \tilde{H}_t^- the analogue of operator H_t^- associated to h^* , then the equality $\tilde{H}_t^- = (H_t^+)^*$ holds on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$. Therefore the adjoint of H_t^+ is contained in a bounded operator with norm $\sqrt{\int_0^t |\kappa(s, t)|^2 dr}$, the closure of H_t^+ is a bounded operator and $t \mapsto \|H_t^+\|^2$. The operator $\Gamma(h)$ itself is bounded so that finally $\Gamma(h) \in \mathcal{S}$.

Now let us prove that 1. implies 3.: we suppose that $\Gamma(h)$ has a representation as a quantum stochastic integral with the relevant boundedness assumptions on H_t^+, H_t^-, H_t° . Then the same property holds for $\Gamma(h^*)$ (see [At1]) and our Theorem 2.1 applies, and shows that h is of the form $K + \mathcal{M}_\gamma$ as before. Besides, since the integrands H_t^+, H_t^-, H_t° are bounded and therefore closable, Attal's uniqueness theorem applies (see [At2]) and shows that the integrands satisfy formulas (2.12). Therefore

$$\|H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u)\|^2 = \|\alpha_t\|^2 \exp \|(h\pi_t u)_t\|^2,$$

and is to be smaller than a constant times $\exp \|\pi_t u\|^2$ for every u . Denote by π_t the projection in $L^2(\mathbb{R}_+)$ of restriction to $[0, t]$; it is necessary that $u \mapsto \pi_t h \pi_t$ be a contraction. This being true for every t , one has for any u in $L^2(\mathbb{R}_+)$, any s , any t larger than s that

$$\|\pi_t h \pi_s u\| \leq \|u\|,$$

so that $h\pi_s$ is a contraction for any s . The boundedness of h implies that h is itself a contraction.

That 2. implies 1. is always true, so that the proof is complete. □

3 Differential second quantization operators

We consider now the case of differential second quantization operators and obtain a characterization which is exactly the same as in the previous case of non differential second quantizations. The explicit formulas for the integrands in the obtained representations are given below in (3.1) and (3.2).

Theorem 3.1 *Let h be a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$. The following properties are equivalent:*

1. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ of exponential vectors
2. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set \mathcal{F} of finite particle vectors
3. h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}_\gamma$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator and \mathcal{M}_γ is a multiplication by a L^∞ function γ .

Besides, if one of these holds, then the stochastic integral representation holds on the set $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

Note that this theorem is an improvement of a result proved by Coquio in [Coq], where the representation of $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ in 1. was assumed to hold on the set \mathcal{J} .

Proof.

Observe simply that our proof of Proposition 2.2 uses only equalities involving the stochastic integral operator and $\Gamma(h)\mathcal{E}(u)$ or $\Gamma(h^*)\mathcal{E}(u)$ on the chaoses of order zero and one, for functions u in $L^2(\mathbb{R}_+)$. But then $\lambda(h)\mathcal{E}(u)$ (respectively $\lambda(h^*)\mathcal{E}(u)$) coincides with $\Gamma(h)\mathcal{E}(u)$ (respectively $\Gamma(h^*)\mathcal{E}(u)$) on the chaos of order one, and is zero independently of u on the chaos of order zero whereas $\Gamma(h)\mathcal{E}(u)$ (respectively $\Gamma(h^*)\mathcal{E}(u)$) is one independently of u on that same chaos. Therefore it is easy to see that our proof of Proposition 2.2 would hold if we considered *differential* second quantization operators instead of the non differential ones. That 1. implies 2. is then proved by Lemma 2.6. The proofs for the converse and the extension to \mathcal{J} are also similar to the previous: if 2. is assumed then we define H_t^+ , H_t^- , H_t° by the following formulas:

$$\begin{cases} H_t^+ \mathcal{E}(\pi_t u) = \int_0^t \kappa(s, t) u(s) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^- \mathcal{E}(\pi_t u) = \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \int_0^t \kappa(t, s) d\chi_s \\ H_t^\circ \mathcal{E}(\pi_t u) = (\gamma(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u), \end{cases} \quad (3.1)$$

then the definiteness of the integral

$$H = \int H_s^+ da_s^+ + \int H_s^- da_s^- + \int H_s^\circ da_s^\circ$$

on \mathcal{J} and the equality $D_t H j(v, u) = D_t \lambda(h) j(v, u)$ are obtained as before.

□

Note that above defined integrals have a more general expression:

$$\begin{cases} H_t^+ P_t = a_{\kappa(\cdot, t)}^- P_t \\ H_t^- P_t = a_{\kappa(t, \cdot)}^+ P_t \\ H_t^\circ P_t = (\gamma(t) - 1) P_t. \end{cases} \quad (3.2)$$

4 The case of Fock space of higher multiplicity

Once again the proofs in this section would be simple rewritings of the proof of Theorem 2.1; our task will be therefore to point out the similarities and to define a correct way of writing our conditions in a concise form.

Let us consider as in the preliminaries a fixed hilbertian basis $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ of our multiplicity space \mathcal{K} . Let us define, or recall, the terms to appear below:

Definition 4.1

- A Hilbert-Schmidt operator in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ is an operator K for which there exists a family $(\kappa_{i,j})_{i,j \in \mathcal{I}}$ of functions in $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ such that

$$\sum_{i,j \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} |\kappa_{i,j}(s, t)|^2 ds dt < +\infty$$

and for all i in \mathcal{I} , almost all s in \mathbb{R}_+ ,

$$K f(s, i) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_0^\infty \kappa_{i,j}(r, s) f(r, j) dr.$$

- A matrix multiplication operator is an operator M_γ for which there exists a set of functions $(\gamma_{i,j})_{i,j \in \mathcal{I}}$ on \mathbb{R}_+ such that for almost all s in \mathbb{R}_+ , the quantity

$$\|\gamma\|(s) = \left(\sum_{i,j \in \mathcal{I}} |\gamma_{i,j}(s)|^2 \right)^{1/2}$$

is finite and

$$M_\gamma f(s, i) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \gamma_{i,j}(s) f(s, j).$$

Here are Theorems 2.1 and 3.1 rolled into one in the case of Fock space of infinite multiplicity. The formulas for the integrands are given below, in (4.2), (4.3) for the integrands of $\Gamma(h)$ and (4.4), (4.5) for the integrands of $\lambda(h)$.

Theorem 4.2 *Let h be a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. The following properties are equivalent:*

1. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ of exponential vectors
2. $\Gamma(h)$ and $\Gamma(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ of finite particle vectors
3. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ of exponential vectors
4. $\lambda(h)$ and $\lambda(h^*)$ have a stochastic integral representation on the set $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ of finite particle vectors
5. h is of the form

$$h = K + \mathcal{M}_{\gamma}$$

where K is a Hilbert-Schmidt operator and \mathcal{M}_{γ} is a multiplication by a matrix $(\gamma_{i,j})_{i,j \in \mathcal{I}}$ such that the function $\|\gamma\|$ is essentially bounded on \mathbb{R}_+ .

Besides, if one of these holds, then the representations hold on the set $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$.

Proof.

The proof is essentially the same as before: consider for instance the equivalence of 1. and 3.. By the same arguments as in the case of multiplicity one, the “i,j matrix element” $\Gamma(h)_{i,j}$ of $\Gamma(h)$ is of the form

$$\Gamma(h)_{i,j} = K_{i,j} + \mathcal{M}_{\gamma_{i,j}} \quad (4.1)$$

where $\gamma_{i,j}$ is an essentially bounded function and $K_{i,j}$ is a Hilbert-Schmidt operator with kernel $\kappa_{i,j}$. Besides, the operator $\Gamma(h)$ is bounded and equality (4.1) for all i, j imply that the operator K with kernel $(\kappa_{i,j})_{i,j \in \mathcal{I}}$ is bounded. Indeed, for any t in \mathbb{R}_+ , $P_t \Gamma(h)_{i,j} P_t = P_t K_{i,j} P_t$ and from this and the dual relation one deduces that $P_t \Gamma(h) P_t$ is bounded uniformly in t . The operator of multiplication by the matrix $(\gamma_{i,j})_{i,j \in \mathcal{I}}$ is thus also bounded; the theory of Hilbert-Schmidt operators then implies that these operators satisfy integrability assumptions as in Definition 4.1.

The proof that 3. allows the construction of a well-defined integral which coincides with the desired operator is exactly the same as before. The formulas for integrands are the following:

Integrands for the representation of $\Gamma(h)$: the integrands in the representation of $\Gamma(h)$ are given by:

$$\begin{aligned} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) &= \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}((h\pi_t u)_t) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) &= \mathcal{E}((h\pi_t u)_t) \circ \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{j,i} \mathcal{E}(\pi_t u) &= (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}((h\pi_t u)_t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

for all i, j in \mathcal{I} . Otherwise stated, they satisfy the following equalities on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ and \mathcal{F} ,

$$\begin{aligned} H_t^{0,i} P_t &= P_t \Gamma(h) P_t \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} \\ H_t^{j,0} P_t &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \Gamma(h) P_t \\ H_t^{j,i} P_t &= (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t \Gamma(h) P_t, \end{aligned} \tag{4.3}$$

and these equalities can be extended to $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

Integrands for the representation of $\lambda(h)$: the integrands in the representation of $\lambda(h)$ are given by:

$$\begin{aligned} H_t^{0,i} \mathcal{E}(\pi_t u) &= \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(s, t) u(s, j) ds \mathcal{E}(\pi_t u) \\ H_t^{j,0} \mathcal{E}(\pi_t u) &= \mathcal{E}(\pi_t u) \circ \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) d\chi_s^i \\ H_t^{j,i} \mathcal{E}(\pi_t u) &= (\gamma_{i,j}(t) - 1) \mathcal{E}(\pi_t u). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Otherwise stated, they satisfy the following equalities on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$ and $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\begin{aligned} H_t^{0,i} P_t &= \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_0^t \overline{\kappa_{i,j}(s, t)} da_s^{j,0} P_t \\ H_t^{j,0} P_t &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^t \kappa_{i,j}(t, s) da_s^{0,i} P_t \\ H_t^{i,j} P_t &= (\gamma_{i,j}(t) - 1) P_t, \end{aligned} \tag{4.5}$$

and these equalities can be extended to $\mathcal{J}(L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}))$.

5 The case of unbounded operators

This section is meant to handle the case where h is an unbounded operator. In this particular case, the lack of information about the domain makes it impossible to obtain simple conditions on the form of h . One can still obtain necessary conditions for the representability of $\Gamma(h)$: for example, for any u in the domain of h , one has for almost all t

- $(hu_{t,t+\epsilon})/\epsilon$ converges in $L^2([0, t])$,
- $\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon hu_{[t,t+\epsilon]}(s)ds$ converges to some complex number.

But these conditions do not translate to a more satisfactory condition on h .

Nevertheless, sufficient conditions are very easy to obtain: the proof of Theorem 2.1 makes it clear that it is enough for $\Gamma(h)$ to be representable on $\mathcal{E}(L^2(\mathbb{R}_+))$ that the expressions in 2.12 and 3.1 be well-defined on the set $\mathcal{E}(\text{Dom } h)$ with estimates that make the quantum stochastic integrals also well-defined. This is summarized in the next proposition:

Proposition 5.1 *Let h be an operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$ with domain $\text{Dom } h$. Assume that there exist a function $\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ and a function $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ such that, for any u in $\text{Dom } h$, almost all s in \mathbb{R}_+ ,*

$$hu(s) = \int_0^\infty \kappa(r, s)u(r)dr + u(s)f(s).$$

Consider the following conditions:

1. $t \mapsto \int_0^t |\kappa(s, t)|^2 ds$ is integrable,
2. for any u in $\text{Dom } h$, $t \mapsto |u(t)| \sqrt{\int_0^t |\kappa(t, s)|^2 ds}$ and $t \mapsto |f(t) - 1| |u(t)|$ are integrable,
3. for fixed u in $\text{Dom } h$, $\|(h\pi_t u)_t\|$ is uniformly bounded in t .

Then:

- If conditions 1. and 2. hold, then $\lambda(h)$ is representable as a quantum stochastic integral on $\mathcal{J}(\text{Dom } h)$, that is, the set of vectors of the form $j(g, f)$ with g, f in $\text{Dom } h$.
- If conditions 1., 2. and 3. hold, then $\Gamma(h)$ is representable as a quantum stochastic integral on $\mathcal{J}(\text{Dom } h)$.

References

- [At1] S.ATTAL: An algebra of noncommutative bounded semimartingales, square and angle quantum brackets, *Journal of Functional Analysis* 124 (1994), Academic Press, pp. 292-332.
- [At2] S.ATTAL: Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock, *Sém. de Probabilités XXVI* (1993), Springer Verlag, pp. 619-632.
- [At3] S.ATTAL: Classical and quantum stochastic calculus, *Quantum Probability and Related Topics X* (1998), World Scientific, pp.1-52.
- [A-M] S. ATTAL and P.A. MEYER: Interprétations probabilistes et extension des intégrales stochastiques non commutatives, *Sém. de Probabilités XXVII*, Springer Verlag, LNM 1557 (1993), pp. 312-327.
- [Coq] A.COQUIO: Stochastic integral representations of unbounded operators in Fock spaces, *Journal of the London Mathematical Society*, to appear.
- [Gui] A.GUICHARDET: Symmetric Hilbert spaces and related topics, Springer Verlag LNM 261 (1970).
- [J-M] J.L. JOURNÉ and P.A. MEYER: Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique, *Sém. de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 313-316.
- [Mey] P.A.MEYER: Quantum probability for probabilists, Springer-Verlag LNM 1538 (1993).
- [Par] K.R. PARTHASARATHY: A remark on the paper "Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique", *Sém. de Probabilités XX* (1986), Springer Verlag, pp. 317-320.
- [P-S] K.R. PARTHASARATHY and K.B. SINHA: Representation of bounded quantum martingales in Fock space, *Journal of Functional Analysis* 67 (1986), pp. 126-151.
- [Pau] Y. PAUTRAT: From Pauli matrices to quantum noises, *Ph.D. thesis*, Université Joseph Fourier (2003).

Annexe D

Interactions quantiques répétées et continues : la production spontanée de bruits quantiques

From repeated to continuous quantum interactions: The spontaneous production of quantum noises

Stéphane ATTAL and Yan PAUTRAT

Institut FOURIER
U.M.R. 5582
BP 74
38402 St Martin d'Hères cedex
France

Abstract

Consider a simple quantum system with state space \mathcal{H}_0 which is coupled to another quantum system with state space \mathcal{H} . They evolve together for a short time h following an Hamiltonian evolution e^{ihH} . After this interaction \mathcal{H}_0 is decoupled from \mathcal{H} and put into contact with another copy of the system \mathcal{H} , independently of the first one. We then let both evolve together in the same way as previously. We discuss the discrete time quantum evolution which is induced by repeating indefinitely these successive interactions, which are determined by H and h only. When passing to the limit towards continuous quantum dynamics ($h \rightarrow 0$), we show that some quantum noises and quantum stochastic differential equations are spontaneously produced by these deterministic dynamics. For the very first time, these “stochastic Schrödinger equations” (or “quantum Langevin equations”) do not appear as a model anymore but as a true limit of repeated deterministic quantum interactions. We apply these results to the passage from repeated to continuous quantum measurement, for which we justify the usual stochastic Schrödinger limit model from the more and more frequent repetition of a fixed quantum measurement. We also apply these results to the approximation of continuous time quantum master equations by discrete time ones. In particular we show how completely positive maps tend to Lindblad generators after convenient normalization. We finally apply these results to a rigorous discussion of the “coarse-grained approximation” method in quantum optics.

Contents

I. Introduction and main results

I.1 Physical motivations

I.2 Main mathematical results

II. Discrete dynamics on the spin chain

II.1 A model for repeated interactions

II.2 The spin chain and evolution equations

II.3 Unitary dilations of completely positive semigroups

III. Convergence to quantum stochastic differential equations

III.1 Approximation of the Fock space by spin chains

III.2 Quantum stochastic integrals and their projections

III.3 Quantum stochastic differential equations

III.4 Convergence theorems

IV. Convergence of semigroups and generators

IV.1 From discrete to continuous master equations

IV.2 Application to “coarse-grained approximation” in quantum optics

I. Introduction and main results

I.1 Physical motivations

It is part of the folklore in continuous quantum measurement theory or quantum optics models that the associated quantum dynamics are well modeled by a stochastic Schrödinger equation (or quantum Langevin equation), that is, a Schrödinger equation perturbed by additional quantum noise terms (or sometimes classical noise terms). These kinds of evolution equations are in general justified as *models* for the interaction of a small system with a large environment; they give rise to unitary dilations of the associated master equation on the small system; they give an account of the Markovian character of the evolution.

The aim of this article is to show that these stochastic Schrödinger equations appear not only as a satisfactory model, but as a true limit of a very general class of discrete quantum dynamics: repeated short interactions with some environment.

The general physical context which is involved in this article can be described as follows: we consider a *small quantum system* \mathcal{H}_0 (a finite dimensional Hilbert space in our article) and another quantum system \mathcal{H} which represents an environment, a measurement apparatus, incoming photons... or any other system which is going to interact with the small system. We consider $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ to couple the two systems, and consider a unitary operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ which describes an interaction of the two systems during a small interval of time h : typically, \mathbb{L} is of the form $\mathbb{L} = e^{ihH}$ for some Hamiltonian H on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$.

Now we repeat this interaction on the small system with a similar coupling but independently of the first environment. One can think of two main sets of examples where this situation arises: in repeated quantum measurement, where a

family of identical measurement devices is repeatedly presented before the system \mathcal{H}_0 (or one single device which is refreshed after every use); in quantum optics, where a sequence of independent photons arrives one after the other to interact with \mathcal{H}_0 for a short time.

In this article we show that the effect of this coupling on both the small system and the environment are described by an equation of the form

$$u_{n+1} = \mathbb{L}u_n \quad (1)$$

where $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a process of operators on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. We then show that, as the characteristic time interval h of the interactions goes to 0, we reach in the limit to a continuous interaction and the evolution equation (1) converges weakly to a Schrödinger equation perturbed by quantum noise terms:

$$dU_t = L_0^0 U_t dt + \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t) \quad (2)$$

where the L_j^i are operators on \mathcal{H}_0 ; such an equation is called in physicist language a *quantum Langevin equation*. The operator L_0^0 encodes the resulting dynamic on \mathcal{H}_0 ; the other operators L_j^i on \mathcal{H}_0 , coupled to quantum noises da_j^i , encode the interaction of \mathcal{H}_0 with the environment. The solution to this stochastic differential equation completely determines the master equation associated to this evolution; yet it contains more information than the master equation since it summarizes the evolution of the whole system, including the dissipation into the environment.

These results are of a very new type in the following sense. Evolution equations such as (2) have been known for 25 years to *modelize* the dissipative interaction of simple quantum systems with large environments. They are used in quantum optics, continuous quantum measurement, electronic transport... But, up to now, they appeared only as a convenient model, to be compared with other models (for example with purely Hamiltonian ones).

With our approach and our results, these evolution equations appear as a true limit of the detailed discrete dynamic which gives an account of the repeated interactions with the environment. These results show that equations such as (2) are not only models but the true result of the continuous limit of repeated interactions. This shows that the quantum noises (and by the way, the classical noises) appear as a true limit of some elementary interactions.

I.2 Main mathematical results

This article has two backbones: these are the ideas of dilations of completely positive evolutions and the relations between discrete time and continuous time evolutions. The original definition of quantum stochastic integrals by Hudson and Parthasarathy in [H-P] was motivated by the construction of unitary dilations of continuous-time completely positive evolutions. Besides, it was originally remarked by Parthasarathy (see the Exercises 29.12 and 29.13 of [Par]) that, considering such an evolution, it could be approximated by a discrete-time completely positive evolution which itself has a unitary dilation.

In this article we complete the picture; in section II.3 we show that any completely positive discrete-time evolution on the small system \mathcal{H}_0 has a unitary dilation which is obtained by coupling the small system to a spin chain $\otimes \mathbb{C}^{N+1}$. The unitary process which determines the dilation is the solution of an equation of type (1) and this justifies the interest of considering this type of equations.

In section III.4 we prove that, if the coefficients of the matrix \mathbb{L} which determines the discrete-time evolution converge with particular normalizations (coefficients corresponding to the small system having different normalization than the other), then the solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges, as the time scale h tends to zero, to the solution $(U_t)_{t \geq 0}$ of a quantum stochastic differential equation of type (2). This gives an explicit way of approximating continuous-time evolutions and dilations but also fully describes the asymptotic behaviour of a discrete-time evolution. It therefore rigorously establishes Markovian models as limits for Hamiltonian ones.

II. Discrete dynamics on the spin chain

II.1 A model for repeated interactions

We will now introduce our framework; to this end, we consider the case of quantum measurement. The most general quantum measurement made on \mathcal{H}_0 is described as follows (see [K-M]): we consider another (finite dimensional) Hilbert space \mathcal{H} , the *reservoir*, with a given reference state ω ; this space, in this case, represents the measurement apparatus. We couple the two systems and let them evolve together for a certain amount of time. Assume this elementary evolution is described by a unitary operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$; then an initial state (a density matrix) $\rho \otimes \omega$ on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ is transformed into the state

$$\mathbb{L}(\rho \otimes \omega)\mathbb{L}^*.$$

Equivalently, in the Heisenberg picture, an observable $A \otimes B$ on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ is transformed into

$$\mathbb{L}^*(A \otimes B)\mathbb{L}^*.$$

If we want to see the effect of that interaction on the small system only, we trace out the new state along the reservoir:

$$M^*(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{L}(\rho \otimes \omega)\mathbb{L}^*)$$

where $\text{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ denotes the partial trace on \mathcal{H}_0 . In the Heisenberg picture, the new observable on \mathcal{H}_0 is

$$M(A \otimes B) = (I \otimes \omega)(\mathbb{L}^*(A \otimes B)\mathbb{L}^*).$$

We proceed with the Heisenberg picture. Suppose we want to repeat that operation on the small system, that is to repeat the *same* measurement on it, now that its state has been changed. We cannot simply perform the transformation $\mathbb{L} \cdot \mathbb{L}^*$ again on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$, because the state of \mathcal{H} was affected by the first transformation. We have to present a new copy of \mathcal{H} before \mathcal{H}_0 and perform the transformation on that couple. Consider the tensor product $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ and let \mathbb{L}_1 be the copy of the unitary operator \mathbb{L} but acting on the tensor product of \mathcal{H}_0 and the first

copy of \mathcal{H} , so that \mathbb{L}_1 acts as the identity on the second copy. Let \mathbb{L}_2 be the copy of the unitary operator \mathbb{L} but acting on the tensor product of \mathcal{H}_0 and the second copy of \mathcal{H} , so that \mathbb{L}_2 acts as the identity on the first copy. Let $u_1 = \mathbb{L}_1$ and $u_2 = \mathbb{L}_1\mathbb{L}_2$. For any initial observable $A \otimes B \otimes C$ on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ we have

$$(I \otimes \omega \otimes \omega)(u_1^*(A \otimes B \otimes C)u_1) = M(A \otimes B) \otimes \omega(C)$$

and

$$(I \otimes \omega \otimes \omega)(u_2^*(A \otimes B \otimes C)u_2) = M(M(A \otimes B) \otimes C).$$

The results of both the first and the second measurement are computable this way.

It is now easy to figure out what the setup should be for an indefinite number of repeated measurements: we consider as state space

$$\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_N \mathcal{H}.$$

and the operator \mathbb{L}_n which is the copy of the operator \mathbb{L} but acting on the tensor product of \mathcal{H}_0 and the n -th copy of \mathcal{H} ; the operator \mathbb{L}_n acts as the identity on the other copies. Let $u_n = \mathbb{L}_1\mathbb{L}_2 \dots \mathbb{L}_n$, that is, the solution of

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1}u_n.$$

The result of the n -th measurement is then given by

$$\left(I \otimes \bigotimes_N \omega \right) (u_n^*(A \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_n \otimes I \otimes \dots)u_n).$$

In this article we will study the behaviour of the dynamics as the characteristic coupling time h tends to zero and see that it can be obtained *via* a quantum stochastic differential equation. The relevance of our discrete-time model will also be justified by the fact that, just as in continuous time, any completely positive evolution on the small system \mathcal{H}_0 has a unitary dilation in the space $\mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_N \mathcal{H}$.

One example we will follow throughout this article is the simplest non trivial example of such an interaction. The small system is \mathbb{C}^2 and the measuring apparatus is \mathbb{C}^2 also. The unitary evolution operator is

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

with the normalization $\alpha = \sqrt{h}$.

II.2 The spin chain and evolution equations

Let N be an integer ≥ 1 . We consider the Hilbert space \mathbb{C}^{N+1} in which we choose a fixed orthonormal basis denoted by $\{\Omega, X_1, \dots, X_N\}$. This particular choice of notation is motivated by physical and probabilistic interpretations: indeed, this basis can be seen as the eigenstates of the energy levels of an atom (the ground state Ω , the first excited state X_1, \dots) or else describing the occupation of

a site by some particles (Ω represents the vacuum, X_1 the presence of a particule of type 1, ...). There are some interesting probabilistic interpretations of those notations, in terms of n dimensional random walks, which are developed in [AP2]. We shall not evoke that topic here.

Note that, in order to unify the notation we may sometime denote Ω by X_0 .

Let $T\Phi$ be the Hilbert space $\otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1}$. That is, the countable tensor product of copies of \mathbb{C}^{N+1} . A natural orthonormal basis of $T\Phi$ is described by the family

$$\{X_A; A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$$

where

- $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ is the set of finite subsets $A = \{(n_1, i_1), \dots, (n_k, i_k)\}$ of $\mathbb{N} \times \{1, \dots, N\}$ such that the n_i 's are mutually distinct. Another way to describe the set $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ is to identify it to the set of sequences $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with values in $\{0, \dots, N\}$ which take only a finite number of time a value different from 0.

- X_A denotes the vector

$$\Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X_{i_1} \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X_{i_2} \otimes \dots$$

of $T\Phi$, where X_{i_1} appears in the copy number n_1 , X_{i_2} appears in the copy n_2, \dots . When A is seen as a sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ as above, then X_A is advantageously written $\otimes_n X_{A_n}$.

The signification of this basis is physically easy to understand: we have a chain of sites, indexed by \mathbb{N} ; in the interpretation of $T\Phi$ as state space describing the occupancy of different sites, the basis vector X_A above specifies that there is a particule of type i_1 in the site n_1 , a particule of type i_2 in the site n_2, \dots all the other sites being empty. The space $T\Phi$ is what we shall call the *spin chain* with some abuse; we will denote by $T\Phi_{[j]}$ the spin chain until time i , which is the subspace of $T\Phi$ generated by those X_A 's for which A is contained in $\{0, \dots, i\} \times \{0, \dots, N\}$. It will also help for clarity to label the copies of \mathbb{C}^{N+1} and denote by C_i^{N+1} the i -th copy.

We denote $\{a_j^i; i, j = 0, \dots, N\}$ the natural basis of $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{N+1})$; that is, for $(i, j) \neq (0, 0)$

$$a_j^i(X_k) = \delta_{ik} X_j.$$

We denote by $a_j^i(n)$ the natural ampliation of the operator a_j^i to $T\Phi$ which acts on the copy number n as a_j^i and the identity elsewhere.

Note, for information only, that the operators $a_j^i(n)$ form a basis of the algebra $\mathcal{B}(T\Phi)$, that is, the von Neumann algebra generated by the $a_j^i(n)$, $i, j = 0, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$, is the whole of $\mathcal{B}(T\Phi)$ (for $T\Phi$ admits no subspaces which is non trivial and invariant under this algebra).

Suppose now that we are given a finite dimensional Hilbert space \mathcal{H}_0 which we call *initial space* or, in accordance with our physical motivation, *small system*. We consider the spin chain space $T\Phi = \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1}$, presented above, here called

reservoir or large system. We consider an operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$, which we see as a $N \times N$ matrix of operators on \mathcal{H}_0 :

$$\mathbb{L} = (A_j^i)_{i,j=0,\dots,N}.$$

Note that we have indexed the elements of the matrix from 0 to N instead of the usual 1 to N ; this means of course that we will particularize the index zero as corresponding to the small system \mathcal{H}_0 .

For any $i \in \mathbb{N}$, we denote by \mathbb{L}_i the natural ampliation of the operator \mathbb{L} to $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi$ where it is understood that \mathbb{L} acts on the tensor product of \mathcal{H}_0 and the i -th copy \mathbb{C}_i^{N+1} of \mathbb{C}^{N+1} in the spin chain; the operator \mathbb{L}_i thus acts as the identity I on the other copies of \mathbb{C}^{N+1} . For notational convenience it will be easier to consider this operator as acting on $(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_{i-1]) \otimes \mathbb{C}_i^{N+1}$ (and as the identity on other factors), so that it can be written as a $(N+1) \times (N+1)$ matrix with entries $A_j^i \otimes I$, each of which is an operator in $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_{i-1}$. Of course we will usually write simply A_j^i for $A_j^i \otimes I$.

The discrete time evolution equations we shall consider are the following equations on $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi$:

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n \tag{3}$$

for all $n \in \mathbb{N}$, always with initial condition $u_0 = I$. Keep in mind that, despite our choice of notations, any u_n is an operator on $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi$.

The following results are obvious:

Proposition 1 – *The solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of (3) always exists and is unique. It is a sequence of unitary (resp. isometric, contractive) operators if and only if \mathbb{L} is unitary (resp. isometric, contractive).*

The aim of this article is to show that these equations converge, when the time parameter (here equal to 1) tends to 0, towards stochastic differential equations with respect to quantum noises, that is, perturbations of Schrödinger-like evolution equations by some additional quantum noise terms representing the interaction with some environment.

But beforehand, we show why our framework is a very general one modeling all kinds of physical situations.

II.3 Unitary dilations of completely positive semigroups

In this section, we will show that equations such as (3) appear naturally in a general setup and allow one to obtain unitary dilations of completely positive semigroups in discrete time.

Consider a discrete semigroup $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of completely positive maps on $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, that is,

$$P_n(X) = \ell^n(X)$$

where ℓ is a completely positive, weakly continuous map on $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. In the sequel we always assume that $\ell(I) = I$. By Kraus' theorem (see [Par], Proposition 29.8) this means that ℓ is of the form

$$\ell(X) = \sum_{i=0}^N V_i^* X V_i$$

for some N and some family (V_i) of bounded operators on \mathcal{H}_0 such that $\sum_i V_i^* V_i = I$. Of course the indexation is *a priori* indifferent to the specificity of the value $i = 0$. The special role played by one of the values will appear later on.

Let \mathbb{E}_0 be the partial trace on \mathcal{H}_0 defined by

$$\langle \phi, \mathbb{E}_0(H)\psi \rangle = \langle \phi \otimes \Omega, H\psi \otimes \Omega \rangle$$

for all $\phi, \psi \in \mathcal{H}_0$ and every operator H on $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi$.

Theorem 2 – *For any completely positive map*

$$\ell(X) = \sum_{i=0}^N V_i^* X V_i$$

on $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ there exists a unitary operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ such that the associated unitary family of automorphisms on $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi)$

$$j_n(H) = u_n^* H u_n$$

(where u_n is associated to \mathbb{L} by (3)) satisfies

$$\mathbb{E}_0(j_n(X \otimes I)) = P_n(X),$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

Proof

Consider a decomposition of \mathcal{L} of the form

$$\ell(X) = \sum_{i=0}^N V_i^* X V_i$$

for a family (V_i) of bounded operators on \mathcal{H}_0 such that $\sum_{i=0}^N V_i^* V_i = I$.

We claim that there exists a unitary operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ of the form

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & \cdots \\ V_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_N & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Indeed, the condition $\sum_{i=0}^N V_i^* V_i = I$ guarantees that the m first columns of \mathbb{L} (where $m = \dim \mathcal{H}_0$) constitute an orthonormal family of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$. We can thus fill the matrix by completing it into an orthonormal basis of $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$; this makes out a unitary, $(N+1) \times (N+1)$ matrix \mathbb{L} on \mathcal{H}_0 , of which we denote the

coefficients by $(A_j^i)_{i,j=0,\dots,N}$; with this notation we have for all i , $A_0^i = V_{i+1}$. To this matrix \mathbb{L} we associate a family $(\mathbb{L}_i)_{i \geq 0}$ of ampliations as explained in section II.2.

Now, for every operator H on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$, put

$$j_n(H) = u_n^* H u_n.$$

It satisfies

$$j_{n+1}(H) = u_n^* \mathbb{L}_{n+1}^* H \mathbb{L}_{n+1} u_n.$$

We consider this relation for an operator H of the form $H = X \otimes I$, where X is an operator on \mathcal{H}_0 . Write $\mathbb{L}_{n+1}^*(X \otimes I) \mathbb{L}_{n+1}$ in $(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_n) \otimes \mathbb{C}^{N+1}$; it is simply

$$\begin{aligned} & \mathbb{L}_{n+1}^*(X \otimes I) \mathbb{L}_{n+1} = \\ & = \begin{pmatrix} (A_0^0)^* & (A_0^1)^* & \cdots \\ (A_1^0)^* & (A_1^1)^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_N^0)^* & (A_N^1)^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^0 & A_1^0 & \cdots \\ A_0^1 & A_1^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0^N & A_1^N & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

which is easily seen to be the matrix $(B_j^i(X))_{i,j=0,\dots,N}$ with

$$B_j^i(X) = \sum_{k=0}^N (A_j^k)^* X A_i^k.$$

Note that, more precisely, the operator $\mathbb{L}_{n+1}^*(X \otimes I) \mathbb{L}_{n+1}$ is written in $(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_n) \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ as the matrix $(B_j^i(X) \otimes I)_{i,j=0,\dots,N}$. The operator u_n , in turn, acts only on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$, so that $u_n^* \mathbb{L}_{n+1}^*(X \otimes I) \mathbb{L}_{n+1} u_n$ can be written in $(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_n) \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ as $(u_n^* (B_j^i(X) \otimes I) u_n)_{i,j=0,\dots,N}$; simply put, we have proved that

$$(j_{n+1}(X \otimes I))_j^i = j_n(B_j^i(X) \otimes I)$$

because both terms act as the identity beyond $(\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi_n) \otimes \mathbb{C}^{N+1}$.

Consider now $T_n(X) = \mathbb{E}_0(j_n(X \otimes I))$. We have

$$\begin{aligned} \langle \phi, T_{n+1}(X) \psi \rangle &= \langle \phi \otimes \Omega, j_{n+1}(X \otimes I) \psi \otimes \Omega \rangle \\ &= \langle \phi, (j_{n+1}(X \otimes I))_0^0 \psi \rangle \\ &= \langle \phi, j_n(B_0^0(X) \otimes I) \psi \rangle \\ &= \langle \phi, T_n(B_0^0(X)) \psi \rangle; \end{aligned}$$

now remember that for all i , $A_0^i = V_{i+1}$. This implies that $B_0^0(X) = \ell(X)$. The above proves that $T_{n+1}(X) = T_n(\ell(X))$ for any n and the theorem follows. ■

III Convergence to Quantum Stochastic Differential Equations

We now describe the convergence of these discrete time evolutions to continuous time ones, in which we will see quantum noises and quantum stochastic differential equations appear spontaneously. This is performed in three steps:

– we first embed the chain $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1}$ into the bosonic Fock space $\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+))$ as a natural subspace associated to some partition \mathcal{S} of \mathbb{R}^+ , in such a way that these subspaces constitute an approximation of the Fock space Φ when the diameter $\delta(\mathcal{S})$ of the partition goes to 0.

– we introduce the mathematical tools of quantum noises, quantum stochastic integrals and quantum stochastic differential equations, together with their projections of the subspace $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{N+1}$.

– we finally show that the evolution equation (3) weakly converges in Φ to a quantum stochastic differential equation.

III.1 Approximation of the Fock space by spin chains

We recall the structure of the bosonic Fock space Φ and its basic structure (cf [Att] for details).

Let $\Phi = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^{N+1}))$ be the symmetric (bosonic) Fock space over the space $L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^{N+1})$. We shall here give a very efficient presentation of that space, the so-called *Guichardet interpretation* of the Fock space.

Let $I = \{1, \dots, N\}$ and let \mathcal{P} be the set of finite subsets $\{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}$ of $\mathbb{R}^+ \times I$ such that the s_i 's are mutually distinct; then

$\mathcal{P} = \cup_n \mathcal{P}_n$ where \mathcal{P}_n is the set of n -elements subsets of $\mathbb{R}^+ \times I$. By ordering the \mathbb{R}^+ -part of the elements of $\sigma \in \mathcal{P}_n$, the set \mathcal{P}_n can be identified with the increasing simplex $\Sigma_n = \{0 < t_1 < \dots < t_n\} \times I$ of $\mathbb{R}^n \times I$, so that \mathcal{P}_n inherits a measured space structure from the Lebesgue measure on \mathbb{R}^n times the counting measure on I . This also gives a measure structure on \mathcal{P} if we specify that on $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$ we put the measure δ_\emptyset . Elements of \mathcal{P} are often denoted σ , the measure on \mathcal{P} is denoted $d\sigma$. The σ -field obtained this way on \mathcal{P} is denoted \mathcal{F} .

We identify any element $\sigma \in \mathcal{P}$ with a family $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ of (two by two disjoint) subsets of \mathbb{R}^+ where

$$\sigma_i = \{s \in \mathbb{R}^+; (s, i) \in \sigma\}.$$

For a $s \in \mathbb{R}^+$ we denote by $\{s\}_i$ the element $\sigma = \{\emptyset, \dots, \emptyset, \{s\}, \emptyset, \dots, \emptyset\}$ of \mathcal{P} (where $\{s\}$ is at the i -th position).

The *Fock space* Φ is the space $L^2(\mathcal{P}, \mathcal{F}, d\sigma)$. An element f of Φ is thus a measurable function $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty.$$

One can define, in the same way, $\mathcal{P}_{[a,b]}$ and $\Phi_{[a,b]}$ by replacing \mathbb{R}^+ with $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$. There is a natural isomorphism between $\Phi_{[0,t]} \otimes \Phi_{[t,+\infty[}$ given by $h \otimes g \mapsto f$ where $f(\sigma) = h(\sigma \cap [0, t])g(\sigma \cap (t, +\infty[)$.

Define $\mathbb{1}$ to be the *vacuum vector*, that is, $\mathbb{1}(\sigma) = \delta_\emptyset(\sigma)$.

Define $\chi_t^i \in \Phi$ by

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) & \text{if } \sigma = \{s\}_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then χ_t belongs to $\Phi_{[0,t]}$; we even have the stronger property that $\chi_t^i - \chi_s^i \in \Phi_{[s,t]}$ for all $s \leq t$. This last property allows to define a so-called *Ito integral* on Φ . Indeed, let $(g_t^i)_{t \geq 0}$ be families in Φ , for $i = 1, \dots, N$, such that for all i in $0, \dots, N$,

- i) $t \mapsto \|g_t^i\|$ is measurable,
- ii) g_t^i belongs to $\Phi_{[0,t]}$ for all t ,
- iii) $\int_0^\infty \|g_t^i\|^2 dt < \infty$,

then one defines $\sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$ to be the limit in Φ of

$$\sum_{i=0,\dots,N} \sum_j \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{t_j} g_s^i ds \otimes (\chi_{t_{j+1}}^i - \chi_{t_j}^i)$$

where P_t is the orthogonal projection onto $\Phi_{[0,t]}$ and $\{t_j, j \in \mathbb{N}\}$ is a partition of \mathbb{R}^+ which is understood to be refining and to have its diameter tending to 0. Note that $\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{t_j} g_s ds$ belongs to $\Phi_{[0,t_j]}$, which explains the tensor product symbol in (3).

We get that $\sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$ is an element of Φ with

$$\left\| \sum_i \int_0^\infty g_t d\chi_t \right\|^2 = \sum_i \int_0^\infty |g_t^i|^2 dt. \quad (4)$$

Let $f \in L^2(\mathcal{P}_n)$, one can easily define the *iterated Ito integral* on Φ .

$$I_n(f) = \int_{\mathcal{P}_n} f(\sigma) d\chi_{t_1}^{i_1} \dots d\chi_{t_n}^{i_n}$$

by iterating the definition of the Ito integral. We use the following notation:

$$I_n(f) = \int_{\mathcal{P}_n} f(\sigma) d\chi_\sigma$$

which we extend, in an obvious way, to any $f \in \Phi$.

We then have the following important representation.

Theorem 3 ([Att]) – *Any element f of Φ admits an abstract chaotic representation*

$$f = \int_{\mathcal{P}} f(\sigma) d\chi_\sigma$$

with

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma$$

and an abstract predictable representation

$$f = f(\emptyset)\mathbb{1} + \sum_i \int_0^\infty D_t^i f d\chi_t^i$$

with

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_i \int_0^\infty \|D_s^i f\|^2 ds$$

where $[D_s^i f](\sigma) = f(\sigma \cup \{s\}_i)\mathbb{1}_{\sigma \subset [0,s[}$.

Let us now recall the definitions of the basic noise operators $a_j^i(t)$, $i, j = 0, \dots, N$, on Φ . They are respectively defined by

$$[a_i^0(t)f](\sigma) = \sum_{\substack{s \in \sigma_i \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_i),$$

$$[a_0^i f](\sigma) = \int_0^t f(\sigma \cup \{s\}_i) ds,$$

$$[a_j^i f](\sigma) = \sum_{\substack{s \in \sigma_i \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_i \cup \{s\}_j)$$

for $i, j \neq 0$ and $a_0^0(t) = tI$.

There is a good common domain to all these operators, namely

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \Phi ; \int_{\mathcal{P}} |\sigma| |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty \right\}.$$

Let $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ be a partition of \mathbb{R}^+ and $\delta(\mathcal{S}) = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ be the diameter of \mathcal{S} . For fixed \mathcal{S} , define $\Phi_n = \Phi_{[t_n, t_{n+1}]}$, $i \in \mathbb{N}$. We then have $\Phi \simeq \otimes_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ (with respect to the stabilizing sequence $(\mathbb{1})_{n \in \mathbb{N}}$).

For all $n \in \mathbb{N}^*$, define for $i, j \neq 0$

$$X^i(n) = \frac{\chi_{t_n}^i - \chi_{t_{n-1}}^i}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \in \Phi_n,$$

$$a_0^i(n) = \frac{a_0^i(t_n) - a_0^i(t_{n-1})}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} P_{1\uparrow},$$

$$a_j^i(n) = P_{1\uparrow} (a_j^i(t_n) - a_j^i(t_{n-1})) P_{1\uparrow},$$

$$a_i^0(n) = P_{1\uparrow} \frac{a_i^0(t_n) - a_i^0(t_{n-1})}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}},$$

where $P_{1\uparrow}$ is the orthogonal projection onto $L^2(\mathcal{P}_1)$ and where the above definitions are understood to be valid on Φ_n only, with $a_i^0(n), a_0^i(n), a_j^i(n)$ being the identity operator I on the others Φ_m 's. We put $a_0^0(n) = I$ for all n .

Proposition 4– *We have*

$$\begin{cases} a_0^i(n) X^j(n) = \delta_{ij} \mathbb{1} \\ a_0^i \mathbb{1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_j^i(n) X^k(n) = \delta_{ik} X^j(n) \\ a_j^i \mathbb{1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i^0(n) X^j(n) = 0 \\ a_i^0(n) \mathbb{1} = X^i(n) \end{cases}.$$

Thus the action of the operators a_j^i on the $X^i(n)$ is similar to the action of the corresponding operators on the spin chain of section II. We are now going to construct the spin chain $T\Phi$ inside Φ .

We are still given a fixed partition \mathcal{S} ; define $T\Phi(\mathcal{S})$ to be the space of vectors f of Φ which are of the form

$$f = \sum_{A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}} f(A) X_A$$

(with $\|f\|^2 = \sum_{A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}} |f(A)|^2 < \infty$).

The space $T\Phi(\mathcal{S})$ can therefore be identified to the spin chain $T\Phi$; the operators $a_j^i(n)$ act on $T\Phi(\mathcal{S})$ exactly in the same way as the corresponding operators on $T\Phi$. We have completely embedded the toy Fock space into the Fock space. Let $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ be a fixed partition of \mathbb{R}^+ . The space $T\Phi(\mathcal{S})$ is a closed subspace of Φ . We denote by $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ the operator of orthogonal projection from Φ onto $T\Phi(\mathcal{S})$.

Lemma 5 – ([Pa1]) *The projection of an exponential vector $\varepsilon(\phi)$ is the vector $e(\tilde{\phi})$ which satisfies for all A in $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}$*

$$e(\tilde{\phi})(A) = \prod_i \prod_{k \in A_i} \tilde{\phi}_i(k),$$

where $A_i = \{k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (k, i) \in A\}$ and $\tilde{\phi}$ is the function $\mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{C}^{N+1}$ defined by

$$\tilde{\phi}_i(k) = \frac{1}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i(t) dt.$$

We need a few more notations: first, for any k in \mathbb{N} we will denote by $T\Phi_k$ the subspace of $T\Phi$ generated by all X_A , $A \subset \{1, \dots, k\} \times \{0, \dots, N\}$. Then if, for $\tilde{\phi}$ in $l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}^{N+1})$, we denote by $\tilde{\phi}_k$ the restriction of $\tilde{\phi}$ to $\{1, \dots, k\}$, then $e(\tilde{\phi}_k)$ is the orthogonal projection of $e(\tilde{\phi})$ onto $T\Phi_k$.

Remark:

Our definitions of the vectors and operators of $T\Phi(\mathcal{S})$ are slightly different from the ones in the original article [Att]; in particular the indexations have been changed by one step.

III.2 Quantum stochastic integrals and their projections

We shall here recall the definitions of the quantum stochastic integrals

$$\int_0^\infty H_s da_j^i(s)$$

with respect to the three quantum noises $da_j^i(s)$ and to time, which corresponds to the noise $da_0^0(s)$.

The heuristics of the quantum stochastic calculus developed in [A-M], which we present in a simplified way, derives from the fact that the noises, which will turn out to be differentials of continuous-time fundamental operators, should act just like the fundamental operators of the spin chain, that is:

- any $da_j^i(t)$ acts only on $\Phi_{[t, t+dt]}$, which from Theorem 3 can be seen as “generated” by $\mathbb{1}$ and the $d\chi_t^i$ and

– the $da_j^i t$ are given by the following table:

$$\begin{cases} da_0^i(t) dj_t = \delta_{ij} \mathbb{1} \\ da_0^i(t) \mathbb{1} = 0 \\ da_j^i(t) dX_t^k = \delta_{ik} dX_t^j \\ da_j^i(t) \mathbb{1} = 0 \\ da_i^0(t) dX_t^j = 0 \\ da_i^0(t) \mathbb{1} = dX_t^i \end{cases} .$$

These heuristics allow us to define integrals $\int H_s da_j^i(s)$ for *adapted processes* $(H_s)_{s \geq 0}$, that is, processes of operators such that for almost all s , all $f \in \text{Dom } H_s$,

$$P_s f \in \text{Dom } H_s, D_u^i f \in \text{Dom } H_s \text{ for a.a. } u \geq s, \text{ all } i = 1, \dots, N \text{ and} \\ H_s P_s f = P_s H_s f \text{ and } H_s D_u^i f = D_u^i H_s f \text{ for a.a. } u \geq s, \text{ all } i = 1, \dots, N.$$

In that case, a formal computation leads us to give the following definition: an adapted operator process $(T_t)_{t \geq 0}$ is said to be the integral process $(\int_0^t H_s da_j^i(s))_{t \geq 0}$ if the following equality holds for almost all $t \geq 0$:

$$T_t f = \sum_k \int_0^\infty T_{t \wedge s} D_s^k f d\chi_s^k + \int_0^t H_s D_s^i f d\chi_s^j$$

with the notations: $D_s^0 = P_s$ and $d\chi_s^0 = ds$

That is, f is in the common domain of the integrals if and only if the right hand side is well defined and equality holds, an integral $\int_a^b H_s da_j^i(s)$ is then simply an integral of the process equal to H_s for $s \in [a, b]$ and zero otherwise. An integral $\int_0^\infty H_s da_j^i(s)$ is then well defined if all integrals are well-defined when one substitutes t with ∞ in the above formulas.

The fundamental operators $a_j^i(t)$ are recovered as the integrals $\int_0^t da_j^i(t)$ in the above sense.

In particular, if $\phi \in L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^{N+1})$, consider the associated coherent vector $\varepsilon(\phi)$ in Φ . That is,

$$[\varepsilon(\phi)](\sigma) = \prod_i \prod_{s \in \sigma_i} \phi_i(s).$$

Put $\phi_i(s)$ to be the coordinates of $\phi(s)$, with the convention $\phi_0(s) = 1$ for all s .

If ϕ is such that

$$\int_0^t |\phi_i(s)|^{1-\delta_{0,i}} \|H_s \varepsilon(f)\|^{1-\delta_{0,j}} ds < \infty$$

then $\int_0^t H_s da_j^i(s)$ is well-defined on $\varepsilon(f)$ with

$$\langle \varepsilon(\psi), \int_0^t H_s da_j^i(s) \varepsilon(f) \rangle = \int_0^t \psi_i(s) \phi_j(s) \langle \varepsilon(\psi), H_s \varepsilon(f) \rangle ds.$$

for all $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^{N+1})$.

We now use the embedding of the spin chain in Φ as defined previously. We wish to compute the corresponding projections of the quantum stochastic integral

operators, and represent them as discrete-time quantum stochastic integrals. For all details on those integrals we refer the reader to [Pa1]; here the integrals we are going to consider are *restricted* ones and the definition is simple:

Definition 6 – Let i, j in $\{0, \dots, N\}$ and let $(h_j^i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of bounded operators on $T\Phi$ such that for all k in \mathbb{N} , the operator h_k is of the form $h_k \otimes I$ in $T\Phi_k] \otimes \bigotimes_{l>i} \mathbb{C}^{N+1}$.

Then the integral $\sum_{i,j=0,\dots,N} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_j^i(k) a_j^i(k+1)$ is defined by

$$\left(\sum_{i,j \in \{0,\dots,N\}} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_j^i(k) a_j^i(k+1) \right) f(A) = \sum_{i,j \in \{0,\dots,N\}} \sum_{k \in \mathbb{N}} (h_j^i(k) a_j^i(k+1) f(A))$$

on the domain

$$\{f \in T\Phi \text{ s.t. } \sum_{i,j \in \{0,\dots,N\}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{A \in \mathcal{P}_N} |h_j^i(k) a_j^i(k+1) f(A)|^2 < +\infty\}.$$

We will describe the discrete-time integral representations of quantum stochastic integrals. We restrict our statement to the case where integrals are of the type $H = \int_0^\infty H_t^{i,j} da_j^i(s)$, with $(i, j) \neq (0, 0)$, and satisfy the following conditions **(HS)**:

- the operator H is bounded and
- the integrands $H_t^{i,j}$ are bounded for all t and $t \mapsto \|H_t\|$ is square-integrable if one of i or j is zero, integrable if both i and j are zero and essentially bounded otherwise.

Even though they are rather restrictive, these hypotheses will suffice for our needs.

The following result is a combination (adapted to the case of higher multiplicity) of Propositions 2.2 and Lemma 3.1 of [Pa1]. Remark that here again the indexation differs from the quoted results in that paper, which followed the conventions of [Att].

Theorem 7 – Let $H = \int H_t^{i,j} da_j^i(t)$ be a quantum stochastic integral on Φ that satisfies the assumptions **(HS)**, with $(i, j) \neq (0, 0)$. Then $\mathbb{E}_S H \mathbb{E}_S$ is equal to a discrete quantum stochastic integral in the restricted sense on the exponential domain of $T\Phi$ and the integrands $h_j^i(k)$ are given for all k in \mathbb{N} by:

- if both i and j are nonzero,

$$h_j^i(k) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} H_j^i(t) dt$$

- if $i = 0$,

$$h_j^0(k) = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} H_j^0(t) dt$$

and for all $l \neq 0$,

$$h_j^l(k) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} H_j^0(t) (a_l^0(t) - a_l^0(t_k)) dt$$

– if $j = 0$,

$$h_0^i(k) = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} H_0^i(t) dt$$

and for all $l \neq 0$,

$$h_l^i(k) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} (a_0^l(t) - a_0^l(t_k)) H_0^i(t) dt$$

and all the unmentioned integrands are null. All equalities are over $T\Phi_{ij}$ and all operator integrals are in the strong sense.

We have not mentioned the case of integrals with respect to $(i, j) = (0, 0)$; for these we do not use the (unique) representation in the form of integrals $\sum_{(i,j) \neq (0,0)} \sum_k h_j^i(k) a_j^i(k+1)$, but rather use a bolder method of approximation and write simply

$$\mathbb{E}_S \int_0^\infty H_0^0(t) dt \mathbb{E}_S = \sum_k (\mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_0^0(t) dt \mathbb{E}_S).$$

III.3 Quantum stochastic differential equations

The aim of quantum stochastic differential equations is to study equations of the form

$$dU_t = \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t), \tag{5}$$

with initial condition $U_0 = I$. The above equation has to be understood as an integral equation

$$U_t = I + \int_0^t \sum_{i,j} L_j^i U_s da_j^i(s),$$

for operators on $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$, the operators L_j^i being bounded operators on \mathcal{H}_0 alone which are amplified to $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$.

The main motivation and application of that kind of equation is that it gives an account of the interaction of the small system \mathcal{H}_0 with the bath Φ in terms of quantum noise perturbation of a Schrödinger-like equation. Indeed, the first term of the equation

$$dU_t = L_0^0 U_t dt + \dots$$

describes the induced dynamics on the small system, all the other terms are quantum noises terms.

One of the main application of equations such as (5) is that they give explicit constructions of unitary dilations of semigroups of completely positive maps of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ (see [H-P]). Let us only recall one of the main existence, uniqueness and boundedness theorems connected to equations of the form (5). The literature is huge about those equations; we refer to [Par] for the result we mention here.

Theorem 8 – *If \mathcal{H}_0 is finite dimensional then the quantum stochastic differential equation*

$$dU_t = \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t),$$

with $U_0 = I$, admits a unique solution defined on the space of coherent vectors.

The solution $(U_t)_{t \geq 0}$ is made of unitary operators if and only if there exist, on \mathcal{H}_0 , a bounded self-adjoint H , bounded operators S_j^i , $i, j = 1, \dots, N$, such that the matrix $(S_j^i)_{i,j}$ is unitary, and bounded operators L_i , $i = 1, \dots, N$ such that, for all $i, j = 1, \dots, N$

$$L_0^0 = -(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k)$$

$$L_i^0 = L_i$$

$$L_0^i = - \sum_k L_k^* S_j^k$$

$$L_j^i = S_j^i - \delta_{ij} I.$$

If the operators L_j^i are of this form then the unitary solution $(U_t)_{t \geq 0}$ of the above equation exists even if \mathcal{H}_0 is only assumed to be separable.

III.4 Convergence theorems

In this section we study the asymptotic behaviour of the solutions of an equation

$$u_{n+1} = \mathbb{I}_{n+1} u_n;$$

if the matrix $\mathbb{I}(h)$ converges (with a particular normalization) as h tends to zero and prove that, in the limit, the solutions of such equations converge to solutions of quantum stochastic differential equations of the form (3). Notice that we no longer assume that $\mathbb{I}(h)$ has been conveniently constructed for our needs; in particular \mathbb{I} is not assumed to be unitary.

Let h be a parameter in \mathbb{R}^+ , which is thought of as representing a small time interval. Let $\mathbb{I}(h)$ be an operator on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$, with coefficients $\mathbb{I}_j^i(h)$ as a $(N+1) \times (N+1)$ matrix of operators on \mathcal{H}_0 . Let $u_n(h)$ be the associated solution of

$$u_{n+1}(h) = \mathbb{I}_{n+1}(h) u_n(h).$$

In the following we will drop dependency in h and write simply \mathbb{I} or u_n . Besides, we denote

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j})$$

for all $i, j = 0, \dots, N$.

Theorem 9 – Assume that there exist operators L_j^i on \mathcal{H}_0 such that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{I}_j^i(h) - \delta_{ij} I}{h^{\varepsilon_{ij}}} = L_j^i$$

for all $i, j = 0, \dots, N$, where convergence is in operator norm. Assume that the quantum stochastic differential equation

$$dU_t = \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t)$$

with initial condition $U_0 = I$ has a solution $(U_t)_{t \geq 0}$ which is a process of bounded operators with a locally uniform norm bound.

Then, for almost all t , for every ϕ, ψ in $L^\infty([0, t])$, the quantity

$$\langle a \otimes \varepsilon(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{[t/h]} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle$$

converges to

$$\langle a \otimes \varepsilon(\phi), U_t b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle$$

when h goes to 0.

Moreover, the convergence is uniform for a, b in any bounded ball of \mathcal{K} , uniform for t in a bounded interval of \mathbb{R}_+ .

Remarks

– This is where we particularize the index zero : the above hypotheses of convergence simply mean that, among the coefficients of \mathbb{L} ,

$$(\mathbb{L}_0^0(h) - I)/h \text{ converges,}$$

$$\mathbb{L}_j^i(h)/\sqrt{h} \text{ converges if either } i \text{ or } j \text{ is zero,}$$

$$\mathbb{L}_j^i(h) - \delta_{i,j} \text{ converges if neither } i \text{ nor } j \text{ is zero}$$

and we recover the fact that the 0 index must relate to the small system, on which the considered time scale is different from the time scale of the reservoir. We will discuss these conditions in section IV.1.

– The assumption that \mathcal{H}_0 is finite dimensional is only needed in order to ensure that the quantum stochastic differential equation has a solution; if for example the L_j^i 's are of the form described in Theorem 8 then the separability of \mathcal{H}_0 is enough.

Consider the quantum stochastic differential equation on $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$:

$$dU_t = \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t)$$

where the L_j^i are the bounded operators on the initial space \mathcal{H}_0 given by our assumptions.

We consider that h is fixed and the associated partition $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 = h < \dots < t_k = kh < \dots\}$ is also fixed (note that we have chosen such regular partitions only for simplicity and that all our result hold with general partitions when the mesh size tends to zero). We also fix some bounded interval $[0, T]$ of \mathbb{R}_+ .

We will proceed by successive simplifications. Consider the operator on the spin chain defined by $w_k = \mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$. The following estimate will be used over and again:

Lemma 10 – For any $r < s$, any vectors $a \otimes \varepsilon(\phi), b \otimes \varepsilon(\psi)$ with ϕ, ψ in $L^2 \cap L^\infty$, one has

$$|\langle a \otimes \varepsilon(\phi), (U_s - U_r) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle| \leq C \|a\| \|b\| (s - r)$$

where C depends only on the norms of the operators L_j^i and on the L^2 and L^∞ norms of ϕ and ψ .

Proof

$$\begin{aligned}
 & | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (U_s - U_r) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \leq \sum_{i,j} \int_r^s |\bar{\phi}_i(u)| |\psi_j(u)| | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), L_j^i U_u b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle du |
 \end{aligned}$$

from which the estimate follows, using the fact that that $|\phi(u)| \leq \|\phi\|_\infty$ and $|\psi(u)| \leq \|\psi\|_\infty$, the L_j^i are bounded and U is locally uniformly bounded. ■

The following lemma shows that $(w_k)_{k \geq 0}$ converges to $(U_t)_{t \geq 0}$, in the same weak sense as in the theorem, as h goes to zero.

Lemma 11 – For any $t_k < s$, any vectors $a \otimes \varepsilon(\phi)$, $b \otimes \varepsilon(\psi)$ with ϕ, ψ in $L^2(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, we have

$$\begin{aligned}
 & | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (u_k - U_s) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \leq C \|a\| \|b\| ((t_k - s) + \|(I - \mathbb{E}_{\mathcal{S}})\varepsilon(\phi)\| + \|(I - \mathbb{E}_{\mathcal{S}})\varepsilon(\psi)\|).
 \end{aligned}$$

where C depends only on the norms L_j^i and on the L^2 and L^∞ norms of ϕ, ψ .

Proof

We have

$$\begin{aligned}
 & | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (w_k - U_s) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \leq | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (U_{t_k} - U_s) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \quad + | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (\mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} - U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \quad + | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} - U_{t_k}) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \leq | \langle a \otimes \varepsilon(\phi), (U_{t_k} - U_s) b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle | \\
 & \quad + \|(I - \mathbb{E}_{\mathcal{S}})a \otimes \varepsilon(\phi)\| \|U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \varepsilon(\psi)\| \\
 & \quad + \|U_{t_k}^* a \otimes \varepsilon(\phi)\| \|(I - \mathbb{E}_{\mathcal{S}}) b \otimes \varepsilon(\psi)\|
 \end{aligned}$$

and we conclude as in the previous proof. ■

Let $\omega_j^i(h)$ be such that

$$\mathbb{L}_j^i(h) - \delta_{ij} I = h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i + \widehat{\delta}_{ij} h L_0^0 + h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(h),$$

so that for any i, j , $\omega_j^i(h)$ tends to zero in operator norm. Recall that $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is the solution of

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n$$

with the notations of section II.2, and consider the solution $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of the equation

$$v_{n+1} - v_n = [(h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i + \widehat{\delta}_{ij} h L_0^0)_{i,j}]_n v_n.$$

where

$$\widehat{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \text{ and } (i, j) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{if } i \neq j \text{ or } (i, j) = (0, 0). \end{cases}$$

It will be simpler to compare u and v if we consider the above equations in terms of the basis $a_j^i(n)$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i,j} (h^{\varepsilon_{ij}} (L_j^i + \widehat{\delta}_{ij} hL_0^0 + \omega_j^i(h))) u_n a_j^i(n+1).$$

and

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{i,j} (h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i + \widehat{\delta}_{ij} hL_0^0) v_n a_j^i(n+1).$$

From the above lemma it is enough to prove the convergence to zero of $w_n - u_n$; first we prove the convergence of $w_n - v_n$.

From the fact that

$$U_{t_{k+1}} - U_{t_k} = \sum_{i,j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_j^i U_s da_j^i(s)$$

and thanks to the formulas for projections of Fock space integrals onto the toy Fock space recalled in Theorem 7, one obtains the following expression for $w_{k+1} - w_k$:

$$\begin{aligned} w_{k+1} - w_k &= \mathbb{E}_S \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t dt \left(\sum_{(i,j) \neq (0,0)} (h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i a_j^i(k+1)) \right) \mathbb{E}_S \\ &+ \mathbb{E}_S \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_t dt hL_0^0 \sum_i a_i^i(k+1) \mathbb{E}_S \\ &+ \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} \mathbb{E}_S \left(\frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} \left(L_0^i (a_0^j(t) - a_0^j(t_k)) \right) U_t dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t \left(L_j^0 (a_i^0(t) - a_i^0(t_k)) \right) dt \right) a_j^i(k+1) \mathbb{E}_S; \end{aligned}$$

remember that $I = \sum_i a_i^i(k+1)$ for all k . As a consequence

$$\begin{aligned} w_n - v_n &= \sum_{k < n} \left(\mathbb{E}_S \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t dt \mathbb{E}_S - v_k \right) \left(\sum_{(i,j) \neq (0,0)} h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i a_j^i(k) \right) \\ &+ \sum_{k < n} \left(\mathbb{E}_S \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_t dt \mathbb{E}_S - v_k \right) hL_0^0 \sum_i a_i^i(k+1) \mathbb{E}_S \\ &+ \sum_{k < n} \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} \mathbb{E}_S \left(\frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} \left(L_0^i (a_0^j(t) - a_0^j(t_k)) \right) U_t dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t \left(L_j^0 (a_i^0(t) - a_i^0(t_k)) \right) dt \right) \mathbb{E}_S a_j^i(k+1). \quad (6) \end{aligned}$$

We first wish to replace $\frac{1}{h} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t dt$ or $\frac{1}{h} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_t dt$ in the first two terms by $w_k = \mathbb{E}_S U_{t_k} \mathbb{E}_S$. Lemma 10 allows us to estimate the error terms. Consider two essentially bounded functions ϕ, ψ in $L^2(\mathbb{R}_+)$ and two vectors a, b in the unit ball \mathcal{K}_1 of \mathcal{K} ; we expand the first term in (6):

$$\left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}), \sum_{k < n} \left(\frac{1}{h} \mathbb{E}_S \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} U_t dt - w_k \right) \sum_{(i,j) \neq (0,0)} h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i a_j^i(k) b \otimes e(\tilde{\psi}) \rangle \right|$$

$$\leq \sum_{k < n} \sum_{(i,j) \neq (0,0)} \left| \tilde{\phi}_i(k) \right| \left| \tilde{\psi}_j(k) \right| \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (U_s - U_{t_k}) ds L_j^i b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right|,$$

where we have omitted a uniformly bounded factor

$$\langle a \otimes e(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_k), b \otimes e(\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_k) \rangle.$$

From the fact that $|\tilde{\phi}(k)| \leq \sqrt{h} \|\phi\|_{\infty}$, $|\tilde{\psi}(k)| \leq \sqrt{h} \|\psi\|_{\infty}$ and using Lemma 10 we obtain an estimation of the error term of the form

$$C \|a\| \|b\| \sqrt{h}$$

for some constant C which depends only on T , on the norms of L_j^i and on the L^2 and L^{∞} norms of ϕ and ψ . On the other hand, the error term associated to the second sum in (6) is clearly dominated by $C h$ in norm.

We now seek to evaluate the third sum in (6); for that consider again two functions ϕ, ψ in $L^{\infty}([0, t])$ and two vectors a, b in the unit ball \mathcal{K}_1 of \mathcal{K} ; we have, up to an uniformly bounded factor,

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \varepsilon(\phi), L_0^i \frac{1}{h} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} (a_0^j(s) - a_0^j(t_k)) U_s ds \right) a_j^i(k+1) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle \right| \\ &= \left| \tilde{\phi}_j(k) \tilde{\psi}_i(k) \right| \left| \langle a \otimes \varepsilon(\phi_k), \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_0^i (a_0^j(s) - a_0^j(t_k)) U_s \psi \otimes \varepsilon(\psi_k) ds \rangle \right| \\ &\leq h^{3/2} \|L_0^i\| \|\phi\|_{\infty} \|\psi\|_{\infty}, \end{aligned}$$

for $|\tilde{\phi}(k)| \leq \sqrt{h} \|\phi\|_{\infty}$, $|\tilde{\psi}(k)| \leq \sqrt{h} \|\psi\|_{\infty}$ and $a_0^j(s) - a_0^j(t_k)$ is bounded on Φ_{t_k} , with norm $\sqrt{s - t_k}$. One obtains similarly

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \varepsilon(\phi), L_j^0 \frac{1}{h} \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{t_k} (a_i^0(s) - a_i^0(t_k)) U_s ds a_j^i(k) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle \right| \\ &\leq h^{3/2} \|L_j^0\| \|\phi\|_{\infty} \|\psi\|_{\infty}, \end{aligned}$$

so that the second sum in (6) is bounded by $C \sqrt{h} 2t \|\phi\|_{\infty} \|\psi\|_{\infty}$.

We have shown that, putting $F_k = \sum_{i,j} (h^{\varepsilon_{ij}} L_j^i + \hat{\delta}_{ij} h L_0^0) a_j^i(k)$,

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \varepsilon(\phi), \mathbb{E}_{\mathcal{S}} (w_n - v_n) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} b \otimes \varepsilon(\psi) \rangle \right| \\ &= \sum_{k < n} \left| \langle a \otimes \varepsilon(\tilde{\phi}), F_k (w_k - v_k) b \otimes \varepsilon(\tilde{\psi}) \rangle \right| + o(1) \end{aligned} \quad (7)$$

where $o(1)$ is a term which converges to zero as h goes to zero *uniformly for a, b in \mathcal{K}_1 and for t in a bounded interval*. That uniform convergence property will be most important in the sequel.

Expanding F_k in the equation (7) gives

$$\begin{aligned} & \left| \langle a \otimes \varepsilon(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n) \mathbb{E}_{\mathcal{S}} \varepsilon(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i,j} \sum_{k < n} h^{\varepsilon_{ij}} \left| \tilde{\phi}_i(k) \right| \left| \tilde{\psi}_j(k) \right| \left| \langle (L_j^i)^* a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (w_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i \neq 0} \sum_{k < n} h \left| \tilde{\phi}_i(k) \right| \left| \tilde{\psi}_i(k) \right| \left| \langle (L_0^0)^* a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (w_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| + o(1),$$

where in each term we have omitted an uniformly bounded factor and the notation $o(1)$ indicates a function of h which converges to zero as h goes to zero.

Since ϕ and ψ are essentially bounded, the quantities $h^{\varepsilon_{ij}} |\tilde{\phi}_i(k)| |\tilde{\psi}_j(k)|$ are again of order h . Besides, remark that normalizing all operators would only imply an additional constant factor, so that we can assume all operators L_j^i to be contractions. In that case the above estimate implies that, for all n ,

$$\sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \leq hC \sum_{k < n} \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (w_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| + o(1)$$

for some constant C . Notice that we have used our earlier remark that all convergences are uniform in $a, b \in \mathcal{K}_1$. This implies that

$$\sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \leq (1 + Ch)^n \times o(1)$$

and since nh converges to t , the quantity $(1 + Ch)^n$ is bounded so that

$$\sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (w_n - v_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right|$$

converges to zero as h goes to zero.

We have proved the desired convergence property for the process $(v_k)_{k \geq 0}$. Now we will prove that

$$\sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), (v_n - u_n) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right|$$

converges to zero as h goes to zero. We have

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \sum_{k < n} F_k(u_k - v_k) + \sum_{k < n} \left(\sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(k) a_j^i(k) \right) u_k \\ &= \sum_{k < n} \left(F_k + \sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(k) a_j^i(k) \right) (u_k - v_k) \\ &\quad + \sum_{k < n} \left(\sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(k) a_j^i(k) \right) v_k \end{aligned} \tag{8}$$

The interest of the second form lies therein, that the term without recurring $u_k - v_k$ can now be estimated thanks to our previous result:

$$\left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), \sum_{k < n} \left(\sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(k) a_j^i(k) \right) v_k b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right|$$

is bounded by

$$\sum_{k < n} \left(\sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} |\tilde{\phi}_i(k)| |\tilde{\psi}_j(k)| \left| \omega_j^i(h) \right| \right) \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), v_k b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| \tag{9}$$

with

$$\begin{aligned} & \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), v_k b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| \\ & \leq \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left(\left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (v_k - w_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), w_k b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right| \right) \end{aligned}$$

and our estimate shows that the first term on the right-hand-side converges to zero uniformly in k as h goes to zero. The second term is, in turn, bounded by $\|\varepsilon(\phi)\| \|\varepsilon(\psi)\|$ since any w_k is $\mathbb{E}_{\mathcal{S}} U_{t_k} \mathbb{E}_{\mathcal{S}}$ and as such is a contraction.

Thanks to our assumptions on the operators $\omega_j^i(h)$, the bound (9) we are interested in converges to zero as h goes to zero, uniformly for a, b in \mathcal{K}_1 . Besides, for the term with recurring $u_k - v_k$ in (8) we obtain as before

$$\begin{aligned} & \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_n), \sum_{k < n} (F_k + \sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} \omega_j^i(h) a_j^i(k)) (u_k - v_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_n) \rangle \right| \\ & \leq h C \sum_{k < n} \sup_{a,b \in \mathcal{K}_1} \left| \langle a \otimes e(\tilde{\phi}_k), (v_k - u_k) b \otimes e(\tilde{\psi}_k) \rangle \right|, \end{aligned}$$

thanks to the fact that the operators $\omega_j^i(h)$ are assumed to have norms which converge to zero uniformly with h . We conclude as in the previous case.

This ends the proof. ■

Under some additional assumptions, which are verified in many applications, we can improve the convergence result.

Theorem 12 – *Consider the same assumptions and the same notations as in Theorem 9. If furthermore $\|u_k\|$ is locally uniformly bounded in the sense that, for any t in \mathbb{R}_+ , $\{\|u_k(h)\|, k \leq t/h\}$ is bounded for any h , then $u_{[t/h]}$ converges weakly to U_t on all $\mathcal{H}_0 \otimes \Phi$.*

Proof

Theorem 9 allows us to perform a $\epsilon/3$ argument with an approximation of any vectors of $\mathcal{H}_0 \otimes T\Phi$ by combinations of vectors $a \otimes \varepsilon(\phi)$, $b \otimes \varepsilon(\psi)$ with essentially bounded functions ϕ, ψ . ■

One of the main application of this last theorem is the case when the matrices $\mathbb{L}(h)$ give rise in the limit to a matrix L such as in Theorem 9 (the case of a unitary solution $(U_t)_{t \geq 0}$) with slightly stronger assumptions on the convergence of the coefficients \mathbb{L}_j^i . In that case we shall show that the associated discrete evolution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies the conditions of the above theorem, so that the convergence of $u_{[t/h]}$ towards U_t is weak.

Theorem 13 – Consider a family of matrices $\mathbb{L}(h)$ on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ such that

$$\mathbb{L}_0^0(h) = I - h(iH + \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k) + h \omega_0^0(h)$$

$$\mathbb{L}_0^i(h) = \sqrt{h} L_i + h \omega_0^i(h)$$

$$\mathbb{L}_j^0(h) = -\sqrt{h} \sum_k L_k^* S_j^k + h \omega_j^0(h)$$

$$\mathbb{L}_j^i(h) = I + S_j^i - \delta_{ij} I + h \omega_j^i(h)$$

where

– H is a bounded self-adjoint operator,

– S_j^i , $i, j = 1, \dots, N$, are bounded operators such that the matrix $(S_j^i)_{i,j}$ is unitary and

– L_i , $i = 1, \dots, N$ are operators on \mathcal{H}_0

and where all the coefficients $\omega_j^i(h)$ are uniformly bounded and $\|\omega_0^0(h)\|$ converges to zero as h tends to zero.

Then the solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of

$$u_{n+1} = \mathbb{L}_{n+1} u_n$$

is made of invertible operators which are locally uniformly bounded in norm. In particular for almost all t , $u_{[t/h]}$ converges weakly to the solution U_t of (5) as h tends to zero.

Beware that the operators ω_j^i do not bear the same normalizations here as before.

Proof

A straightforward computation shows the special form of \mathbb{L} induces many cancelations when computing the coefficients of $\mathbb{L}^* \mathbb{L} - I$ and of $\mathbb{L} \mathbb{L}^* - I$, and that they are of order h . Thus for small enough h the operators $\mathbb{L}^* \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \mathbb{L}^*$ and thus \mathbb{L} are invertible. Thus so are the operators ω_n .

Furthermore the above estimates show that $\|\mathbb{L}\| \leq \sqrt{1 + Ch}$. This easily gives the locally uniform boundedness of $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and thus the desired weak convergence by Theorem 12. ■

This result gives a wide range of applications; for our example where \mathbb{L} is given by

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

with $\alpha = \sqrt{h}$, we do not need it and may apply Theorem 12 directly since for all h the matrix $\mathbb{L}(h)$ is unitary. It implies that for almost all t , $u_{[t/h]}$ converges weakly

to U_t where $(U_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is the solution of

$$dU_t = -\frac{1}{2}V^*V U_t dt + VU_t da_1^0(t) - V^*U_t da_0^1(t)$$

with $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; this is the evolution associated to the spontaneous decay into the ground state in the Wigner-Weisskopf model for the two-level atom.

We use this example as an illustration for an interesting consequence of Theorem 9. We have said that, typically, the operator \mathbb{L} which describes the interaction of the two systems \mathcal{H}_0 and \mathcal{H} during the time interval h is of Hamiltonian form; yet, if one wants to write the above matrix \mathbb{L} in the form e^{ihH} , one finds

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i/\sqrt{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i/\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and it appears that the matrix H depends on h .

Consider more generally any operator \mathbb{L} on $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ and assume it is written as e^{ihH} . Then H itself is a $(N+1) \times (N+1)$ matrix $(H_j^i)_{i,j=0,\dots,N}$ of operators on \mathcal{H}_0 , of which H_0^0 is the Hamiltonian associated to the proper evolution of the small system, the matrix $(H_j^i)_{i,j=1,\dots,N}$ for $i, j \geq 1$ is associated to the proper evolution of the environment and the operators H_0^i , $i = 1, \dots, N$ and H_j^0 , $j = 1, \dots, N$ represent the interaction between the two. It is clear that the conditions of normalization in Theorem 9 (and further remarks made in section IV.1) force these last operators to depend on h if the interaction is to be nontrivial in the limit. What's more, if the proper evolution of the reservoir is also to be nontrivial, it seems that the interaction terms have to be of order $1/\sqrt{h}$; otherwise stated a *coupling constant* λ has to appear in the Hamiltonian, which must be such that $\lambda^2 h$ is of order one. This is the normalization in use in the famous *weak coupling limit* and it again appears as the right normalization for nontrivial behaviour in such models.

Remarks :

– As we have already stated, our results appear in a more intuitive form in quantum probabilistic language. What we have proved amounts to the fact that solutions of perturbed discrete-time equations

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i,j} h^{\varepsilon_{ij}} (L_j^i + \omega_j^i) u_n a_j^i(n+1)$$

converge to solutions of explicit quantum stochastic differential equations

$$dU_t = \sum_{i,j} L_j^i U_t da_j^i(t).$$

In the setup we have presented it is natural to consider that the perturbative coefficients ω_j^i in the discrete-time equation do not depend on the time variable n ; it is natural, in a quantum probabilistic setup, to wonder whether there exist

analogous results in the case of time-dependent perturbations. All of our results remain if one assumes uniform estimates; for this we refer the reader to [Pa2] where these questions are also considered from the point of view of quantum stochastic differential equations.

– It is well known (see [H-P]) that a strongly continuous group of unitaries, hence a “Hamiltonian” operator, is associated to unitary dilations or equivalently to Lindbladians. The properties of such Hamiltonians have been heavily studied by Chebotarev and Gregoratti (see [Gre] and the references therein). Likewise, there is a discrete Hamiltonian naturally associated to the unitary dilations we have considered; from our estimates it is possible to deduce the convergence of the discrete Hamiltonian to its continuous time counterpart; this is fully developed in [Pa2].

IV. Convergence of semigroups and generators

IV.1 From discrete to continuous master equations

First recall that, just like in section II.3, the solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of the equation

$$u_{n+1} = \mathbb{I}_n u_n$$

with $u_0 = I$ induces a completely positive evolution on the small system: in the Heisenberg picture, one has for any a, b in \mathcal{H}_0 , any X in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$,

$$\langle a \otimes \Omega, u_n^* X u_n b \otimes \Omega \rangle = \langle a, \ell^n(X) b \rangle$$

where

$$\ell(X) = \sum_{i \in \{0, \dots, N\}} \mathbb{I}_0^{i*} X \mathbb{I}_0^i.$$

It is straightforward to prove the following result:

Theorem 14 – Let $\mathbb{I}(h) = (\mathbb{I}_j^i(h))_{i,j \in \{0, \dots, N\}}$ be a family of matrices such that $\sum_{i=0}^N \mathbb{I}_0^{i*} \mathbb{I}_0^i(h) = I$ and such that the coefficients converge in the following sense:
 – $(\mathbb{I}_0^0(h) - I)/h$ converges in operator norm to some L_0^0 ,
 – $\mathbb{I}_0^i(h)/\sqrt{h}$ converges in operator norm to some L_0^i for all i in $\{1, \dots, N\}$.
 Then there exists a selfadjoint operator H in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ such that for all t in \mathbb{R}_+ ,

$$\ell^{[t/h]} \longrightarrow e^{t\mathcal{L}}$$

in operator norm, where

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(2L_0^{i*} X L_0^i - L_0^{i*} L_0^i X - X L_0^{i*} L_0^i \right).$$

Proof

It is a straightforward computation that

$$\ell(X) = X + h(L_0^{0*} X + X L_0^0) + h \sum_{i=1}^N L_0^{i*} X L_0^i + o(h\|X\|);$$

the equality $\ell(I) = I$ entails

$$(L_0^{0*} + L_0^0) + \sum_{i=1}^N L_0^{i*} L_0^i = 0$$

so that

$$i \left(L_0^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_0^{i*} L_0^i \right)$$

is selfadjoint; we denote it by H . Then ℓ is of the form

$$\ell(X) = X + h \left(i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (2L_0^{i*} X L_0^i - L_0^{i*} L_0^i X - X L_0^{i*} L_0^i X) \right) + o(h\|X\|),$$

which is, with the notations of the above statement

$$\ell(X) = X + h \mathcal{L}(X) + o(h\|X\|).$$

The above mentioned convergence is therefore clear. ■

As a consequence, it is very easy to obtain approximations of solutions of continuous-time master equations

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}(X_t)$$

by solutions of discrete-time ones:

$$x_{n+1} = \ell x_n.$$

Yet notice that the master equation gives no information whatsoever on the interaction between the small system and the environment or on the environment itself. On the other hand, the associated quantum Langevin equation contains the information on the whole system; this justifies our effort.

Notice that, in the above proposition, no hypothesis is needed on the other coefficients of the matrix $\mathbb{L}(h)$. Their properties actually depend on the choice of additional features of the matrices $\mathbb{L}(h)$, for example their unitarity. The possibility of choosing $\mathbb{L}(h)$ to be unitary and obtain in the end the desired Lindbladian \mathcal{L} is described by Parthasarathy in exercises 29.12 and 29.13 of [Par].

What's more, these manipulations show that the hypotheses of convergence of Theorem 14 are not as artificial as it seems, and are not only convenient assumptions we set up in order to obtain the right convergence. Indeed, to $\mathbb{L}(h)$ is associated both a dynamic on the observables, as we have seen, and an evolution τ , defined by

$$\langle a, \tau_n b \rangle = \langle a \otimes \Omega, u_n b \otimes \Omega \rangle$$

for all a, b in \mathcal{H}_0 , which turns out to be

$$\tau_n = (\mathbb{L}_0^0)^n.$$

If one assumes that $\tau_{[t/h]}$ converges for almost all t and that \mathbb{L}_0^0 is assumed to be continuous at $h = 0$ then the assumption on \mathbb{L}_0^0 in Theorem 14 is to be fulfilled; this

implies that $\sum_{i=1}^n \mathbb{L}_0^{i*} \mathbb{L}_0^i(h) = -h(L_0^{0*} + L_0^0) + o(h)$, so that the other assumptions of convergence of Theorem 14 are natural.

The other conditions described in Theorem 9 are in turn necessary if one wants the process $(U_t)_{t \geq 0}$ obtained in the limit to be unitary (see Theorem 9) or alternatively the matrices $\mathbb{L}(h)$ to be sufficiently close to unitarity.

References

[A-M] **S. Attal** and **P.A. Meyer**: Interprétations probabilistes et extension des intégrales stochastiques non commutatives (in French), *Séminaire de probabilités XXVII* (1993), Springer Verlag, pp. 312-327.

[Att] **S. Attal**: Approximating the Fock space with the toy Fock space, *Séminaire de Probabilités XXXVI* (2003), Springer Verlag, pp. 477-491.

[Gre] **M. Gregoratti**: The Hamiltonian operator associated with some quantum stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 222 (2001), pp. 181-200.

[H-P] **R.L. Hudson** and **K.R. Parthasarathy**: Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Communications in Mathematical Physics* 93 (1984), no. 3, pp. 301-323.

[K-M] **B.Kümmerer** and **H.Maassen**: An ergodic theorem for quantum counting processes, *Journal of Physics A* 30 (2003), pp.1-7.

[Par] **K.R. Parthasarathy**: *An introduction to quantum stochastic calculus*, Monographs in Mathematics (1992), Birkhäuser.

[Pa1] **Y. Pautrat**: Pauli matrices and quantum Ito formula, *Journal of the London Mathematical Society*, to appear.

[Pa2] **Y. Pautrat**: Matrices de Pauli et bruits quantiques, PhD. thesis, Université Joseph Fourier (in French), Grenoble (2003).

Annexe E

Chaînes d'atomes à $(N + 1)$ niveaux et bruits quantiques de dimension N

FROM $(n + 1)$ -LEVEL ATOM CHAINS TO n -DIMENSIONAL NOISES: SOME REMARKS

Stéphane ATTAL and Yan PAUTRAT

Institut FOURIER
U.M.R. 5582
Université de Grenoble I
BP 74
38402 St Martin d'Hères cedex
France

Abstract

We show the intimate relations between chains of $(n + 1)$ -level atoms and n -dimensional classical or quantum noises. From a probabilistic point of view they are related through the approximation of normal martingales in \mathbb{R}^n by random walks in \mathbb{R}^n whose jumps take exactly $n + 1$ different values (discrete-time normal martingales). From a physical point of view, they are related through the identification of the bosonic Fock space $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ with a \mathbb{C}^{n+1} -valued continuous field over \mathbb{R}^+ (or a continuous tensor product of copies of \mathbb{C}^{n+1} indexed by \mathbb{R}^+) and its approximation by chains of $(n + 1)$ -level atoms. The convergence of the corresponding creation, annihilation and gauge processes exactly correspond to the convergence of (classical or quantum) random walks to (classical or quantum) processes in \mathbb{R}^n .

I. Introduction

From the tools developed in [At7] and [Pa2] it appears that the symmetric Fock space $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ and its natural quantum noises processes $a_j^i(t)$ are well approximated by $(n + 1)$ -level atom chains $\otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{(n+1)}$ and their matrix basis $a_j^i(k)$.

Indeed, the natural quantum noises of $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ are the time process $a_0^0(t)$, the creation processes $a_i^0(t)$, the annihilation processes $a_0^i(t)$ and the exchange processes $a_j^i(t)$. With different normalisations, they are the limit of the corresponding $(n + 1)^2$ basic matrices $a_j^i(\cdot)$ on $\otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{(n+1)}$.

But it is also well-known that the Fock space $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ admits several probabilistic interpretations in terms of n -dimensional normal martingales, such as n -dimensional Brownian motion, Poisson process, mixtures of them, Azéma martingales ... (cf [A-E]). The aim of this article is to understand how the above approximation interprets in more probabilistic terms. The structure of the space $\otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^{(n+1)}$ suggests that we are dealing with approximation of n -dimensional processes by random walks taking $(n + 1)$ different values. For example, all the normal

martingales in \mathbb{R}^2 should be approximated by random walks in \mathbb{R}^2 which can only take 3 different values. The approximation of the continuous processes $a_j^i(t)$ by the discrete processes $a_j^i(k)$ should show us how the 3 different values have to be chosen in order to approximate a given normal martingale in \mathbb{R}^2 .

The key point in this article is that these $(n + 1)$ -valued random variables correspond to *obtuse random variables* as developed in [A-E]. They are centered and normalized random variables in \mathbb{R}^n with exactly $(n + 1)$ different values.

In [A-E] it was shown that these obtuse random variable are naturally associated to a *sesqui-symmetric 3-tensor* Φ and that the associated random walk satisfies a *discrete-time structure equation*. This structure equation allows us to represent the multiplication operators by this normal martingale in terms of the basic operators $a_j^i(k)$. Considering the approximation of the Fock space $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$, we obtain the approximation of the multiplication operators by a continuous-time normal martingale. The sesqui-symmetric 3-tensor Φ then converges to a *doubly-symmetric 3-tensor* (in the sense of [A-E]) which is the key of the structure equation describing the probabilistic behaviour of the normal martingale (jumps, continuous and purely discontinuous parts...).

This article does not pretend to show any strong new result, it only places into perspective several already existing theorems, properly quoted in the following. The originality of this work is more in the new point of view and the unification brought on these results.

II. The atom chains

Consider the space \mathbb{C}^{n+1} in which we choose an orthonormal basis denoted by $\{\Omega, X_1, \dots, X_n\}$. This space and this particular choice of an orthonormal basis physically represent either a particle with n excited states X_i and a ground state Ω , or a site which is either empty (Ω) or occupied by a type i particle (X_i). We often write X_0 for Ω when we need unified notations, but it is important in the sequel to keep distinguished one of the basis state.

Together with this basis of \mathbb{C}^{n+1} we consider the following natural basis of $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+1}) = M_{n+1}(\mathbb{C})$:

$$a_j^i X_k = \delta_{ki} X_j,$$

for all $i, j, k = 0, \dots, n$. With these notations the operator a_j^0 corresponds to classical fermionic creation operator for the particule X_j ; indeed, we have $a_j^0 \Omega = X_j$ and $(a_j^0)^2 = 0$. The operator a_j^j corresponds to its associated annihilation operator. The operator a_j^i exchanges a i -level state with a j -level state particle (or a type i particle with a type j particle).

We now consider a chain of copies of this system, like a chain of $(n + 1)$ -level atoms. That is, we consider the Hilbert space

$$T\Phi = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1}$$

made of a countable tensor product, indexed by \mathbb{N} , of copies of \mathbb{C}^{n+1} . A natural orthonormal basis is described by the family

$$\{X_A; A \in \mathcal{P}_n\}$$

where

- \mathcal{P}_n is the set of finite subset $A = \{(n_1, i_1), \dots, (n_k, i_k)\}$ of $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ such that the n_i 's are two by two different. Another way to describe the set \mathcal{P}_n is to identify it to the set of sequences $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ with values in $\{0, \dots, n\}$, but taking only finitely many times a value different from 0.

- X_A denotes the vector

$$\Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X_{i_1} \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes X_{i_2} \otimes \dots$$

of $T\Phi$, where X_{i_1} appears in the copy number i_1 , X_{i_2} appears in the copy i_2, \dots . When A is seen as a sequence $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as above, then X_A is advantageously written $\otimes_k X_{A_k}$.

The physical meaning of this basis is easy to understand: we have a chain of sites, indexed by \mathbb{N} ; on each site there is nothing (*resp.* an atom in the ground state) or a particule of type 1 (*resp.* an atom at energy level 1) ... The above basis vector X_A specifies that there is a particule of type i_1 in the site n_1 , a particule of type i_2 in the site $n_2 \dots$, all the other sites being empty. The space $T\Phi$ is what we shall call the $(n+1)$ -*level atom chain*, with a certain abuse of language.

Put $\{a_j^i; i, j = 0, \dots, n\}$ to be the natural basis of $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+1})$, that is,

$$a_j^i(X_k) = \delta_{ik} X_j.$$

We denote by $a_j^i(k)$ the natural ampliation of the operator a_j^i to $T\Phi$ which acts as a_j^i on the copy number k and as the identity elsewhere.

Note, for information only, that the operators $a_j^i(k)$ form a basis of the algebra $\mathcal{B}(T\Phi)$ of bounded operators on $T\Phi$. That is, the von Neumann algebra generated by the $a_j^i(k)$, $i, j = 0, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$, is the whole of $\mathcal{B}(T\Phi)$ (for $T\Phi$ admits no subspaces which is non trivial and invariant under this algebra).

III. Obtuse random walks in \mathbb{R}^n

Let X be a random variable in \mathbb{R}^n which takes exactly $n+1$ different values v_1, \dots, v_{n+1} with respective probability $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ (all different from 0 by hypothesis). We assume, for simplicity, that X is defined on its canonical space (A, \mathcal{A}, P) , that is, $A = \{1, \dots, n+1\}$, \mathcal{A} is the σ -field of subsets of A , the probability measure P is given by $P(\{i\}) = \alpha_i$ and X is given by $X(\{i\}) = v_i$, for all $i = 1, \dots, n+1$.

Such a random variable X is called *centered and normalized* if $\mathbb{E}[X] = 0$ and $\text{cov}(X) = I$.

A family of elements v_1, \dots, v_{n+1} of \mathbb{R}^n is called an *obtuse system* if

$$\langle v_i, v_j \rangle = -1$$

for all $i \neq j$.

We consider the coordinates X_1, \dots, X_n of X in the canonical basis of \mathbb{R}^n , together with the random variable Ω on (A, \mathcal{A}, P) which is deterministic and always equal to 1.

We put \tilde{X}_i to be the random variable $\tilde{X}_i(j) = \sqrt{\alpha_j}X_i(j)$ and $\tilde{\Omega}(j) = \sqrt{\alpha_j}$. For any element $v = (a_1, \dots, a_n)$ of \mathbb{R}^n we put $\hat{v} = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

The following proposition is rather straightforward and left to the reader.

Proposition 1 – *The following assertions are equivalent.*

- i) X is centered and normalized.
- ii) The $(n+1) \times (n+1)$ -matrix $(\tilde{\Omega}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ is unitary.
- iii) The $(n+1) \times (n+1)$ -matrix $(\sqrt{\alpha_1}\hat{v}_1, \dots, \sqrt{\alpha_{n+1}}\hat{v}_{n+1})$ is unitary.
- iv) The family v_1, \dots, v_{n+1} is an obtuse system of \mathbb{R}^n and

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}.$$

■

Let T be a 3-tensor in \mathbb{R}^n , that is, a linear mapping from \mathbb{R}^n to $M_n(\mathbb{R})$. We write T_k^{ij} for the coefficients of T in the canonical basis of \mathbb{R}^n , that is,

$$(T(x))_{i,j} = \sum_{k=1}^n T_k^{ij} x_k.$$

Such a 3-tensor T is called *sesqui-symmetric* if

- i) $(i, j, k) \mapsto T_k^{ij}$ is symmetric and
- ii) $(i, j, l, m) \mapsto \sum_k T_k^{ij} T_k^{lm} + \delta_{ij}\delta_{lm}$ is symmetric.

Theorem 2 – *If X is a centered and normalized random variable in \mathbb{R}^n , taking exactly $n+1$ values, then there exists a sesqui-symmetric 3-tensor T such that*

$$X \otimes X = I + T(X). \quad (1)$$

Proof

By Proposition 1, the matrix $(\sqrt{\alpha_1}\hat{v}_1, \dots, \sqrt{\alpha_{n+1}}\hat{v}_{n+1})$ is unitary. In particular the matrix $(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{n+1})$ is invertible and its adjoint matrix too. But the latter is the matrix whose columns are the values of the random variables Ω, X_1, \dots, X_n . As a consequence, these $n+1$ random variables are linearly independent. They thus form a basis of $L^2(A, \mathcal{A}, P)$ which is a $n+1$ dimensional space.

The random variable $X_i X_j$ belongs to $L^2(A, \mathcal{A}, P)$ and can thus be written as

$$X_i X_j = \sum_{k=0}^n T_k^{ij} X_k$$

where X_0 denotes Ω and for some real coefficients T_k^{ij} , $k = 0, \dots, n$, $i, j = 1, \dots, n$. The fact that $\mathbb{E}[X_k] = 0$ and $\mathbb{E}[X_i X_j] = \delta_{ij}$ implies $T_0^{ij} = \delta_{ij}$. This gives the representation (1).

The fact that the 3-tensor T associated to the above coefficients T_k^{ij} , $i, j, k = 1, \dots, n$, is sesqui-symmetric is an easy consequence of the fact that the expressions $X_i X_j$ is symmetric in i, j and $X_i(X_j X_m) = (X_i X_j)X_m$ for all i, j, m . We leave it to the reader. ■

The following theorem is detailed in [A-E], Theorem 2, p. 268-272.

Theorem 3. – *The formulas*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n; x \otimes x = I + T(x)\}.$$

and

$$T(y) = \sum_{x \in S} p_x \langle x, y \rangle x \otimes x,$$

where $p_x = 1/(1 + \|x\|^2)$, define a bijection between the set of sesqui-symmetric 3-tensor T on \mathbb{R}^n and the set of obtuse systems S in \mathbb{R}^n . ■

Now we wish to consider the random walks induced by obtuse random variables. That is, on the probability space $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$, we consider a sequence $(X(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ of independent random variables with the same law as a given obtuse random variable X .

For any $A \in \mathcal{P}_n$ we define the random variable

$$X_A = \prod_{(n,i) \in A} X_i(n)$$

with the convention

$$X_\emptyset = \mathbb{1}.$$

Proposition 4. – *The family $\{X_A; A \in \mathcal{P}_n\}$ forms an orthonormal basis of the space $L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$.*

Proof

For any $A, B \in \mathcal{P}_n$ we have

$$\langle X_A, X_B \rangle = \mathbb{E}[X_A X_B] = \mathbb{E}[X_{A \Delta B}] \mathbb{E}[X_{A \cap B}^2]$$

by the independence of the $X(n)$. For the same reason, the first term $\mathbb{E}[X_{A \Delta B}]$ gives 0 unless $A \Delta B = \emptyset$, that is $A = B$. The second term $\mathbb{E}[X_{A \cap B}^2]$ is then equal to $\prod_{(n,i) \in A} \mathbb{E}[X_i(n)^2] = 1$. This proves the orthonormal character of the family $\{X_A; A \in \mathcal{P}_n\}$.

Let us now prove that it generates a dense subspace of $L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$. If we had considered random walks indexed by $\{0, \dots, N\}$ instead of \mathbb{N} , it would be clear that the X_A , $A \subset \{0, \dots, N\}$ would have formed an orthonormal basis

of $L^2(A^N, \mathcal{A}^{\otimes N}, P^{\otimes N})$, for their dimensions are equal. Now a general element f of $L^2(A^N, \mathcal{A}^{\otimes N}, P^{\otimes N})$ can be easily approached by a sequence $(f_N)_N$ such that $f_N \in L^2(A^N, \mathcal{A}^{\otimes N}, P^{\otimes N})$, for all N , by taking conditional expectations on the trajectories of X up to time N . ■

For every obtuse random variable X , we thus obtain a Hilbert space $T\Phi(X) = L^2(A^N, \mathcal{A}^{\otimes N}, P^{\otimes N})$, with a natural orthonormal basis $\{X_A; A \in \mathcal{P}_n\}$ which emphasizes the independence of the $X(n)$'s. In particular there is a natural isomorphism between all the spaces $T\Phi(X)$ which consists in identifying the associated basis. In the same way, all these canonical spaces $T\Phi(X)$ of obtuse random walks are naturally isomorphic to the atom chain $T\Phi$ of previous section (again by identifying their natural orthonormal basis).

But this identification, as Hilbert spaces, does not mean much for the moment. The identification of the random variable $X_i(n)$ to the element $X_{(n,i)}$ of $T\Phi$ makes lost all the probabilistic information about $X_i(n)$. Indeed it is impossible to recover the probabilistic nature of the random variable $X_i(n)$ by only knowing that it is sent to $X_{(n,i)}$ via some unitary operator! We have lost the law of $X_i(n)$, the independence with respect to the others $X_j(k)$, ...etc

The only way to recover the full probabilistic information on $X_i(n)$ in the Hilbert space formalism associated to $T\Phi$ is to consider the *multiplication operator* by $X_i(n)$ instead of the Hilbert space element $X_i(n)$. Indeed, if we know the representation in $T\Phi$ of the operator $\mathcal{M}_{X_i(n)}$ of multiplication by $X_i(n)$ on $T\Phi(X)$, we know everything about the random variable $X_i(n)$.

Once this is understood, the following theorem is one the keys of this article. It shows that *all* the obtuse random walks in \mathbb{R}^n can be represented in a single space $T\Phi$ with very economical means: linear combinations of the operators a_j^i .

Theorem 5. – *Let X be an obtuse random variable, let $(X(k))_{k \in \mathbb{N}}$ be the associated random walk on the canonical space $T\Phi(X)$. Let T be the sesqui-symmetric 3-tensor associated to X . Let U be the natural unitary isomorphism from $T\Phi(X)$ to $T\Phi$. Then, for all $k \in \mathbb{N}, i = \{1, \dots, n\}$ we have*

$$U\mathcal{M}_{X_i(k)}U^* = a_i^0(k) + a_0^i(k) + \sum_{j,l} T_i^{jl} a_l^j(k).$$

Proof

It suffices to compute the action of $X_i(k)$ on the basis elements $X_A, A \in \mathcal{P}_n$. We have, by Theorem 1

$$\begin{aligned} X_i(k)X_A &= \mathbb{1}_{(k,\cdot) \notin A} X_i(k)X_A + \sum_j \mathbb{1}_{(k,j) \in A} X_i(k)X_A \\ &= \mathbb{1}_{(k,\cdot) \notin A} X_{A \cup \{(k,i)\}} + \sum_j \mathbb{1}_{(k,j) \in A} X_i(k)X_j(k)X_{A \setminus \{(k,j)\}} \\ &= \mathbb{1}_{(k,\cdot) \notin A} X_{A \cup \{(k,i)\}} + \sum_j \mathbb{1}_{(k,j) \in A} (\delta_{ij} + \sum_l T_l^{ij} X_l(k))X_{A \setminus \{(k,j)\}} \end{aligned}$$

$$= \mathbb{1}_{(k,\cdot) \notin A} X_{A \cup \{(k,i)\}} + \mathbb{1}_{(k,i) \in A} X_{A \setminus \{(k,i)\}} + \sum_j \sum_l \mathbb{1}_{(k,j) \in A} T_l^{ij} X_{A \setminus \{(k,j)\} \cup \{(k,i)\}}$$

and we immediatly recognize the formula for

$$a_i^0(k) X_A + a_0^i(k) X_A + \sum_{k,l} T_l^{ij} a_l^j(k) X_A.$$

■

We shall now abandon for a while these random walk, in order to describe the Fock space structure and its approximation by the atom chain.

IV. Approximation of the Fock space by atom chains

We recall the structure of the bosonic Fock space Φ and its basic structure (cf Chapter 3 for details).

Let $\Phi = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ be the symmetric (bosonic) Fock space over the space $L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n)$. We shall here give a very efficient presentation of that space, the so-called *Guichardet interpretation* of the Fock space.

Let $I = \{1, \dots, n-1\}$. Let \mathcal{P} be the set of finite subsets $\{(s_1, i_1), \dots, (s_k, i_k)\}$ of $\mathbb{R}^+ \times I$ such that the s_i are two by two different. Then $\mathcal{P} = \cup_k \mathcal{P}(k)$ where $\mathcal{P}(k)$ is the set of k -elements subsets of $\mathbb{R}^+ \times I$. By ordering the \mathbb{R}^+ -part of the elements of $\sigma \in \mathcal{P}(k)$, the set $\mathcal{P}(k)$ can be identified to the increasing simplex $\Sigma_k = \{0 < t_1 < \dots < t_k\} \times I$ of $\mathbb{R}^k \times I$. Thus $\mathcal{P}(k)$ inherits a measured space structure from the Lebesgue measure on \mathbb{R}^k times the counting measure on I . This also gives a measure structure on \mathcal{P} if we specify that on $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$ we put the measure δ_\emptyset . Elements of \mathcal{P} are often denoted σ , the measure on \mathcal{P} is denoted $d\sigma$. The σ -field obtained this way on \mathcal{P} is denoted \mathcal{F} .

We identify any element $\sigma \in \mathcal{P}$ with a family $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ of (two by two disjoint) subsets of \mathbb{R}^+ where

$$\sigma_i = \{s \in \mathbb{R}^+; (s, i) \in \sigma\}.$$

For a $s \in \mathbb{R}^+$ we denote by $\{s\}_i$ the element $\sigma = \{\emptyset, \dots, \emptyset, \{s\}, \emptyset, \dots, \emptyset\}$ of \mathcal{P} (where $\{s\}$ is at the i -th position).

The *Fock space* Φ is the space $L^2(\mathcal{P}, \mathcal{F}, d\sigma)$. An element f of Φ is thus a measurable function $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty.$$

One can define, in the same way, $\mathcal{P}_{[a,b]}$ and $\Phi_{[a,b]}$ by replacing \mathbb{R}^+ with $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$. There is a natural isomorphism between $\Phi_{[0,t]} \otimes \Phi_{[t,+\infty[}$ given by $h \otimes g \mapsto f$ where $f(\sigma) = h(\sigma \cap [0, t])g(\sigma \cap (t, +\infty[)$.

Define $\mathbb{1}$ to be the *vacuum vector*, that is, $\mathbb{1}(\sigma) = \delta_\emptyset(\sigma)$.

Define $\chi_t^i \in \Phi$ by

$$\chi_t(\sigma) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) & \text{if } \sigma = \{s\}_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\chi \subset_t$ belongs to $\Phi_{[0,t]}$. We even have $\chi_t^i - \chi_s^i \in \Phi_{[s,t]}$ for all $s \leq t$. This last property allows to define a so-called *Ito integral* on Φ . Indeed, let $(g_t^i)_{t \geq 0}$ be families in Φ , for $i = 1, \dots, N - 1$, such that

- i) $t \mapsto \|g_t^i\|$ is measurable,
- ii) $g_t^i \in \Phi_{[0,t]}$ for all t ,
- iii) $\int_0^\infty \|g_t^i\|^2 dt < \infty$,

then one defines $\sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$ to be the limit in Φ of

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{t_j} g_s^i ds \otimes (\chi_{t_{j+1}}^i - \chi_{t_j}^i) \quad (3)$$

where P_t is the orthogonal projection onto $\Phi_{[0,t]}$ and $\{t_j, j \in \mathbb{N}\}$ is a partition of \mathbb{R}^+ which is understood to be refining and to have its diameter tending to 0. Note that $\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{t_j} g_s^i ds$ belongs to $\Phi_{[0,t_j]}$, which explains the tensor product symbol in (3).

We get that $\sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i$ is an element of Φ with

$$\left\| \sum_i \int_0^\infty g_t^i d\chi_t^i \right\|^2 = \sum_i \int_0^\infty |g_t^i|^2 dt. \quad (4)$$

Let $f \in L^2(\mathcal{P}_n)$, one can easily define the *iterated Ito integral* on Φ .

$$I_n(f) = \int_{\mathcal{P}_n} f(\sigma) d\chi_{t_1}^{i_1} \dots d\chi_{t_n}^{i_n}$$

by iterating the definition of the Ito integral. We use the following notation:

$$I_n(f) = \int_{\mathcal{P}_n} f(\sigma) d\chi_\sigma$$

which we extend, in an obvious way, to any $f \in \Phi$.

We then have the following important representation.

Theorem 6. – *Any element f of Φ admits an abstract chaotic representation*

$$f = \int_{\mathcal{P}} f(\sigma) d\chi_\sigma$$

with

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 d\sigma$$

and an abstract predictable representation

$$f = f(\emptyset) \mathbb{1} + \sum_i \int_0^\infty D_t^i f d\chi_t^i$$

with

$$\|f\|^2 = |f(\emptyset)|^2 + \sum_i \int_0^\infty \|D_s^i f\|^2 ds$$

where $[D_s^i f](\sigma) = f(\sigma \cup \{s\}_i) \mathbb{1}_{\sigma \subset [0,s]}$.

Let us now recall the definitions of the basic noise operators $a_j^i(t)$, $i, j = 0, \dots, N-1$, on Φ . They are respectively defined by

$$\begin{aligned} [a_i^0(t)f](\sigma) &= \sum_{\substack{s \in \sigma_i \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_i), \\ [a_0^i f](\sigma) &= \int_0^t f(\sigma \cup \{s\}_i) ds, \\ [a_j^i f](\sigma) &= \sum_{\substack{s \in \sigma_i \\ s \leq t}} f(\sigma \setminus \{s\}_i \cup \{s\}_j) \end{aligned}$$

for $i, j \neq 0$ and $a_0^0(t) = tI$.

There is a good common domain to all these operators, namely

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \Phi ; \int_{\mathcal{P}} |\sigma| |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty \right\}.$$

Let $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ be a partition of \mathbb{R}^+ and $\delta(\mathcal{S}) = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ be the diameter of \mathcal{S} . For \mathcal{S} being fixed, define $\Phi_n = \Phi_{[t_n, t_{n+1}]}$, $i \in \mathbb{N}$. We then have $\Phi \simeq \otimes_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ (with respect to the stabilizing sequence $(\mathbb{1})_{n \in \mathbb{N}}$).

For all $n \in \mathbb{N}$, define for $i, j \neq 0$

$$\begin{aligned} X^i(n) &= \frac{\chi_{t_{n+1}}^i - \chi_{t_n}^i}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}} \in \Phi_n, \\ a_0^i(n) &= \frac{a_0^i(t_{n+1}) - a_0^i(t_n)}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}}, \\ a_j^i(n) &= a_j^i(t_{n+1}) - a_j^i(t_n), \\ a_i^0(n) &= P_{1j} \frac{a_i^0(t_{n+1}) - a_i^0(t_n)}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}}, \end{aligned}$$

where P_{1j} is the orthogonal projection onto $L^2(\mathcal{P}_1)$ and where the above definition of $a_i^0(n)$ is understood to be valid on Φ_n only, with $a_i^0(n)$ being the identity operator I on the others Φ_m 's (the same is automatically true for a_0^i, a_j^i). We put $a_0^0(n) = I$.

Proposition 7. – *We have*

$$\begin{cases} a_0^i(n) X^j(n) = \delta_{ij} \mathbb{1} \\ a_0^i \mathbb{1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_j^i(n) X^k(n) = \delta_{ik} X^j(n) \\ a_j^i \mathbb{1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_i^0(n) X^j(n) = 0 \\ a_i^0(n) \mathbb{1} = X^i(n) \end{cases}.$$

■

Thus the action of the operators a_j^i on the $X^i(n)$ is similar to the action of the corresponding operators on the spin chain of section II. We are now going to construct the spin chain inside Φ . We are still given a fixed partition \mathcal{S} . Define $T\Phi(\mathcal{S})$ to be the space of $f \in \Phi$ which are of the form

$$f = \sum_{A \in \mathcal{P}_N} f(A) X_A$$

(with $\|f\|^2 = \sum_{A \in \mathcal{P}_N} |f(A)|^2 < \infty$).

The space $T\Phi(\mathcal{S})$ is thus clearly identifiable to the spin chain $T\Phi$; the operators $a_j^i(n)$ act on $T\Phi(\mathcal{S})$ exactly in the same way as the corresponding operators on $T\Phi$. We have completely embedded the toy Fock space into the Fock space. Let $\mathcal{S} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ be a fixed partition of \mathbb{R}^+ . The space $T\Phi(\mathcal{S})$ is a closed subspace of Φ . We denote by $P_{\mathcal{S}}$ the operator of orthogonal projection from Φ onto $T\Phi(\mathcal{S})$.

We are now going to prove that the Fock space Φ and its basic operators $a_j^i(t)$ can be approached by the toy Fock spaces $T\Phi(\mathcal{S})$ and their basic operators $a_j^i(k)$.

We are given a sequence $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of partitions which are getting finer and finer and whose diameter $\delta(\mathcal{S}_n)$ tends to 0 when n tends to $+\infty$. Let $T\Phi(n) = T\Phi(\mathcal{S}_n)$ and let P_n be the orthogonal projector onto $T\Phi(\mathcal{S}_n)$, for all $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 8. –

i) For every $f \in \Phi$ there exists a sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $f_n \in T\Phi(n)$, for all $n \in \mathbb{N}$, and $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to f in Φ . For all i, j let

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{0i} + \delta_{0j}).$$

ii) If $\mathcal{S}_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_k^n < \dots\}$, then for all $t \in \mathbb{R}^+$, the operators

$$\sum_{k; t_k^n \leq t} (t_{k+1}^n - t_k^n)^{\varepsilon_{ij}} a_j^i(k)$$

converge strongly on \mathcal{D} to $a_j^i(t)$.

Proof

i) As the \mathcal{S}_n are refining then the $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forms an increasing family of orthogonal projection in Φ . Let $P_\infty = \vee_n P_n$. Clearly, for all $s \leq t$, all i we have that $\chi_t^i - \chi_s^i$ belongs to $\text{Ran} P_\infty$. But by the construction of the Ito integral and by Theorem 5, we have that the $\chi_t^i - \chi_s^i$ generate Φ . Thus $P_\infty = I$. Consequently if $f \in \Phi$, the sequence $f_n = P_n f$ satisfies the statements.

ii) The convergence of $\sum_{k, t_k^n \leq t} (t_{k+1}^n - t_k^n)^{\varepsilon_{ij}} a_j^i(k)$ to $a_j^i(t)$ is clear from the definitions when $i \neq 0$. Let us check the case of a_i^0 . We have, for $f \in \mathcal{D}$

$$\left[\sum_{k; t_k^n \leq t} \sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n} a_i^0(k) f \right] (\sigma) = \sum_{k; t_k^n \leq t} \mathbb{1}_{|\sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]|=1} \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} f(\sigma \setminus \{s\}).$$

Put $t^n = \inf \{t_k^n \in \mathcal{S}_n ; t_k^n \geq t\}$. We have

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k; t_k^n \leq t} \sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n} a_i^0(k) - a_i^0(t) f \right\|^2 \\
&= \int_{\mathcal{P}} \left| \sum_{k; t_k^n \leq t} \mathbb{1}_{|\sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]|=1} \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} f(\sigma \setminus \{s\}) - \sum_{s \in \sigma \cap [0, t]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right|^2 d\sigma \\
&\leq 2 \int_{\mathcal{P}} \left| \sum_{s \in \sigma \cap [t, t]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right|^2 d\sigma + 2 \int_{\mathcal{P}} \left| \sum_{k; t_k^n \leq t} \mathbb{1}_{|\sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]| \geq 2} \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right|^2 d\sigma.
\end{aligned}$$

For any fixed σ , the terms inside each of the integrals above converge to 0 when n tends to $+\infty$. Furthermore we have, for n large enough,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}} \left| \sum_{s \in \sigma \cap [t, t^n]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right|^2 d\sigma &\leq \int_{\mathcal{P}} |\sigma| \sum_{\substack{s \in \sigma \\ s \leq t+1}} |f(\sigma \setminus \{s\})|^2 d\sigma \\
&= \int_0^{t+1} \int_{\mathcal{P}} (|\sigma| + 1) |f(\sigma)|^2 d\sigma ds \\
&\leq (t+1) \int_{\mathcal{P}} (|\sigma| + 1) |f(\sigma)|^2 d\sigma
\end{aligned}$$

which is finite for $f \in \mathcal{D}$;

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \left| \sum_{k; t_k^n \leq t} \mathbb{1}_{|\sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]| \geq 2} \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right|^2 d\sigma \\
&\leq \int_{\mathcal{P}} \left(\sum_{k; t_k^n \leq t} \mathbb{1}_{|\sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]| \geq 2} \left| \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} f(\sigma \setminus \{s\}) \right| \right)^2 d\sigma \\
&\leq \int_{\mathcal{P}} \left(\sum_{k; t_k^n \leq t} \sum_{s \in \sigma \cap [t_k^n, t_{k+1}^n]} |f(\sigma \setminus \{s\})| \right)^2 d\sigma \\
&= \int_{\mathcal{P}} \left(\sum_{\substack{s \in \sigma \\ s \leq t^n}} |f(\sigma \setminus \{s\})| \right)^2 d\sigma \\
&= \int_{\mathcal{P}} |\sigma| \sum_{\substack{s \in \sigma \\ s \leq t^n}} |f(\sigma \setminus \{s\})|^2 d\sigma \\
&\leq (t+1) \int_{\mathcal{P}} (|\sigma| + 1) |f(\sigma)|^2 d\sigma
\end{aligned}$$

in the same way as above. So we can apply Lebesgue's theorem. This proves *ii*). ■

V. Multidimensional structure equations

Let us recall some basic facts about normal martingales in \mathbb{R}^n , as developed in [A-E].

In the same way as the Fock space $\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}))$ admits probabilistic interpretations in terms of unidimensional normal martingales, the multiple Fock space $\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^n))$ admits probabilistic interpretations in terms of multidimensional normal martingales. The point here is that the extension of the notion of normal martingale, structure equation... to the multidimensional case is not so immediate. Some interesting algebraic structures appear.

A martingale $X = (X^1 \dots X^n)$ with values in \mathbb{R}^n is called *normal* if $X_0 = 0$ and if, for all i and j , the process $X_t^i X_t^j - \delta_{ij}t$ is a martingale. This is equivalent to saying that

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}t$$

for all $t \in \mathbb{R}^+$, or else this is equivalent to saying that the process

$$[X^i, X^j]_t - \delta_{ij}t$$

is a martingale.

A normal martingale $X = (X^1 \dots X^n)$ in \mathbb{R}^n is said to *satisfy a structure equation* if each of the martingales $[X^i, X^j]_t - \delta_{ij}t$ is a stochastic integral with respect to X :

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^n \int_0^t T_k^{ij}(s) dX_s^k$$

where the T_k^{ij} are predictable processes.

A family $\{A_k^{ij} ; i, j, k \in \{1 \dots N\}\}$ of real numbers is identified to a linear map A from $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ by

$$(Ax)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_k^{ij} x_k .$$

Such a family is said to be *diagonalisable in some orthonormal basis* if there exists an orthonormal basis $\{e^1 \dots e^n\}$ of \mathbb{R}^n for which

$$Ae^k = \lambda_k e^k \otimes e^k$$

for all $k = 1 \dots n$ and for some *eigenvalues* $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

A family $\{A_k^{ij} ; i, j, k \in \{1 \dots N\}\}$ is called *doubly symmetric* if

- i) $(i, j, k) \mapsto A_k^{ij}$ is symmetric on $\{1 \dots n\}^3$ and
- ii) $(i, j, i', j') \mapsto \sum_{k=1}^n A_k^{ij} A_k^{i'j'}$ is symmetric on $\{1 \dots n\}^k$.

Theorem 9. – For a family $\{A_k^{ij} ; i, j, k \in \{1 \dots n\}\}$ of real numbers, the following assertions are equivalent.

- i) A is doubly symmetric.
- ii) A is diagonalisable in some orthonormal basis.

A family $\{x^1 \dots x^k\}$ of elements of \mathbb{R} is called *orthogonal family* if the x^i are all different from 0 and are two by two orthogonal.

Theorem 10. – *There is a bijection between the doubly symmetric families A of \mathbb{R}^n and the orthogonal families Σ which is given by*

$$Af = \sum_{x \in \Sigma} \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, f \rangle x \otimes x$$

and

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} ; Ax = x \otimes x\}.$$

These algebraic preliminaries are used to determine the behaviour of the multidimensional normal martingales.

Theorem 11. – *Let X be a normal martingale in \mathbb{R}^n satisfying a structure equation*

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^n \int_0^t T_\varepsilon^{ij}(s) dX_s^k.$$

Then for a.a. (t, ω) the family $\{T_k^{ij}(s, \omega) ; i, j, k = 1 \dots N\}$ is doubly symmetric. If $\Sigma_t(\omega)$ is its associated orthogonal system and if $\pi_t(\omega)$ denotes the orthogonal projection onto $(\Sigma_t(\omega))^\perp$, then the continuous part of X is given by

$$X_t^{c,i} = \sum_{j=1}^N \int_0^t \pi_s^{ij} dX_s^j;$$

the jumps of X happen only at totally inaccessible times and they satisfy

$$\Delta X_t(\omega) \in \Sigma_t(\omega).$$

We can now study a basic example. The simplest case occurs when T is constant in t . Contrarily to the unidimensional case, this situation is already rather rich.

Proposition 12. – *Let T be a doubly symmetric family on \mathbb{R}^n . Let Σ be its associated orthogonal system. Let B be a Brownian motion with values in the Euclidian space Σ^\perp . For each $x \in \Sigma$, let N^x be a Poisson process with intensity $\|x\|^{-2}$. We assume B and all the N^x to be independent. Then the martingale*

$$X_t = B_t + \sum_{x \in \Sigma} (N_t^x - \|x\|^{-2}t)x$$

satisfies the constant coefficient structure equation

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^n T_k^{ij} X_t^k.$$

Conversely, every normal martingale which is solution of the above equation has the same law as X .

Finally, let us recall a particular case of a theorem proved in [At2], which has the advantage of not needing the introduction of quantum stochastic integral and of being sufficient for our purpose.

Theorem 13.—*Let X be a normal martingale in \mathbb{R}^n which satisfies a structure equation of the above form :*

$$[X^i, X^j]_t = \delta_{ij}t + \sum_{k=1}^n T_k^{ij} X_t^k .$$

Then X possesses the chaotic representation property. Furthermore, the space $L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$ is naturally isomorphic to Φ , by identifying the chaotic expansion of f with the element \tilde{f} of Φ whose abstract chaotic expansion has the same coefficients.

Within this identification the operator of multiplication by X_t^k is equal to

$$\mathcal{M}_{X_t^k} = a_k^0(t) + a_k^k(t) + \sum_{i,j=1}^n T_k^{ij} a_j^i(t).$$

■

VI. Some approximations of n -dimensional noises

We shall now follow some examples of application of the above remarks and results.

We consider, in the case $n = 2$, an obtuse random variable X which takes the values $v_1 = (a, 0)$, $v_2 = (b, c)$ and $v_3 = (b, d)$ with respective probabilities p, q, r . In order that X be obtuse we put

$$a = \sqrt{1/p - 1}, \quad b = -1/a, \quad c = \sqrt{1/q - 1 - b^2}, \quad d = -\sqrt{1/r - 1 - b^2}.$$

Let us call S this set of values for X and p_s the probability associated to $s \in S$. The associated sesqui-symmetric 3-tensor T is given by

$$T(v) = \sum_{s \in S} p_s \langle s, x \rangle s \otimes s.$$

For example, in the case $p = 1/2$, $q = 1/3$ and $r = 1/6$ we get $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ and $d = -2$. The tensor T is then given by

$$T(v) = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ -y & -x - y \end{pmatrix}$$

if $v = (x, y)$. Thus the multiplication operator by X_1 is equal to

$$X_1 = a_0^1 + a_1^0 - a_2^2$$

and the multiplication operator by X_2 is equal to

$$X_2 = a_0^2 + a_2^0 - (a_2^1 + a_1^2 + a_2^2).$$

Now we consider a random walk $(X(k))_{k \geq 0}$ made of independent copies of this random variable X , with time step h . In the framework of the Fock space approximation described above, the operator

$$\sum_{k; kh \leq t} X_1(k)/\sqrt{h}$$

converges to

$$a_1^0(t) + a_0^1(t)$$

and the operator

$$\sum_{k; kh \leq t} X_2(k)/\sqrt{h}$$

converges to

$$a_2^0(t) + a_0^2(t).$$

This means that the limit process $X(t)$ is a 2-dimensional Brownian motion. Indeed, the above representation shows that the associated doubly-symmetric tensor Φ is null and thus X satisfies the structure equation

$$\begin{aligned} d[X_1, X_1]_t &= dt \\ d[X_1, X_2]_t &= 0 \\ d[X_2, X_2]_t &= dt \end{aligned}$$

which is exactly the structure equation verified by two independent Brownian motion.

It is clear, that whatever the values of p, q, r are, if they are independent of the time step parameter h , we will always obtain a 2-dimensional Brownian motion as a limit of this random walk.

When some of the probabilities p, q or r depend on h the behaviour may be very different. Let us follow two examples.

In the case $p = 1/2, q = h$ and $r = 1/2 - h$ we get

$$a = 1, b = -1, c = \frac{1}{\sqrt{h}} + O(h^{1/2}), d = -2\sqrt{h} + o(h^{3/2}).$$

For the tensor T we get

$$T(v) = \begin{pmatrix} 0 + o(h^{5/2}) & -y + o(h^2) \\ -y + o(h^2) & -\frac{y}{\sqrt{h}} - x + o(h^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

The multiplication operators are then given by

$$X_1 = a_0^1 + a_1^0 - a_2^2 + O(h^2)$$

and

$$X_2 = a_0^2 + a_2^0 - (a_2^1 + a_1^2) + \frac{1}{\sqrt{h}}a_2^2 + O(h^{1/2}).$$

In the same limit as above we obtain the operators

$$a_0^1(t) + a_1^0(t)$$

and

$$a_0^2(t) + a_2^0(t) - a_2^2(t).$$

This means that the coordinate $X_1(t)$ is a Brownian motion and $X_2(t)$ is an independent Poisson process, with intensity 1 and directed upwards. Indeed, the associated tensor Φ is given by

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$$

and the associated structure equation is

$$\begin{aligned} d[X_1, X_1]_t &= dt \\ d[X_1, X_2]_t &= 0 \\ d[X_2, X_2]_t &= dt + dX_2(t) \end{aligned}$$

which is the structure equation of the process we described.

The last example we shall treat is the case $p = 1 - 2h$, $q = r = h$. We get, for the dominating terms

$$a = \sqrt{2}\sqrt{h}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}, \quad d = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}},$$

and

$$\begin{aligned} X_1 &= a_0^1 + a_1^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}a_2^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}a_1^1 \\ X_2 &= a_0^2 + a_2^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}(a_2^1 + a_1^2). \end{aligned}$$

The limit process is then solution of the structure equation

$$\begin{aligned} d[X_1, X_1]_t &= dt - \frac{1}{\sqrt{2}}dX_1(t) \\ d[X_1, X_2]_t &= -\frac{1}{\sqrt{2}}dX_2(t) \\ d[X_2, X_2]_t &= dt - \frac{1}{\sqrt{2}}dX_1(t). \end{aligned}$$

The associated tensor is easy to diagonalise and one finds the eigenvectors

$$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad \text{and} \quad (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

The limit process is made of two independent Poisson processes, with intensity 2 and respective direction $(-1,1)$ and $(-1,-1)$.

