PROLONGEMENT ANALYTIQUE SUR LES VARIÉTÉS DE SIEGEL

par

Vincent Pilloni

Abstract. — We study analytic continuation of overconvergent modular forms on Siegel varieties. We first analyse the dynamic of Hecke correspondances at p over Siegel varieties with parahoric level structure. We then concentrate on genus 2 and prove a classicity criterion : a Siegel overconvergent modular form, of weight (k_1, k_2), eigen for U_p with eigenvalue a_p, such that $k_2 > v(a_p) + 3$ is classical. This implies that genus 2 cuspidal ordinary p-adic modular forms of weight (k_1, k_2) with $k_1 \geq k_2 \geq 4$ are classical.

Résumé. — Nous étudions la possibilité de réaliser le prolongement analytique des formes modulaires surconvergentes sur les variétés de Siegel. Dans un premier temps, nous analysons la dynamique des correspondances de Hecke en p sur les variétés de Siegel avec niveau parahorique. Nous nous intéressons ensuite au genre 2 et démontrons un critère de classicité : toute forme modulaire de Siegel surconvergente de poids (k_1, k_2), propre pour U_p pour la valeur propre a_p, avec $k_2 > 3 + v(a_p)$ est classique. Ceci entraîne que les formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales de Siegel de genre 2 et de poids (k_1, k_2) avec $k_1 \geq k_2 \geq 4$ sont classiques.

Classification Mathématique par sujet : 11 F 46

Table des matières

1. Introduction

Soit p un nombre premier, K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et $\bar{K}$ une clôture algébrique. On note v la valuation de $\bar{K}$, normalisée par $v(p) = 1$. Soit $\mathrm{N} \geq 3$ un entier premier à p et $X \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ l'espace de modules qui paramètre les schémas abéliens $\mathcal{A}$ principalement polarisés de dimension g, équipés d'une structure principale de niveau N et d'un drapeau complet $H_1 \subset ... \subset H_g \subset \mathcal{A}[p]$ de sous-groupes de la p-torsion, totalement isotropes. Le schéma X est la variété de Siegel de genre g, de niveau auxiliaire N et de niveau Iwahorique en p. D'après [**D-R**], VI thm 3.4 lorsque $g = 1$ et le théorème principal de [**Str1**] lorsque $g \geq 2$, il existe une compactification toroïdale $\bar{X}$ de X qui est un schéma projectif sur Spec $\mathcal{O}_K$. Cette compactification est canonique lorsque $g = 1$ et dépend de choix combinatoires lorsque $g \geq 2$.

Pour tout poids $\kappa = (k_1, ..., k_g) \in \mathbb{Z}^g$, $k_1 \geq ... \geq k_g$, on dispose d'un faisceau ω^κ sur $\bar{X}$ (voir [**Hi02**], p. 5 ou [**Pi**], 4.1.1). Ses sections globales sont par définition l'espace des formes modulaires de Siegel de poids κ, de niveau auxiliaire N, de niveau Iwahorique en p, à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. De plus, d'après le principe de Koecher lorsque $g \geq 2$ (voir [**Str2**], prop 2.5.6), on a $\mathrm{H}^0(X, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{X}, \omega^\kappa)$. Nous notons $\mathrm{M}(\kappa, X) = \mathrm{H}^0(\bar{X}_K, \omega^\kappa)$ le K-espace vectoriel de dimension finie des formes de Siegel de poids κ sur $\bar{X}_K$, la fibre générique de $\bar{X}$. L'espace $\mathrm{M}(\kappa, X)$ ne dépend pas du choix d'une compactification $\bar{X}$.

Dans la fibre rigide $\bar{X}_{rig}$ de la complétion formelle de $\bar{X}$ le long de sa fibre spéciale, on peut considérer le tube ordinaire multiplicatif. C'est le lieu où les schémas semi-abéliens ont réduction ordinaire et où le groupe H_g est de type multiplicatif. Une forme modulaire surconvergente de niveau auxiliaire N et de niveau Iwahorique en p est alors une section rigide-analytique du faisceau ω^κ sur le tube, se prolongeant dans un voisinage strict. On note $\mathrm{M}(\kappa, \bar{X})^\dagger$ cet espace. Lorsque $g \geq 2$, nous ne savons pas si cet espace est indépendant du choix de la compactification. Il existe dans ce cas deux autres définitions raisonnables de forme surconvergentes. Notons $X_{rig} \subset \bar{X}_{rig}$ la fibre générique de la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale. On peut considérer l'espace $\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$ des sections sur le tube ordinaire multiplicatif de X_{rig}, s'étendant dans un voisinage strict de X_{rig}. La partie 8 de [**A-M**] nous amène à considérer également l'espace $\mathrm{M}(\kappa, X, \bar{X})^\dagger$ des sections rigides-analytiques sur le tube ordinaire de X_{rig}, qui se prolongent sur un voisinage strict dans $\bar{X}_{rig}$. Les espaces $\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$ et $\mathrm{M}(\kappa, X, \bar{X})^\dagger$ ne dépendent que de X. On a une suite d'inclusions

$$\mathrm{M}(\kappa, \bar{X})^\dagger \hookrightarrow \mathrm{M}(\kappa, X, \bar{X})^\dagger \hookrightarrow \mathrm{M}(\kappa, X)^{\dagger}\text{(1)}.$$

Les espaces de formes surconvergentes apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à comprendre les congruences qui existent entre des formes modulaires de poids différents. Par exemple, dans [**Pi**], thm A.3, nous avons établi que toute forme modulaire p-adique, ordinaire, cuspidale pour un poids dominant définit une forme surconvergente sur $\mathrm{M}(\kappa, \bar{X})$. On dispose d'une application de restriction injective :

$$\mathrm{M}(\kappa, X) \to \mathrm{M}(\kappa, \bar{X})^\dagger$$

et il est important de disposer d'un critère pour décider quand une forme surconvergente est classique, c'est à dire appartient à l'image du précédent morphisme.

Lorsque $g = 1$, un tel critère a été obtenu à l'aide d'un opérateur U_p agissant sur $\mathrm{M}(\kappa, X)$ et $\mathrm{M}(\kappa, \bar{X})^\dagger$ (voir [**Ka**], 3.11). Le théorème suivant est dû à Hida dans le cas ordinaire ([**Hi86**], cor. 3.2) et à Coleman ([**Col**]) dans le cas général :

(1) On peut montrer que les inclusions précédentes sont des égalités sur la partie ordinaire cuspidale.

***Théorème 1.1* (Hida, Coleman).** — *Toute forme surconvergente F de poids k, propre pour U_p, avec une valeur propre a_p est classique si $k > v(a_p) + 1$.*

Ce théorème a été redémontré par Buzzard et Kassaei en utilisant des techniques de prolongement analytique ([**Buz**], thm 5.2 et [**Kas**], thm 1.2). Les techniques de prolongement analytique ont de plus permis de montrer la classicité de certaines formes modulaires surconvergentes de poids 1.

Cet article étudie la possibilité d'appliquer les idées de *loc. cit.* en genre $g \geq 2$. On dispose, en tout genre, d'un opérateur U_p agissant sur $\mathrm{M}(\kappa, \bar{X})^\dagger, \mathrm{M}(\kappa, X, \bar{X})^\dagger$ et $\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$. Le résultat principal de ce travail est le suivant :

Théorème 1.2. — *Supposons $g = 2$. Soit $\kappa = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ avec $k_1 \geq k_2$ et F un élément de $\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$, propre pour l'opérateur U_p pour la valeur propre a_p, avec $k_2 > v(a_p) + 3$. Alors la forme F est classique.*

On en déduit le corollaire :

Corollaire 1.1. — *Supposons $g = 2$. Une forme modulaire p-adique cuspidale ordinaire de poids $\kappa = (k_1, k_2)$ avec $k_1 \geq k_2 \geq 4$ est classique.*

Remarque 1.1. — Le théorème et son corollaire permettent donc de décrire les points classiques de variétés de Hecke construites à l'aide des formes modulaires p-adiques (cette construction n'existe que dans le cas ordinaire à l'heure actuelle, voir [**Hi02**], thm. 1.1, [**Pi**], part. 8). Dans [**Urb**], Urban construit des variétés de Hecke pour les groupes unitaires et symplectiques en utilisant une méthode cohomologique. Il démontre un théorème de classicité général ([**Urb**], prop. 4.3.10). On ne sait pas démontrer, à notre connaissance, qu'une forme surconvergente propre F définit un point de la variété de Hecke construite par Urban. Si on savait le faire, on obtiendrait alors, sous les hypothèses du théorème 1.2, l'existence d'une forme classique propre G ayant le même système de valeurs propres que F. Ce résultat serait cependant plus faible que le notre car il n'y a pas de "multiplicité un" classique (et donc *a fortiori* surconvergente) pour le groupe GSp_4.

Indiquons à présent comment s'organise la démonstration. L'idée de départ, due à Buzzard, est la suivante : pour toute forme surconvergente F propre pour U_p, pour une valeur propre non nulle a_p, on voit la relation :

$$a_p^{-1} U_p F = F$$

comme une *équation fonctionnelle* reliant la valeur de F en un point $x \in X_{rig}$ et sa valeur aux points images de x par la correspondance U_p. Cette équation fonctionnelle permet d'étendre le domaine sur lequel est défini la forme F. Pour cela, on est conduit à analyser la dynamique de l'opérateur de Hecke U_p.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude générale de cette dynamique, en genre quelconque, pour la correspondance U_p et pour les autres correspondances en p. On montre que, sous l'itération des correspondances de Hecke en p, les points de X_{rig} s'accumulent autour des tubes ordinaires. On met également en évidence que l'obstruction au prolongement analytique est due à la présence de variétés abéliennes dont le groupe de Barsotti-Tate associé n'est pas simple. En genre 1, le phénomène était bien connu : le prolongement analytique de Buzzard s'arrête sur la composante ordinaire étale. Il faut alors, selon Kassaei, construire des séries approximant le prolongement souhaité et convergeant sous les hypothèses sur le poids et la pente mentionnées plus haut. En poids 1, les séries de Kassaei ne convergent pas, pour obtenir un énoncé de classicité, il faut disposer d'une forme compagnon.

Dans la seconde partie de ce travail, on étudie précisément le cas du genre 2. On analyse dans un premier temps, à l'aide de la théorie du modèle local de DeJong [**dJ**], la fibre spéciale de X. On donne en particulier une interprétation modulaire de la stratification de Kottwitz-Rapoport. On réalise ensuite, à l'aide des résultats de la première partie, et sous des hypothèses reliant le poids et la pente, le prolongement analytique sur un ouvert de X_{rig}, associé à un ouvert formel de fermé complémentaire de codimension 2. On montre ensuite que toute section définie sur cet ouvert se prolonge automatiquement à X_{rig} tout entier. On conclut enfin par le principe de Koecher et GAGA.

Dans un prochain travail, nous étudierons les cas de petit poids, lorsqu'on dispose d'une forme compagnon.

1.0.0.1. Notations et conventions. — On fixe un nombre premier p et un entier N premier à p. On choisit un corps K, extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, d'uniformisante π_K, de corps résiduel $\mathbb{F}$. On fixe une clôture algèbrique $\bar{K}$ de K. La valuation de $\bar{K}$ est notée v et est normalisée par $v(p) = 1$.
Dans toute la suite, on considérera des structures de niveau N sur les espaces de modules, elles permettent de travailler avec des schémas plutôt qu'avec des champs. On les omettra cependant le plus souvent des notations car leur destin ne présente aucun mystère pour les questions que nous considérerons.
Nous utilisons la géométrie rigide à la Tate.
Si W et V sont deux ensembles, nous notons $W \subset V$ si W est un sous-ensemble de V, éventuellement égal à V.
Nous posons enfin $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$.

1.0.0.2. Remerciements. — Mes remerciements chaleureux s'adressent à l'ensemble des participants au groupe de travail sur le prolongement analytique entre les universités Paris 13, Nancy 1 et King's College. Je pense tout spécialement aux organisateurs J. Tilouine, A. Genestier et P. Kassaei, ainsi qu' à L. Fargues, F. Mokrane et B. Stroh. C'est grâce à eux que ce travail a pu aboutir. Je tiens aussi à remercier les rapporteurs, leurs très nombreux commentaires ont permis d'améliorer grandement le manuscrit.

PARTIE I
DYNAMIQUE DES OPÉRATEURS DE HECKE EN NIVEAU PARAHORIQUE

Soit $X_0(p) \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le schéma de modules des courbes elliptiques E munies d'un sous-groupe H d'ordre p et d'une structure principale de niveau N. Soit $X_0(p)_{rig}$ la fibre générique de la complétion formelle de $X_0(p)$ le long de sa fibre spéciale. Pour toute extension F de K et $x \in X(\mathcal{O}_F)$, le groupe $H(x)$ est isomorphe à un schéma en groupes de Oort-Tate $G_{a,b}$, de schéma sous-jacent $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_F[X]/(X^p - aX)$ (voir [**O-T**], thm. 2). Le rationnel $v(a) \in [0,1]$ dépend uniquement de $H(x)$ et est noté $\deg(x)$. Ceci permet de définir une application :

$$\deg : X_0(p)_{rig} \to [0,1]$$

On dispose d'une correspondance de Hecke U_p agissant sur $X_0(p)_{rig}$. Dans [**Buz**], Buzzard étudie de façon précise la relation qui existe entre $\deg(x)$ et $\deg(y)$ pour $y \in U_p(\{x\})$. Pour cela, il utilise la théorie du sous-groupe canonique de Lubin-Katz ([**Ka**], part 3). Il démontre en particulier l'énoncé suivant, de contraction vers le tube ordinaire-multiplicatif, crucial pour le prolongement analytique des formes modulaires surconvergentes :

***Proposition 1.1* ([Buz], lem. 4.2).** — *Soit $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda \leq \nu < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$U_p^N\Big(\deg^{-1}\left([\lambda,1]\right)\Big) \subset \deg^{-1}\left([\nu,1]\right)$$

On remarque que cet énoncé est faux lorsque $\lambda = 0$.

Dans cette partie, nous étudions la généralité d'un tel énoncé sur les variétés de Siegel munies d'une structure de niveau parahorique en p et obtenons un analogue de la proposition précédente pour les variétés de Siegel de niveau Iwahorique en p (voir le théorème 3.1). Pour cela, nous utilisons une fonction degré définie sur les schémas en groupes finis et plats. Cette fonction évaluée sur le groupe de Oort-Tate $G_{a,b}$ vaut $v(a)$. La fonction degré des schémas en groupes apparaît dans les travaux d'Illusie, Messing, Tate, Raynaud dans les année 70, puis très récemment et de façon cruciale dans les travaux de Fargues [**Far**] qui nous ont beaucoup influencés.

2. Etude des niveaux parahoriques

2.1. Définitions. — Soit g un entier strictement positif, r un entier, $1 \leq r \leq g$, et $X(r)$ le schéma de modules sur Spec $\mathcal{O}_K$ dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de quadruplets $x = (\mathcal{A}, \lambda, \psi_{\mathrm{N}}, H)$ formés de :
- Un schéma abélien $\mathcal{A}_{/R}$ de dimension g.
- Une polarisation principale λ.
- Une structure principale ψ_{N} de niveau N.
- Un sous-groupe totalement isotrope $H \subset \mathcal{A}[p]$ de rang p^r.

Soit $C(r)$ le schéma de modules sur Spec K dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de couples (x, L) où $x = (\mathcal{A}, \lambda, \psi_{\mathrm{N}}, H) \in X(R)$ et :
- Lorsque $r = g$, $L \subset \mathcal{A}[p]$ est un sous-groupe lagrangien (c'est à dire totalement isotrope maximal) tel que $H \oplus L = \mathcal{A}[p]$.
- Lorsque $1 \leq r \leq g-1$, $L \subset \mathcal{A}[p^2]$ est un sous-groupe totalement isotrope maximal tel que $L[p] \oplus H = \mathcal{A}[p]$ et $pL \oplus H^{\perp} = \mathcal{A}[p]$.

Le schéma $C(r)$ est muni de deux projections vers $X(r)_K$. La projection p_1 est l'oubli du groupe L. La projection p_2 est définie comme suit au niveau des R-points : à la donnée $(\mathcal{A}, \lambda, \psi_{\mathrm{N}}, H)$ on associe le schéma abélien $\mathcal{A}/L$ muni de la polarisation "descendue" λ^p si $r = g$ ou λ^{p^2} si $1 \leq r \leq g-1$, de la structure de niveau N obtenue en composant la structure de niveau ψ_{N} sur $\mathcal{A}$ avec la projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/L$ et du groupe $\mathrm{Im}(H \to \mathcal{A}/L)$. Les projections p_1 et p_2 sont étales et finies.

Notons $\mathfrak{X}(r)$ le schéma formel sur Spf $\mathcal{O}_K$ obtenu par complétion formelle de $X(r)$ le long de sa fibre spéciale. Soit $X(r)_{rig}$ l'espace rigide analytique qui est la fibre générique de $\mathfrak{X}(r)$.
Soit $X(r)_{an}$ l'analytifié de $X(r)$ et $C(r)_{an}$ l'analytifié de $C(r)$. Rappelons que $X(r)_{rig}$ est un ouvert de $X(r)_{an}$. On note $C(r)_{rig}$ l'ouvert rigide de $C(r)_{an}$ obtenu par produit fibré avec $X(r)_{rig}$ via la projection $p_1 : C(r)_{an} \to X(r)_{an}$. C'est le lieu des schémas abéliens ayant bonne réduction. On dispose alors de deux projections $p_1, p_2 : C(r)_{rig} \to X(r)_{rig}$.

Notons $\mathcal{P}\big(X(r)_{rig}\big)$ l'ensemble des parties de $X(r)_{rig}$. On définit alors un opérateur de Hecke ensembliste

$$\begin{array}{rcl} U_r : \mathcal{P}\big(X(r)_{rig}\big) & \to & \mathcal{P}\big(X(r)_{rig}\big) \\ S & \mapsto & p_2 p_1^{-1}(S) \end{array}$$

Cette application envoie les ouverts de Zariski sur les ouverts de Zariski, les ouverts rigides-analytiques sur les ouverts rigides-analytiques, les ensembles finis sur les ensembles finis.

2.2. Paramétrisation via la fonction degré. —

2.2.1. Rappels sur la fonction degré des schémas en groupes finis et plats. — On rappelle la définition et les propriétés de la fonction degré des schémas en groupes finis et plats. L'article [**Far**] de Fargues constitue une excellente référence.

Soit S un $\mathbb{Z}_p$-schéma plat et connexe et G un S-schéma en groupes fini et plat sur S, commutatif, de rang une puissance de p. La hauteur de G est l'entier $\log_p \mathrm{rg}\, G$, on le note $\mathrm{ht}\ G$. On désigne par ω_G le faisceau conormal associé à la section unité de G.

Définition 2.1 **([Far], déf. 3)**. — *On note* $\delta_G = \mathrm{Fitt}_0\, \omega_G$ *l'idéal de Fitting de* ω_G*. C'est un idéal inversible de* $\mathscr{O}_S$*.*

Supposons que S soit le spectre d'un anneau V de valuation pour une valuation $v : V \to \mathbb{R} \cup +\infty$ étendant celle de $\mathbb{Z}_p$ ($v(p) = 1$).

Définition 2.2 **([Far], déf. 4)**. — *On note* $\deg G = v(\delta_G)$.

Proposition 2.1 **([Far], lem. 4)**. — *Soit* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *une suite exacte de groupes finis et plats sur* $\mathrm{Spec}\ V$*. On a*

$$\deg G = \deg G' + \deg G''$$

Notons $G^\vee$ *le dual de* G*, on a :*

$$\deg G + \deg G^\vee = \mathrm{ht}\ G$$

Exemple 1. — Un schéma en groupes G est étale si et seulement si $\deg G = 0$, il est multiplicatif si et seulement si $\deg G = \mathrm{ht}\ G$.

Exemple 2. — Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une isogénie de degré une puissance de p entre schémas abéliens sur $\mathrm{Spec}\ V = S$. Soit G son noyau. Soit $\omega^1_{\mathcal{A}/S}$ et $\omega^1_{\mathcal{B}/S}$ les faisceaux conormaux de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et $f^\star : \omega^1_{\mathcal{B}/S} \to \omega^1_{\mathcal{A}/S}$ l'application induite par f. On a alors $\deg G = v(\det f^\star)$. En particulier, si $\mathcal{A}$ est un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}\ V$ de dimension g, on a $\deg \mathcal{A}[p^n] = ng$.

Exemple 3. — Supposons que $V = \bar{\mathbb{Z}}_p$. L'application degré induit alors un bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes finis et plats de rang p sur S et $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. L'application inverse associe à $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ le schéma en groupes de Oort-Tate $G_{a,b}$, de schéma sous-jacent

$$\mathrm{Spec}\ V[X]/(X^p - aX)$$

où $a \in V$ est tel que $v(a) = r$ ([**O-T**], theo. 2).

La proposition qui suit est cruciale :

Proposition 2.2 **([Far], prop 4)**. — *Soit* G *et* G' *deux schémas en groupes finis et plats sur* S *et soit* $f : G \to G'$ *un morphisme de schémas en groupes qui est un isomorphisme génériquement.*
On a $\deg G \leq \deg G'$ *et l'égalité a lieu si et seulement si* f *est un isomorphisme.*

2.2.2. La fonction deg. — Soit $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/H$ l'isogénie universelle au dessus de $X(r)$. Notons $\omega_{\mathcal{A}} = \det e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}}$ et $\omega_{\mathcal{A}/H} = \det e'^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/H}$ les déterminants des faisceaux conormaux associés à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/H$ en leurs sections unités e et e'. Formons le faisceau inversible $\mathcal{L} = \omega^{-1}_{\mathcal{A}/H} \otimes \omega_{\mathcal{A}}$. Le morphisme de faisceau $\pi^\star : \omega_{\mathcal{A}/H} \to \omega_{\mathcal{A}}$ définit une section $\delta \in \mathrm{H}^0(X(r), \mathcal{L})$.
Soit F une extension finie de K et x un F-point de $X(r)_{rig}$, provenant d'un point $\tilde{x} \in X(r)(\mathcal{O}_F)$. Soit $H(x)$ (resp. $H(\tilde{x})$) la fibre du groupe H au point x (resp. $\tilde{x}$). Le groupe $H(\tilde{x})$ est aussi l'adhérence schématique de $H(x)$ dans $\mathcal{A}(\tilde{x})$. On notera fréquemment deg $H(x)$ au lieu de deg $H(\tilde{x})$. On a par définition $v(\delta(x)) = \deg\ H(x)$. Définissons la fonction :

$$\begin{aligned} \deg : X(r)_{rig} &\to [0, r] \\ x &\mapsto \deg\ H(x) \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in [0, r]$, soit $X(r)_{\deg \geq \lambda} = \{x \in X(r)_{rig},\ \deg\ H(x) \geq \lambda\}$. C'est un ouvert rigide analytique de X_{rig}, il est quasi-compact lorsque λ est rationnel.

2.3. La dynamique de U_r. —

Proposition 2.3. — *Pour tout $\lambda \in [0, r]$, $U_r\big(X(r)_{\deg \geq \lambda}\big) \subset X(r)_{\deg \geq \lambda}$.*

Démonstration. Soit F une extension finie de K et $x = (\mathcal{A}, H) \in X(r)\big(\mathcal{O}_F\big)$. Soit $y \in U_r(\{x\})$. Quitte à remplacer F par une extension finie, il existe un lagrangien $L \subset \mathcal{A}[p]$ lorsque $r = g$, ou bien un lagrangien $L \subset \mathcal{A}[p^2]$ lorsque $1 \leq r \leq g - 1$, tel que $y = \big(\mathcal{A}/L, \mathrm{Im}(H \to \mathcal{A}/L)\big)$. Posons $H(x) = H$ et $H(y) = \mathrm{Im}(H \to \mathcal{A}/L)$ (l'image est prise dans la catégorie des groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_F$). La projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/L$ induit une application entre groupes finis et plats sur Spec $\mathcal{O}_F$, $H(x) \to H(y)$ qui est un isomorphisme en fibre générique. Il résulte de la proposition 2.2 que $\deg\ H(y) \geq \deg\ H(x)$. □

Proposition 2.4. — *Soit F une extension finie de K et $x = (\mathcal{A}, H) \in X(r)\big(\mathcal{O}_F\big)$. Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. S'il existe $y \in U_r^N(\{x\})$ tel que $\deg(x) = \deg(y)$ alors :*

1. *H est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1.*
2. *Il existe une extension finie F' de F et un Barsotti-Tate tronqué d'échelon N et de hauteur r, $G_N \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}[p^N]$ défini sur $\mathcal{O}_{F'}$, totalement isotrope, d'orthogonal dans $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}[p^N]$ noté $G_N^\perp$, tel que les application naturelles*
$$G_N \times H^\perp_{\mathcal{O}_{F'}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}[p^N] \text{ et } (G_N)^\perp \times H_{\mathcal{O}_{F'}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}[p^N]$$
soient des immersions fermées.

Démonstration. Pour $0 \leq i \leq N$, il existe des points $x_i \in X(r)_{rig}$, tels que $x_0 = x$, $x_{i+1} \in U_r(\{x_i\})$ lorsque $1 \leq i \leq N - 1$ et $x_N = y$. Quitte à étendre F, on peut supposer $x_i \in X(r)(\mathcal{O}_F)$. Il existe une suite de groupes finis et plats $L_i \to$ Spec $\mathcal{O}_F$ tels que $x_i = \big(\mathcal{A}/L_i, \mathrm{Im}(H \to \mathcal{A}/L_i)\big)$. Par définition, on a alors :

1. Pour $0 \leq i \leq N$, $L_i \subset \mathcal{A}[p^i]$ est totalement isotrope maximal lorsque $r = g$ ou $L_i \subset \mathcal{A}[p^{2i}]$ est totalement isotrope maximal lorsque $1 \leq r \leq g - 1$.
2. $L_{i-1} \subset L_i$.
3. Lorsque $1 \leq r \leq g - 1$, $p^i L_i \subset \mathcal{A}[p^i]$, $L_i[p^i] \subset \mathcal{A}[p^i]$ et $(p^i L_i)^\perp = L_i[p^i]$.
4. Lorsque $r = g$, $L_i(\bar{F}) \simeq \big(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\big)^r$.
5. Lorsque $1 \leq r \leq g - 1$, $p^i L_i(\bar{F}) \simeq \big(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\big)^r$, $L_i[p^i](\bar{F}) \simeq \big(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\big)^{2g-r}$.
6. Pour tout $0 \leq i \leq N$, $H(\bar{F}) \cap L_i(\bar{F}) = \{0\}$.
7. Lorsque $1 \leq r \leq g - 1$, on a $H(\bar{F}) \cap L_i[p^i](\bar{F}) = \{0\}$, $H^\perp(\bar{F}) \cap p^i L_i(\bar{F}) = \{0\}$.

En appliquant la proposition 2.2, on trouve que $\deg(x) = \deg(x_i)$ pour $0 \leq i \leq N$, et que l'application

$$H \to \mathrm{Im}\big(H \to \mathcal{A}/L_i\big)$$

est un isomorphisme sur Spec $\mathcal{O}_F$. Posons $L_i' = L_i[p^i]$ pour alléger les notations. *A fortiori*, l'application $H \to \mathrm{Im}\big(H \to \mathcal{A}/L_i'\big)$ est également un isomorphisme pour tout i. Le morphisme

$$H \times L_i'/L_{i-1}' \to (\mathcal{A}/L_{i-1}')[p]$$

est, par définition des L_i, un isomorphisme génériquement et donc c'est un isomorphisme de schémas en groupes sur Spec $\mathcal{O}_F$.

Supposons $N = 1$ et posons $G_1^\perp = L_1'$. Il résulte de l'isomorphisme précédent que H et $G_1^\perp$ sont des Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1 comme facteurs directs de $\mathcal{A}[p]$. Ceci achève de démontrer la proposition lorsque $N = 1$.

Supposons à présent $N \geq 2$. On déduit de la proposition 2.1 la formule

$$\begin{aligned} \deg\ H &= \big(\deg\ (\mathcal{A}/L_{i-1}')[p]\big) - \big(\deg\ L_i'\big) + \big(\deg\ L_{i-1}'\big) \\ &= g - \deg\ L_i' + \deg\ L_{i-1}' \end{aligned}$$

Posons alors, pour $1 \leq i \leq N$, $G_i = p^i L_i$ et par orthogonalité $G_i^\perp = L_i[p^i] = L_i'$. Considérons ensuite, pour $0 \leq j \leq i \leq N$, le complexe :

$$0 \to G_j^\perp \to G_i^\perp \xrightarrow{p^j} G_{i-j}^\perp \to 0$$

C'est une suite exacte au niveau de la fibre générique, mais la formule précédente donne aussitôt $\deg\ G_i^\perp = \deg\ G_j^\perp + \deg\ G_{i-j}^\perp$ et donc cette suite est une suite exacte de groupes finis et plats (d'après les propositions 2.1 et 2.2). Il en résulte que $G_N^\perp$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon N. On raisonne de même avec G_N. Il est clair que les applications $H \times G_N^\perp \to \mathcal{A}$ et $H^\perp \times G_N \to \mathcal{A}$ sont des immersions fermées. □

Corollaire 2.1. — *Soit F une extension finie de K et $x = (\mathcal{A}, H) \in X(r)(\mathcal{O}_F)$. Supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $y \in U_r^N(\{x\})$ tel que $\deg(y) = \deg(x)$. Il existe alors un groupe de Barsotti-Tate $G_\infty \to$ Spec $\mathcal{O}_{\bar{F}}$ de hauteur r et une filtration*

$$G_\infty \subset G_\infty^\perp \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\bar{F}}}[p^\infty]$$

De plus, les applications $G_\infty^\perp \times H \to \mathcal{A}[p^\infty]$ et $G_\infty \times H^\perp \to \mathcal{A}[p^\infty]$ sont des immersions fermées.

Démonstration. On déduit de la propriété de Mittag-Leffler l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X_{rig} telle que $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in U_r(\{x_n\})$ et $\deg\ H(x_n) = \deg\ H(x_{n+1})$. On peut alors appliquer la proposition 2.4. □

Rappelons le lemme classique :

Lemme 2.1. — *Soit G un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 défini sur l'anneau des entiers d'une extension finie F de K. Le degré* deg G *est un entier.*

Démonstration. Notons $S_0 =$ Spec $\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ et G_0 le changement de base de G à S_0. Comme G est annulé par p, l'inclusion $G_0 \hookrightarrow G$ induit un isomorphisme des faisceaux conormaux $\omega_G \tilde{\to} \omega_{G_0}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer que ω_{G_0} est un module libre sur S_0. Soit $\mathrm{F} : G_0 \to G_0^{(p)}$ le morphisme de Frobenius et $\mathrm{V} : G_0^{(p)} \to G_0$ le morphisme de Verschiebung. Le groupe Ker F est fini et plat. En effet, comme G_0 est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, le morphisme $\mathrm{V} : G_0^{(p)} \to$ Ker F est surjectif. On peut appliquer le critère de platitude par fibres ([**EGA**], IV cor. 11.3.11) pour démontrer que le morphisme fini Ker F $\to S_0$ est plat. D'après [**Me**], cor. 3.3.7 a), $\omega_{G_0} = \omega_{\mathrm{Ker\ F}}$. On applique alors la proposition 2.1.2 de [**Me**]. □

Corollaire 2.2. — *Si $x \in X(r)_{rig}$ et* deg $H(x)$ *n'est pas un entier, alors pour tout $y \in U_r(x)$,* deg $H(y) >$ deg $H(x)$*.*

Démonstration. S'il existe y tel que deg $H(y) =$ deg $H(x)$, H est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1. On peut alors appliquer le lemme précédent. □

On obtient alors un raffinement intéressant de la proposition 2.3 :

Proposition 2.5. — *Soit $n \in \mathbb{N} \cap [0, g]$. Pour tout $\eta, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \eta \leq \nu < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$U_r^N\big(X(r)_{\deg \geq n+\eta}\big) \subset X(r)_{\deg \geq n+\nu}$$

Démonstration. Considérons la section $\delta_{C(r)} = p_2^\star \delta.(p_1^\star \delta)^{-1} \in \mathrm{H}^0(C(r)_{rig}, p_2^\star \mathcal{L} \otimes p_1^\star \mathcal{L}^{-1})$. D'après le corollaire 2.2, on a $v\big(\delta_{C(r)}(x)\big) > 0$ si $x \in C(r)_{rig}$ est tel que deg $H\big(p_1(x)\big)$ n'est pas un entier. Pour démontrer le résultat, on peut toujours supposer $\eta, \nu \in \mathbb{Q}$. L'ouvert $U = \deg^{-1}\big([n+\eta,\ n+\nu]\big) = \{x \in X(r)_{rig}, \deg\ H(x) \in [n+\eta,\ n+\nu]\}$ est quasi-compact. Le produit fibré $U \times_{X_{rig}, p_1} C(r)_{rig} = C(r)_U$ est aussi quasi-compact. La fonction $v(\delta_{C(r)})$ atteint son minimum ϵ sur $C(r)_U$ d'après le principe du maximum et donc $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in U$ et $y \in U_r(\{x\})$, deg $H(y) \geq$ deg $H(x) + \epsilon$. Il en résulte que pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$U_r^M\big(X(r)_{\deg \geq n+\eta}\big) \subset X(r)_{\deg \geq \inf\{n+\nu, n+M\epsilon+\eta\}}$$

d'où le résultat. □

3. Passage au niveau Iwahorique

Soit X le schéma de modules sur Spec $\mathcal{O}_K$ dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de quadruplets formés de :

– Un schéma abélien $\mathcal{A}_{/R}$ de dimension g.
– Une polarisation principale λ.
– Une structure principale de niveau N.
– Un drapeau complet $H_1 \subset ... \subset H_g \subset \mathcal{A}[p]$ où H_i est un sous-groupe totalement isotrope de rang p^i.

Voici l'analogue de la correspondance $C(r)$ du numéro 2. On la note encore $C(r)$ en espérant que cela ne prêtera pas à confusion. C'est le schéma de modules sur Spec K dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de quintuplets formés de :

– Un schéma abélien $\mathcal{A}_{/R}$ de dimension g.
– Une polarisation principale λ.
– Une structure principale de niveau N.
– Un drapeau complet $H_1 \subset ... \subset H_g \subset \mathcal{A}[p]$ où H_i est un sous-groupe totalement isotrope de rang p^i.
– Lorsque $r = g$, un sous-groupe lagrangien (c'est à dire totalement isotrope maximal) $L \subset \mathcal{A}[p]$ tel que $H_g \oplus L = \mathcal{A}[p]$.
– Lorsque $1 \leq r \leq g-1$, un sous-groupe totalement isotrope maximal $L \subset \mathcal{A}[p^2]$ tel que $L[p] \oplus H_r = \mathcal{A}[p]$ et $pL \oplus H_r^\perp = \mathcal{A}[p]$.

Le schéma $C(r)$ est muni de deux projections vers X_K. La projection p_1 est l'oubli du groupe L.

Lorsque $r = g$, la projection p_2 est définie de la façon suivante au niveau des R-points : à la donnée $(\mathcal{A}, \{H_i\}, L)$ on associe $\big(\mathcal{A}/L, \mathrm{Im}(\{H_i\} \to \mathcal{A}/L)\big)$. L'image d'un drapeau complet reste un drapeau complet.

Lorsque $1 \leq r \leq g-1$, la projection p_2 associe à la donnée $(\mathcal{A}, \{H_i\}, L)$ les données de :

– Le schéma abélien principalement polarisé $\mathcal{A}/L$.
– Pour $1 \leq i \leq r$, le groupe $\mathrm{Im}(H_i \to \mathcal{A}/L)$.

– Pour $r+1 \leq i \leq g$, le groupe $\mathrm{Im}\big(H_i + p^{-1}(H_i \cap L[p]) \to \mathcal{A}/L\big)$.
De façon concrète, considérons le groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g}$ muni de la forme symplectique standard de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

pour S la matrice antidiagonale de coefficients non nuls égaux à 1. Il existe, localement pour la topologie étale, des isomorphismes symplectiques

$$\psi_1 : (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g} \simeq \mathcal{A}[p^2] \quad \text{et} \quad \psi_2 : (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g} \simeq \mathcal{A}/L[p^2]$$

tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}[p^2] \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{A}/L[p^2] \\ (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g} \arrow[u, "\psi_1"] \arrow[r, "M"] & (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g} \arrow[u, "\psi_2"'] \end{tikzcd}$$

avec M la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 \\ 0 & p\ 1_{g-r} & 0 \\ 0 & 0 & p^2\ 1_r \end{pmatrix}$$

et tels que les drapeaux $H_1 \subset ... \subset H_g \subset \mathcal{A}[p]$ et le drapeau image dans $\mathcal{A}[p]/L$ correspondent au drapeau standard

$$p < e_1 > \subset p < e_1, e_2 > \subset ... \subset \ p < e_1, ..., e_g >$$

de $p(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{2g}$.

Les projections p_1 et p_2 sont étales et surjectives.

Notons $\mathfrak{X}$ le schéma formel sur Spf $\mathcal{O}_K$ obtenu par complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale. Soit X_{rig} l'espace rigide analytique qui est la fibre générique de $\mathfrak{X}$. Soit $C(r)_{an}$ l'analytifié de $C(r)$. On note comme précédemment $C(r)_{rig}$ l'ouvert rigide de $C(r)_{an}$ des schémas abéliens ayant bonne réduction. On dispose alors de deux projections $p_1, p_2 : C(r)_{rig} \to X_{rig}$.

Notons $\mathcal{P}\big(X_{rig}\big)$ l'ensemble des parties de X_{rig}. On définit alors un opérateur de Hecke ensembliste

$$\begin{aligned} U_r : \mathcal{P}\big(X_{rig}\big) &\to \mathcal{P}\big(X_{rig}\big) \\ S &\mapsto p_2 p_1^{-1}(S) \end{aligned}$$

Cette application envoie les ouverts Zariskiens sur les ouverts Zariskiens, les ouverts rigides-analytiques sur les ouverts rigides-analytiques, les ensembles finis sur les ensembles finis.

Soit $\pi_r : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/H_r$ la r-ième isogénie universelle au dessus de X. Notons $\omega_{\mathcal{A}}$ et $\omega_{\mathcal{A}/H_r}$ les déterminants des faisceaux conormaux associés à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/H_r$ et formons le faisceau inversible $\mathcal{L}_r = \omega_{\mathcal{A}/H_r}^{-1} \otimes \omega_{\mathcal{A}}$. Le morphisme de faisceau $\pi_r^\star : \omega_{\mathcal{A}/H_r} \to \omega_{\mathcal{A}}$ définit une section $\delta_r \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}_r)$.
Pour tout point $x \in X_{rig}$, on a $v(\delta_r(x)) = \deg\ H_r(x)$. On peut donc définir une fonction :

$$\begin{aligned} \deg : X_{rig} &\to \prod_{r=1}^{g} [0, r] \\ x &\mapsto (\deg\ H_r(x))_{1 \leq r \leq g} \end{aligned}$$

On peut alors retraduire les résultats précédents :

Théorème 3.1. — *Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq r \leq g$, F une extension finie de K et $x = (\mathcal{A}, \{H_i\}) \in X(\mathcal{O}_F)$.*

1. *Pour tout $y \in U_r(\{x\})$ et tout $0 \leq j \leq i \leq r$, on a* $\deg\ H_i/H_j(y) \geq \deg\ H_i/H_j(x)$.
2. *Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. S'il existe $y \in U_r^N(\{x\})$ tel que* $\deg\ H_r(y) = \deg\ H_r(x)$ *alors $H_r(x) = H_r$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 et il existe une extension finie F' de F, un Barsotti-Tate tronqué d'ordre N et de hauteur r, $G_N \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}$ défini sur $\mathcal{O}_{F'}$, totalement isotrope, d'orthogonal dans $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'_F}[p^N]$ noté $(G_N)^\perp$ et des immersions fermées*
$$G_N \times (H_r^\perp)_{\mathcal{O}_{F'}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}} \quad et \quad (G_N)^\perp \times (H_r)_{\mathcal{O}_{F'}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{F'}}$$
En particulier, $\deg\ H_r(x)$ *est un entier.*
3. *Si pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $y \in U_r^N(\{x\})$ tel que* $\deg\ H_r(y) = \deg\ H_r(x)$, *il existe alors un Barsotti-Tate $G_\infty \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{F}}$ de hauteur r et une filtration*
$$G_\infty \subset G_\infty^\perp \subset \mathcal{A}[p^\infty]_{\mathcal{O}_{\bar{F}}}$$
4. *Soit $n \in [0, r] \cap \mathbb{N}$ et $\eta, \nu \in \mathbb{R}$, $0 < \eta \leq \nu < 1$. Posons $X_{\deg_r \geq n+\eta} = \{x \in X_{rig}, \deg H_r(x) \geq n + \eta\}$ et de même $X_{\deg_r \geq n+\nu} = \{x \in X_{rig}, \deg H_r(x) \geq n + \nu\}$. Alors il existe un entier N tel que*
$$U_r^N\left(X_{\deg_r \geq n+\eta}\right) \subset X_{\deg_r \geq n+\nu}$$
5. *Si pour tout $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq g$, il existe $y \in U_r^1(\{x\})$ tel que* $\deg\ H_r(y) = \deg\ H_r(x)$ *alors le schéma abélien $\mathcal{A}$ est ordinaire.*

Démonstration. Lorsque $0 \leq j \leq i \leq r$, on a des isomorphismes génériques $H_i/H_j(x) \to H_i/H_j(y)$, on a donc $\deg\ H_i/H_j(y) \geq \deg\ H_i/H_j(x)$. Les points 2,3,4 sont connus par les résultats de la partie 2. Le dernier point résulte de la remarque suivante : le schéma abélien $\mathcal{A}$ est ordinaire si et seulement si $\deg\ H_i \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq g$. □

L'espace X_{rig} possède 2^g composantes ordinaires qui correspondent aux possibilités pour le groupe H_i/H_{i-1} d'être de type multiplicatif ou étale. D'un point de vue dynamique, les opérateurs de Hecke accumulent les points de X_{rig} autour des 2^g tubes ordinaires de l'espace rigide X_{rig}. La composante ordinaire multiplicative (celle où H_g est de type multiplicatif) est stable. Toutes les autres composantes sont instables.

PARTIE II
FORMES DE SIEGEL SURCONVERGENTES DE GENRE 2

Nous allons maintenant nous concentrer sur le genre 2, et appliquer les résultats de la première partie pour réaliser le prolongement analytique et démontrer le théorème 1.2 de l'introduction.

4. La géométrie

4.1. Définition de l'espace de modules. — Dorénavant, X désigne le schéma de modules sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de quadruplets formés de :

– Une surface abélienne $\mathcal{A}_{/R}$.

– Une polarisation principale λ.
– Une structure principale de niveau N.
– Un drapeau complet $H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{A}[p]$, où H_1 est un sous-groupe de rang p et H_2 est lagrangien (c'est à dire de rang p^2 et totalement isotrope pour l'accouplement défini par la polarisation et l'accouplement de Weil).

Comme dans la première partie, nous notons $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale X_0 et X_{rig} sa fibre générique qui est un espace rigide analytique quasi-compact et quasi-séparé sur Spm K. Soit sp : $X_{rig} \to X_0$ le morphisme de spécialisation. À tout sous-schéma $Y \hookrightarrow X_0$, on peut associer son tube $\mathrm{sp}^{-1}(Y) =]Y[$, qui est un ouvert de X_{rig}.

4.2. Stratifications de la fibre spéciale. —

4.2.1. Stratification sur le schéma sans niveau. — Notons $X_\varnothing \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ le schéma de modules des surfaces abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau N. On dispose d'un morphisme propre d'oubli $\pi : X \to X_\varnothing$. Notons $X_{\varnothing,0}$ la fibre spéciale de $X_\varnothing$.

Soit $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur Spec k, un corps de caractéristique p. On appelle p-rang de $\mathcal{A}$ l'entier r tel que le sous-groupe multiplicatif maximal $\mathcal{A}[p]^{mult} \subset \mathcal{A}[p]$ soit de rang p^r. L'espace $X_{\varnothing,0}$ peut être stratifié par le p-rang de la façon suivante :

$$X_{\varnothing,0} = X^{or}_{\varnothing,0} \bigcup X^{nor}_{\varnothing,0} \bigcup Z^{s}_{\varnothing,0}$$

où

– $X^{or}_{\varnothing,0}$ est l'ouvert ordinaire. C'est le lieu où le p-rang vaut 2. Il est de dimension 3.
– $X^{nor}_{\varnothing,0}$ est la strate intermédiaire où le p-rang vaut 1. Elle est de dimension 2.
– $Z^{s}_{\varnothing,0}$ est le fermé supersingulier, c'est le lieu où le p-rang est nul. Il est de dimension 1.

La proposition suivante résulte d'un calcul facile sur les modules de Dieudonné :

Proposition 4.1. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Il y a 4 classes d'isomorphismes de schémas en groupes finis de p-torsion, de rang p^2, bi-infinitésimaux sur k. Ce sont $\alpha_p \times \alpha_p$, $\alpha_{p^2} = \mathrm{Ker}(F^2 : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a)$, $\alpha_{p^2}^\vee = \mathrm{Hom}(\alpha_p^2, \mu_p)$, et α la p-torsion d'une courbe elliptique supersingulière sur k. Les groupes $\alpha_p \times \alpha_p$ et α sont isomorphes à leurs duaux de Cartier. Ces groupes sont caractérisés par les dimensions de leurs algèbres de Lie et celles de leurs duaux de Cartier :*

$$\begin{array}{lcllcl} \dim_k \mathrm{Lie}\ \alpha_p \times \alpha_p & = & 2 & \dim_k \mathrm{Lie}\ \alpha & = & 1 \\ \dim_k \mathrm{Lie}\ \alpha_{p^2} & = & 1 & \dim_k \mathrm{Lie}\ \alpha_{p^2}^\vee & = & 2 \end{array}$$

Soit $\mathcal{A}$ une surface abélienne supersingulière définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p. La proposition suivante est due à Deligne, Katsura et Oort ([**K-O**], thm. 1.1, 1.2 et lem. 1.3) :

Proposition 4.2. — *On a un isomorphisme :*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

pour n'importe quelle courbe elliptique surpersingulière $\mathcal{E}$ sur k si et seulement si $\mathrm{Ker}(F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{(p)}) \simeq \alpha_p \times \alpha_p$. *On dit alors que A est superspéciale.*

Réciproquement, $\mathcal{A}$ n'est pas superspéciale si et seulement si $\mathrm{Ker}(F) \simeq \alpha_{p^2}^\vee$. *On dit alors que $\mathcal{A}$ est supergénérale. Dans ce cas, il existe un sous-groupe H de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, d'ordre* *p, tel que*

$$\mathcal{A} \simeq (\mathcal{E} \times \mathcal{E})/H$$

On a alors une stratification du fermé supersingulier :

$$Z^s_{\varnothing,0} = X^{ss}_{\varnothing,0} \bigcup X^{sg}_{\varnothing,0}$$

où $X^{sg}_{\varnothing,0}$ est l'ouvert supergénéral de $Z^s_{\varnothing,0}$, de dimension 1, et $X^{ss}_{\varnothing,0}$ est le lieu superspécial, de dimension 0.

L'image inverse par π de cette stratification définit (avec les notations évidentes) une stratification :

$$X_0 = X_0^{or} \bigcup X_0^{nor} \bigcup X_0^{sg} \bigcup X_0^{ss}$$

On note de plus $Z_0^{nor} = X_0 \setminus X_0^{or}$ et $Z_0^s = Z_0^{nor} \setminus X_0^{nor}$.

Soit $\mathcal{A}$ une surface abélienne superspéciale sur k un corps algébriquement clos de caractéristique p. On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathcal{A}[p])$ le module de Dieudonné contravariant de $\mathcal{A}[p]$. A isomorphisme près, il est donné par : $\mathbb{D} = \oplus_{i=1}^4 k e_i$ et dans la base canonique, on a

$$F = V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $(a,b) \in \mathbb{P}^1(k)$, on note $L_{a,b} =< e_1, e_3, ae_2 + be_4 >$, c'est un sous-module de Dieudonné de $\mathbb{D}$. Notons $H_{a,b}$ le sous-groupe d'ordre p de $\mathcal{A}[p]$ tel que $\mathbb{D}(H_{a,b}) = \mathbb{D}/L_{a,b}$. L'application $(a,b) \mapsto H_{a,b}$ est un isomorphisme de $\mathbb{P}^1(k)$ vers l'ensemble des sous-groupes d'ordre p de $\mathcal{A}[p]$. Les trois proposition qui suivent sont bien connues et se vérifient immédiatement sur le module de Dieudonné.

Proposition 4.3. — *La surface abélienne $\mathcal{A}/H_{a,b}$ est superspéciale si et seulement si $(a,b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$.*

Proposition 4.4. — *Les sous-groupes d'ordre p^2 de $\mathcal{A}[p]$ sont tous isomorphes à α sauf le noyau du Frobenius qui est isomorphe à $\alpha_p \times \alpha_p$. Si $(a,b) \notin \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$,* Ker$(F)$ *est le seul sous-groupe de rang p^2 de $\mathcal{A}[p]$ contenant $H_{a,b}$. Si $(a,b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$, les sous-groupes de rang p^2 de $\mathcal{A}[p]$ contenant $H_{a,b}$ sont parametrés par $\mathbb{P}^1(k)$.*

Dans le cas supergénéral, on a :

Proposition 4.5. — *Soit $\mathcal{A}$ une surface abélienne supergénérale sur k. Alors $\mathcal{A}$ possède un unique sous-groupe de rang p et les sous-groupes de rang p^2 sont paramétrés par $\mathbb{P}^1(k)$. Il y a deux points marqués sur ce $\mathbb{P}^1(k)$ qui correspondent aux noyaux de F et de V, qui sont respectivement isomorphes à $\alpha_{p^2}^\vee$ et α_{p^2}. Tous les autres sous-groupes sont isomorphes à α.*

4.2.2. Stratification de Kottwitz-Rapoport et modèle local. — Soit $H_0 = 0 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_1^\perp = H_3 \subset H_4 = \mathcal{A}[p]$ la chaîne universelle de groupes finis et plats sur X. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq i \leq j \leq 4$, définissons la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \ell_{H_j/H_i} : X_0 & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \dim_{k(x)} \mathrm{Lie}\ (H_j/H_i)(x) \end{array}$$

La fonction ℓ_{H_j/H_i} croît par spécialisation. Pour tout 15-uplet d'entiers $n = (n_{i,j})_{0\leq i\leq j\leq 4} \in \mathbb{N}^{15}$, on définit le sous-schéma localement fermé :

$$X_0^{=n} = \{x \in X_0,\ \forall\ 0 \leq i \leq j \leq 4,\ \ell_{H_j/H_i}(x) = n_{i,j}\}$$

et la stratification :

$$X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^{15}} X_0^{=n}$$

La stratification ainsi définie se lit sur le modèle local. Nous allons maintenant la décrire.

4.2.2.1. Rappels sur le modèle local. — Soit $(M_i)_{0\leq i\leq 4} = \oplus_{j=1}^4 \mathbb{Z}e_j$ des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang 4 munis d'une base. On équipe M_0 de la forme symplectique de matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

où S est la matrice antidiagonale de coefficients non nuls égaux à 1. On définit une chaîne

$$M_\bullet : M_4 \overset{\alpha_4}{\to} M_3 \overset{\alpha_3}{\to} M_2 \overset{\alpha_2}{\to} M_1 \overset{\alpha_1}{\to} M_0$$

où α_i est l'application $e_j \mapsto e_j$ si $j \neq i$ et $e_i \mapsto pe_i$. On peut identifier les M_i à des sous-modules de M_0 au moyen des applications α_i. On a une dualité parfaite $p^{-1}J$: $M_{4-i} \times M_i \to \mathbb{Z}$.

Considérons le foncteur $\mathrm{M}_{loc} : \mathcal{O}_K - ALG \rightsquigarrow ENS$, qui à toute $\mathcal{O}_K$-algèbre R associe l'ensemble des sous-modules localement facteurs directs $L_i \subset M_i \otimes_{\mathbb{Z}} R$ tels que

$$L_{4-i}^{\perp} = L_i \quad \text{et} \quad \alpha_i(L_i) \subset L_{i-1}.$$

Ce foncteur est représentable par un schéma quasi-projectif $\mathrm{M}_{loc} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$.

Au dessus de X, notons $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}/H_i$ le quotient du schéma abélien universel $\mathcal{A}$ par le i-ème cran du drapeau universel. Considérons la chaîne constituée des premiers groupes de cohomologie de de Rham relative :

$$\mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_\bullet) : \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_4/X) \to \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_3/X) \to \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_2/X) \to \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_1/X) \to \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_0/X)$$

La polarisation de $\mathcal{A}$ induit une dualité parfaite entre $\mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_{4-i}/X)$ et $\mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_i/X)$. D'après [**dJ**], prop. 3.6, les chaînes autoduales $\mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_\bullet)$ et $(M_\bullet)_{\mathscr{O}_X}$ sont localement isomorphes pour la toplogie de Zariski. Soit

$$\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_X\big((M_\bullet)_{\mathscr{O}_X}, \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{A}_\bullet)\big)$$

On a alors la proposition :

Proposition 4.6 **([dJ], cor 4.6, [Ge], prop 1.3.1)**. — *Il existe un diagramme de morphismes lisses surjectifs de même dimension relative :*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & \mathrm{M}_{loc} \end{tikzcd}$$

Soit $x \in X$ et $y \in g\big(f^{-1}(\{x\})\big)$. Les points x et y admettent des voisinages étales isomorphes dans X et M_{loc} respectivement.

La stratification de X_0 se transporte en une stratification sur la fibre spéciale $(\mathrm{M}_{loc})_0$ du modèle local. Pour $0 \leq i \leq j \leq 4$, définissons les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \ell^{loc}_{i,j} : (\mathrm{M}_{loc})_0 & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \dim_{k(x)} \mathrm{coker}(L_j \to L_i) \end{array}$$

Si $x \in X_0$ et $y \in g(f^{-1}(\{y\}))$, on a $\ell_{H_j/H_i}(x) = \ell^{loc}_{i,j}(y)$. Pour tout 15-uplet $n = (n_{i,j}) \in \mathbb{N}^{15}$, on définit alors le sous-schéma localement fermé $(\mathrm{M}_{loc})_0^{=n} = \{x \in (\mathrm{M}_{loc})_0,\ \forall\ 0 \leq i \leq j \leq 4\ \ \ell^{loc}_{i,j}(x) = n_{i,j}\}$ et la stratification

$$(\mathrm{M}_{loc})_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^{15}} (\mathrm{M}_{loc})_0^{=n}$$

Corollaire 4.1. — *Les schémas X_0 et $(\mathrm{M}_{loc})_0$ sont localement isomorphes pour la toplogie étale avec leurs stratifications.*

Soit le point s de la fibre spéciale de M_{loc} définit par $L_2 =< e_1, e_2 >\subset M_2$, $L_1 =< e_1, e_4 >\subset M_1$, $L_0 =< e_3, e_4 >\subset M_0$. On considère l'ouvert affine U de M_{loc}, contenant le point s, où le drapeau universel est donné par les équations :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les relations R entre les paramètres sont

$$\begin{array}{rclcrcl} a_{11} & = & a_{22} & & p & = & b_{12}a_{11} \\ b_{11} & = & b_{12}a_{12} & & 0 & = & a_{21} + b_{22}a_{11} \\ b_{21} & = & a_{22} + b_{22}a_{12} & & 0 & = & b_{11} + c_{12}b_{21} \\ c_{11} & = & b_{12} + c_{12}b_{22} & & p & = & c_{22}b_{22} \\ c_{21} & = & c_{22}b_{22} & & c_{11} & = & c_{22} \end{array}$$

et donc $U = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}]/R$. Suivant [**dJ**], p 685, on pose $x = a_{11},\ y = b_{12},\ a = c_{12},\ b = a_{12}$ et $c = b_{22}$. On voit alors que U est isomorphe à

$$\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[x, y, a, b, c]/(xy - p,\ ax + by + abc)$$

Le drapeau universel, est donné (dans les bases fournies par les vecteurs colonnes) par la chaine d'applications :

$$L_4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} b & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} L_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -c & x+bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} L_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & y+ac \end{pmatrix}} L_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} L_0$$

D'après [**dJ**], p. 685, on sait de plus que tout point de M_{loc} a un voisinage isomorphe à un voisinage de U. Il suffit donc de décrire la stratification sur la fibre spéciale U_0 de U.

Pour toute strate non vide $\mathrm{M}_{loc}^{=n}$, le p-rang de la strate est l'entier $4 - \sum_{i=0}^{3} n_{i,i+1}$. Les valeurs possibles sont 0, 1 et 2, et on appelle strates supersingulières les strates de p-rang 0, strates intermédiaires les strates de p-rang 1 et strates ordinaires les strates de p-rang 2.

4.2.2.2. Description des strates ordinaires. — On a quatre strates ordinaires :

- La strate multiplicative-multiplicative, d'équation dans U_0, $x \neq 0, x + bc \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 1,\ n_{12} = 1,\ n_{23} = 0,\ n_{34} = 0$. On note $X_0^{m,m}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert où H_2 est de type multiplicatif.
- La strate étale-multiplicative, d'équation dans U_0, $y \neq 0, x + bc \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 0,\ n_{12} = 1,\ n_{23} = 0,\ n_{34} = 1$. On note $X_0^{e,m}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert où H_1 est étale et H_2/H_1 est multiplicatif.
- La strate multiplicative-étale, d'équation dans U_0, $x \neq 0, y + ac \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 1,\ n_{12} = 0,\ n_{23} = 1,\ n_{34} = 0$. On note $X_0^{m,e}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert où H_1 est multiplicatif et H_2/H_1 est étale.
- La strate étale-étale, d'équation dans U_0, $y \neq 0, y + ac \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 0,\ n_{12} = 0,\ n_{23} = 1,\ n_{34} = 1$. On note $X_0^{e,e}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert où H_2 est étale.

Toutes ces strates sont lisses et de dimension 3.

4.2.2.3. Description des strates intermédiaires. — On a quatre strates intermédiaires :

- La strate multiplicative-bi-infinitésimale, d'équation dans U_0, $x \neq 0, x + bc = y + ac = 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 1,\ n_{12} = 1,\ n_{23} = 1,\ n_{34} = 0$. On note $X_0^{m,o}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert du lieu intermédiaire où H_1 est de type multiplicatif et H_2/H_1 est de type bi-infinitésimal.
- La strate bi-infinitésimale-multiplicative, d'équation dans U_0, $y = x = 0, x+bc \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 1,\ n_{12} = 1,\ n_{23} = 0,\ n_{34} = 1$. On note $X_0^{o,m}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert du lieu intermédiaire où H_1 est bi-infinitésimale et H_2/H_1 est multiplicatif.
- La strate étale-bi-infinitésimale, d'équation dans U_0, $y \neq 0, x+bc = y+ac = 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 0,\ n_{12} = 1,\ n_{23} = 1,\ n_{34} = 1$. On note $X_0^{e,o}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert du lieu intermédiaire où H_1 est étale et H_2/H_1 est bi-infinitésimal.
- La strate bi-infinitésimale-étale, d'équation dans U_0, $x = y = 0, y + ac \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres $n_{01} = 1,\ n_{12} = 0,\ n_{23} = 1,\ n_{34} = 1$. On note $X_0^{o,e}$ la strate correspondant dans X_0. C'est l'ouvert du lieu intermédiaire où H_1 est bi-infinitésimal et H_2/H_1 est étale.

Toutes ces strates sont lisses et de dimension 2.

4.2.2.4. Description des strates supersingulières. — Le fermé supersingulier de U_0, noté U_0^s, a pour équation $x = y = x + bc = y + ac = 0$. On a donc un isomorphisme $U_0^s \simeq \mathbb{F}[a, b, c]/(ac, bc)$. Il y a cinq strates dans le fermé supersingulier :

- La strate supergénérale, annulée par le Frobenius, elle a pour équation $a = c = 0$, $b \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres : $n_{i,i+1} = 1$ si $0 \leq i \leq 3$, $n_{02} = 2$, $n_{24} = 1$. On note $X_0^{sg,F}$ la strate correspondant. C'est le lieu des schémas abéliens supergénéraux tels que $H_2 = \mathrm{Ker}(F)$.
- La strate supergénérale, annulée par le Verschiebung, elle a pour équation $b = c = 0$, $a \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres : $n_{i,i+1} = 1$ si $0 \leq i \leq 3$, $n_{02} = 1$, $n_{24} = 2$. On note $X_0^{sg,V}$ la strate correspondant. C'est le lieu des schémas abéliens supergénéraux tels que $H_2 = \mathrm{Ker}(V)$.

Les deux strates précédentes sont lisses de dimension 1.

– La grosse strate supersingulière, elle a pour équation $c = 0$ et $a, b \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres : $n_{i,i+1} = 1$ si $0 \leq i \leq 3$, $n_{02} = 1$, $n_{24} = 1$. On note $X_0^{s,\alpha}$ la strate correspondant. C'est le lieu des schémas abéliens tels que $H_2 \simeq \alpha$.

Cette strate est lisse de dimension 2. De plus le lieu superspécial de cette strate, $X_0^{ss} \cap X_0^{s,\alpha}$, est un fermé de dimension 1 d'après la proposition 4.4.

– La grosse strate superspéciale annulée par le Frobenius. Elle a pour équation $a = b = 0$, $c \neq 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres : $n_{i,i+1} = 1$ si $0 \leq i \leq 3$, $n_{02} = 2$, $n_{24} = 2$, $n_{13} = 1$. On note $X_0^{ss,F1}$ la strate correspondant. C'est le lieu des schémas abéliens superspéciaux tels que $H_2 = \mathrm{Ker}(F)$, et $H_1^{\perp}/H_1 \simeq \alpha$.

Cette strate est lisse de dimension 1.

– La petite strate superspéciale annulée par le Frobenius. Elle a pour équation $a = b = c = 0$. Elle est caractérisée par les valeurs des paramètres : $n_{i,i+1} = 1$ si $0 \leq i \leq 3$, $n_{02} = 2$, $n_{24} = 2$, $n_{13} = 2$. On note $X_0^{ss,F2}$ la strate correspondant. C'est le lieu des schémas abéliens superspéciaux tels que $H_2 = \mathrm{Ker}(F)$, et $H_1^{\perp}/H_1 \simeq \alpha_p \times \alpha_p$.

Cette strate est une union finie de points.

Pour être totalement complet, nous indiquons ici les valeurs $n_{i,j}$ des fonctions ℓ_{H_j/H_i} sur chaque strate :

strate	n_{01}	n_{12}	n_{23}	n_{34}	n_{02}	n_{13}	n_{24}	n_{03}	n_{14}
$X_0^{m,m}$	1	1	0	0	2	1	0	2	1
$X_0^{e,m}$	0	1	0	1	1	1	1	1	2
$X_0^{m,e}$	1	0	1	0	1	1	1	2	1
$X_0^{e,e}$	0	0	1	1	0	1	2	1	2
$X_0^{m,o}$	1	1	1	0	2	1	1	2	1
$X_0^{o,m}$	1	1	0	1	2	1	1	2	2
$X_0^{e,o}$	0	1	1	1	1	1	2	1	2
$X_0^{o,e}$	1	0	1	1	1	1	2	2	2
$X_0^{sg,F}$	1	1	1	1	2	2	1	2	2
$X_0^{sg,V}$	1	1	1	1	1	2	2	2	2
$X_0^{s,\alpha}$	1	1	1	1	1	2	1	2	2
$X_0^{ss,F1}$	1	1	1	1	2	1	2	2	2
$X_0^{ss,F2}$	1	1	1	1	2	2	2	2	2

On déduit de ce qui précéde et du tableau :

Proposition 4.7. — *Soit $n \in \mathbb{N}^{15}$, tel que la strate $X_0^{=n}$ soit non vide. On a la formule suivante pour l'adhérence de cette strate :*

$$\mathrm{Adh}(X_0^{=n}) = \bigcup_{n' \in \mathbb{N}^{15},\ n' \geq n} X_0^{=n'}$$

En particulier, le lieu ordinaire est dense, et les composantes irréductibles de X_0 sont les adhérences des quatre strates ordinaires et sont lisses.

Remarque 4.1. — La seconde partie de la proposition est bien connue et due à DeJong dans ce cas. La stratification que nous venons de considérer coïncide avec la stratification de Kottwitz-Rapoport étudiée dans [**N-G**] (consulter aussi [**Til**], 2.1). On obtient donc une interprétation modulaire de cette stratification et de l'adhérence d'une strate. On peut penser que cette interprétation est valable en genre g quelconque.

L'ouvert $Y_0 = X_0^{or} \bigcup X_0^{nor} \bigcup (X_0^{s,\alpha} \cap X_0^{sg})$ de X_0 jouera un rôle important dans la suite de ce travail. On déduit de la description précédente :

Proposition 4.8. — *Pour toute composante irréductible C de X_0, le complémentaire de l'ouvert $Y_0 \cap C$ de C est de codimension 2.*

4.3. Cartographie de X_{rig}. — Pour $i \in \{1,2\}$, soit

$$\pi_i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/H_i$$

les isogénies universelles au dessus de X. Comme dans la première partie, on note

$$\omega_{\mathcal{A}} = \det e^{\star}\Omega^1_{\mathcal{A}/X} \quad \text{et} \quad \omega_{\mathcal{A}/H_i} = \det e_i^{\star}\Omega^1_{(\mathcal{A}/H_i)/X}$$

les déterminants des faisceaux conormaux relatifs de $\mathcal{A} \to X$ et $\mathcal{A}/H_i \to X$ à leurs sections unités e et e_i. On dispose d'applications induites :

$$\det \pi_i^{\star} : \omega_{\mathcal{A}/H_i} \to \omega_{\mathcal{A}}$$

On peut former les faisceaux inversibles $\mathcal{L}_i = \omega_{\mathcal{A}} \otimes \omega_{\mathcal{A}/H_i}^{-1}$. Le morphisme $\det \pi_i^{\star}$ définit une section que nous notons $\delta_{H_i} \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}_i)$. On peut également considérer la section $\delta_{H_2/H_1} = \delta_{H_2}\delta_{H_1}^{-1} \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2)$.

Pour tout $x \in X_{rig}$ et $i \in \{1,2\}$, on a par définition $v\big(\delta_{H_i}(x)\big) = \deg\ H_i(x)$ et $v\big(\delta_{H_2/H_1}(x)\big) = \deg\ H_2/H_1(x)$. On a de plus la relation $\deg\ H_2/H_1(x) = \deg\ H_2(x) - \deg\ H_1(x)$.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \deg : X_{rig} & \to & [0,1] \times [0,2] \\ x & \mapsto & \Big(v\big(\delta_{H_1}(x)\big), v\big(\delta_{H_2}(x)\big)\Big) \end{array}$$

On a la relation $\deg\ H_1(x) \leq \deg\ H_2(x) \leq \deg\ H_1(x) + 1$. L' application deg a donc pour image les points rationnels de la surface fermée de $[0,1] \times [0,2]$ délimitée par le parallélogramme dont les sommets ont pour coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$. L'image réciproque de tout sous-ensemble de $[0,1] \times [0,2]$ défini par un nombre fini d'inégalités affines est un ouvert admissible de X_{rig}.

Pour $i,j \in \{e,m,o\}$, $(i,j) \neq (o,o)$, on note $]X_0^{i,j}[= \mathrm{sp}^{-1}(X_0^{i,j})$ le tube de $X_0^{i,j}$ dans X_{rig}. On note aussi $]Z_0^s[$ le tube de Z_0^s. Ces tubes sont les images inverses des quatre sommets du parallélogramme, des quatre arêtes et de l'intérieur du parallélogramme. En effet on vérifie facilement :

Proposition 4.9. — *On a :*

$$\begin{array}{rcl}
]X_0^{e,e}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_2}(x)) = 0\big\} \\
]X_0^{m,m}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_2}(x)) = 2\big\} \\
]X_0^{e,m}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) = 0,\ v(\delta_{H_2}(x)) = 1\big\} \\
]X_0^{m,e}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) = 1,\ v(\delta_{H_2}(x)) = 1\big\} \\
]X_0^{e,o}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) = 0,\ v(\delta_{H_2}(x)) \in]0,1[\big\} \\
]X_0^{o,e}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_2}(x)) = v(\delta_{H_1}(x)) \in]0,1[\big\} \\
]X_0^{o,m}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) + 1 = v(\delta_{H_2}(x)) \in]1,2[\big\} \\
]X_0^{m,o}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) = 1,\ v(\delta_{H_2}(x)) \in]1,2[\big\} \\
]Z_0^{s}[& = & \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) \in]0,1[,\ v(\delta_{H_2/H_1}(x)) \in]0,1[\big\}
\end{array}$$

La proposition suivante est cruciale. Nous renvoyons le lecteur au numéro A.3 de l'appendice pour la démonstration.

Proposition 4.10. — *Soit F une extension finie de K et G un schéma en groupe fini et plat, de p-torsion, de rang p^2 sur $\mathcal{O}_K$ et de fibre spéciale isomorphe à α. Alors :*

$$\deg G = 1$$

Comme corollaire, on trouve :

Corollaire 4.2. — *On a* $]X_0^{s,\alpha}[\subset \{x \in X_{rig},\ \deg H_2(x) = 1\}$.

Notation 4.1. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ on définit les ouverts suivant de X_{rig} :*

$$\begin{aligned}
]X_0^{e,e}[_\lambda &= \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_2}(x)) \leq \lambda\big\} \\
]X_0^{m,m}[_\lambda &= \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_2}(x)) \geq 2 - \lambda\big\} \\
]X_0^{e,m}[_\lambda &= \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) \leq \lambda,\ v(\delta_{H_2}(x)) \geq 1 - \lambda\big\} \\
]X_0^{m,e}[_\lambda &= \big\{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) \geq 1 - \lambda,\ v(\delta_{H_2}(x)) \leq 1 + \lambda\big\}
\end{aligned}$$

On renvoie à [**Ber**], sect. 1.2 pour la définition et les propriétés des voisinages stricts des tubes.

Proposition 4.11. — *Pour $i, j \in \{e, m\}$, les ouverts $\{]X_0^{i,j}[_\lambda,\ \lambda \to 0^+\}$ forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X_0^{i,j}[$ dans X_{rig}.*

Démonstration. Il résulte immédiatement des définitions que les ouverts considérés sont des voisinages stricts. Nous suivons à présent [**Ber**], prop. 1.2.2 . Soit V un voisinage strict de $]X_0^{i,j}[$, montrons que $\exists \mu_0,\ ]X_0^{i,j}[_{\mu_0}\subset V$. Supposons pour fixer les idées que $i = j = m$. Soit (W_i) un recouvrement fini de X_{rig} par des ouverts spéciaux. Soit l'ouvert $Z_{i,\mu} = \{x \in W_i, v(\delta_{H_2}(x)) < 2 - \mu\}$. Comme V est un voisinage strict, $(V \cap W_i, Z_{i,0})$ est un recouvrement admissible de W_i, et donc aussi $(V \cap W_i, Z_{i,\mu}\ \mu \to 0^+)$. Comme W_i est affinoïde, on peut extraire du précédent recouvrement un recouvrement fini, il existe donc $\mu_0 > 0$ tel que $W_i \subset \big(V \cap W_i\big) \cup Z_{i,\mu_0}$. Or $]X_0^{m,m}[_{\mu_0}\cap Z_{i,\mu_0} = \emptyset$ et donc $]X_0^{m,m}[_{\mu_0}\cap W_i \subset V$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de W_i, on peut trouver un réel $\mu_0 > 0$ qui convient pour chaque W_i et conclure. □

Notation 4.2. — *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit les ouverts*

$$X_{\lambda,\mu} = \{x \in X_{rig},\ v(\delta_{H_1}(x)) \geq \lambda,\ v(\delta_{H_2}(x)) \geq \mu\}$$

On pose

$$X_{\lambda^+,\mu} = \bigcup_{\lambda' > \lambda} X_{\lambda',\mu}$$

et on définit de façon analogue X_{λ,μ^+}, X_{λ^+,μ^+}.

Remarque 4.2. — Il y a certaines redondances dans les notations. On a par exemple $]X_0^{m,m}[_\lambda= X_{0,2-\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

4.4. La correspondance de Hecke $C(p)$. — Soit $C(p)$ le schéma de modules sur Spec K dont les R-points sont les classes d'isomorphismes de quintuplets formés de :

– Une surface abélienne $\mathcal{A}_{/R}$.
– Une polarisation principale λ.
– Une structure principale de niveau N.
– Un drapeau complet $H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{A}[p]$.
– Un sous-groupe lagrangien $H \subset A[p]$, tel que $H \cap H_2 = \{0\}$.

Le schéma $C(p)$ est muni deux projections vers X_K. La projection p_1 est l'oubli du groupe H. La projection p_2 est définie comme suit au niveau des R-points : à la donnée $(\mathcal{A},\ H_1 \subset H_2, H)$ on associe $(\mathcal{A}/H, (H_1+H)/H \subset \mathcal{A}[p]/H)$. Les projections p_1 et p_2 sont étales et surjectives.

Remarque 4.3. — Cette correspondance est la correspondance $C(g) = C(2)$ de la première partie. Comme ici la correspondance $C(1)$ n'intervient pas, nous avons préféré revenir à une notation plus traditionnelle. Ceci nous permettra de noter U_p l'opérateur de Hecke associé (et non U_2 comme dans la première partie).

On note X_{an} et C_{an} les analytifiés de X et $C(p)$. On remarque que X_{rig} est un ouvert de X_{an}. On a un morphisme $p_1 : C(p)_{an} \to X_{an}$. Par produit fibré avec X_{rig}, on définit $C(p)_{rig} \subset C(p)_{an}$, l'ouvert admissible quasi-compact de bonne réduction du schéma abélien universel. On dispose de projections induites, $p_i : C(p)_{rig} \to X_{rig}$ pour $i \in \{1,2\}$. On a une correspondance rigide-analytique :

$$\begin{tikzcd} & C(p)_{rig} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_{rig} & & X_{rig} \end{tikzcd}$$

La correspondance $C(p)$ définit un opérateur de Hecke ensembliste :

$$\begin{array}{rcl} U_p : \mathcal{P}(X_{rig}) & \to & \mathcal{P}(X_{rig}) \\ S & \mapsto & p_2.p_1^{-1}(S) \end{array}$$

Proposition 4.12. — *L'opérateur U_p envoie les parties finis dans les parties finis, les ouverts Zariskiens dans les ouverts Zariskiens, les ouverts admissibles dans les ouverts admissibles.*

Démonstration. Les projections p_1, p_2 sont finies et étales, le premier point est évident, le second résulte d'un résultat général sur les morphismes plats et de type finis entre schémas noethériens, le troisième point est une conséquence du corollaire 2 de [**Bos**].

□

4.5. Variation du degré sous l'action de l'opérateur U_p. — On va déduire des résultats de la première partie le théorème :

Théorème 4.1. — 1. *Pour tout $x \in X_{rig}$ et $y \in U_p(\{x\})$,*

$$\begin{array}{rcl} \deg\ H_2(y) & \geq & \deg\ H_2(x) \\ \deg\ H_1(y) & \geq & \deg\ H_1(x) \\ \deg\ H_2/H_1(y) & \geq & \deg\ H_2/H_1(x) \end{array}$$

et donc, pour tout $(\lambda,\mu) \in [0,1] \times [0,2]$, $U_p(X_{\lambda,\mu}) \subset X_{\lambda,\mu}$.

2. *Soit* $x \in X_{rig}$. *Si* $\deg H_2(x) \in [0,2]\backslash\{0,1,2\}$ *alors, pour tout* $y \in U_p(\{x\})$,

$$\deg H_2(y) > \deg\ H_2(x).$$

3. *Si* $x \in]X_0^{sg}[$ *et* $y \in U_p(\{x\})$, $\deg\ H_2(y) > \deg\ H_2(x)$.
4. *Pour tout* $\lambda, \mu \in [0,2]$, *avec soit* $0 < \lambda \leq \mu < 1$ *ou bien* $1 < \lambda \leq \mu < 2$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $U_p^N(X_{0,\lambda}) \subset X_{0,\mu}$.

Démonstration. Les points 1,2 et 4 sont des cas particuliers du théorème 3.1. Vérifions le point 3. Il existe une extension finie F de K telle que $x = (\mathcal{A}, H_1 \subset H_2) \in X(\mathcal{O}_F)$. D'après le théorème 3.1, si $\deg\ H_2(y) = \deg\ H_2(x)$, quitte à faire une extension de F, on a une somme directe sur $\mathcal{O}_F$, $\mathcal{A}[p] = H_2 \oplus H'$. Il y a donc plus d'une manière de plonger α_p dans la fibre spéciale de $\mathcal{A}[p]$. On déduit de la proposition 4.5 que $\mathcal{A}$ n'a pas réduction supergénérale. □

4.6. Sous-groupes canoniques. — Le schéma abélien universel $\mathcal{A}$ restreint à $]X_0^{or}[$ est équipé d'un sous-groupe canonique de rang p^2,

$$H_{can} \hookrightarrow \mathcal{A}[p]_{]X_0^{or}[}.$$

Pour tout $x \in]X_0^{or}[$, $H_{can}(x)$ est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif de $\mathcal{A}[p](x)$. De même, au dessus de $]X_0^{nor}[$, il existe un sous-groupe canonique partiel de rang p,

$$H_{can}^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{A}[p]_{]X_0^{nor}[}.$$

Pour tout $x \in]X_0^{nor}[$, $H_{can}^{(1)}(x)$ est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif de $\mathcal{A}[p](x)$.

D'après les théorèmes principaux de [**A-M**], [**A-G**], [**Far1**] et [**P-S**], le sous-groupe canonique s'étend dans des voisinages stricts de $]X_0^{or}[$ dans X_{rig} tandis que le sous-groupe canonique partiel s'étend dans un voisinage strict de $]X_0^{nor}[$ dans $]Z_0^{nor}[$. De façon précise, il existe un voisinage strict V^{or} de $]X_0^{or}[$ dans X_{rig}, tel que toute composante connexe de V^{or} rencontre $]X_0^{or}[$ et tel qu'il existe un (unique) sous-groupe lagrangien $H_{can} \subset \mathcal{A}[p]_{V^{or}}$ dont la restriction au lieu ordinaire est le sous-groupe canonique. De même, il existe un voisinage strict V^{nor} de $]X_0^{nor}[$ dans $]Z_0^{nor}[$, tel que toute composante connexe de V^{nor} rencontre $]X_0^{nor}[$ et tel qu'il existe un (unique) sous-groupe lagrangien $H_{can}^{(1)} \subset \mathcal{A}[p]_{V^{nor}}$ dont la restriction au tube $]X_0^{nor}[$ est le sous-groupe canonique partiel de rang p. Si V est un ouvert de X_{rig}, nous dirons que le sous-groupe canonique (resp. sous-groupe canonique partiel de rang p) est définit sur V si $V \subset V^{or}$ (resp. $V \subset V^{nor}$).

4.7. Action de l'opérateur U_p sur la stratification par le p-rang. —

Proposition 4.13. — *L'opérateur U_p respecte la stratification par le p-rang :*

$$\begin{aligned} U_p\big(]X_0^{or}[\big) &\subset]X_0^{or}[\\ U_p\big(]X_0^{nor}[\big) &\subset]X_0^{nor}[\\ U_p\big(]Z_0^{s}[\big) &\subset]Z_0^{s}[\end{aligned}$$

Démonstration. Deux schémas abéliens isogènes ont le même rang multiplicatif. □

Via l'application deg, cette proposition se traduit sur le parallélogramme par : les correspondances de Hecke envoient les sommets sur les sommets, les arêtes sur les arêtes et l'intérieur dans l'intérieur. On peut préciser un peu les choses (le lecteur est invité à représenter la proposition sur le parallélogramme) :

Proposition 4.14. — *On a :*

$$\begin{array}{rcl}
U_p(]X_0^{m,m}[) & \subset &]X_0^{m,m}[\\
U_p(]X_0^{e,m}[) & \subset &]X_0^{m,m} \cup X_0^{e,m}[\\
U_p(]X_0^{m,e}[) & \subset &]X_0^{m,m} \cup X_0^{m,e}[\\
U_p(]X_0^{e,e}[) & \subset &]X_0^{or}[\\
U_p(]X_0^{m,o}[) & \subset &]X_0^{m,o}[\\
U_p(]X_0^{o,m}[) & \subset &]X_0^{o,m}[\\
U_p(]X_0^{e,o}[) & \subset &]X_0^{o,m} \cup X_0^{m,o} \cup X_0^{e,o}[\\
U_p(]X_0^{o,e}[) & \subset &]X_0^{o,m} \cup X_0^{m,o} \cup X_0^{o,e}[
\end{array}$$

Nous allons interpréter la proposition 4.14 à l'aide des sous-groupes canoniques et la généraliser en remplaçant les tubes par des voisinages stricts.

4.8. Correspondances et voisinages stricts. — Commençons par donner un résultat de géométrie rigide, suivant de près [**Ber**], 1.2.8. Pour commencer plaçons nous dans la situation suivante : $P = \mathrm{Spf}\ A, P' = \mathrm{Spf}\ A'$ sont deux schémas formels affines admissibles sur $\mathcal{O}_K$, l'anneau des entiers de l'extension finie K de $\mathbb{Q}_p$. Soit P_0, P'_0 les fibres spéciales respectives, P_K, P'_K les fibres génériques. On notera sp la spécialisation. On se donne un diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d, "f"] \\
U'_0 \arrow[r] & Y'_0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & P'
\end{tikzcd}$$

où Y_0 et Y'_0 sont des fermés de P_0 et P'_0 et U_0 et U'_0 sont des ouverts de Y_0 et Y'_0. Soit $Z_0 = Y_0 \backslash U_0$ et $Z'_0 = Y'_0 \backslash U'_0$ les fermés complémentaires réduits. Soit $g_1, ..., g_r, g_{r+1}, ..., g_s$ et $g'_1, ..., g'_t, g'_{t+1}, ..., g'_u$ des éléments A et A', tels que $g_1, ..., g_r$ et $g'_1, ..., g'_t$ se réduisent sur des générateurs des idéaux $\mathscr{I}_{Y_0}$ et $\mathscr{I}_{Y'_0}$ et $g_1, ..., g_s$ et $g'_1, ..., g'_u$ se réduisent sur des générateurs de $\mathscr{I}_{Z_0}$ et $\mathscr{I}_{Z'_0}$. Soit les tubes

$$U =]U_0[= \{x \in P_K, \forall i \in [1,r] \ \ v(g_i(x)) > 0, \ \exists i \in [r+1,s] \ \ v(g_i(x)) = 0\}$$

et

$$U' =]U'_0[= \{x \in P'_K, \forall i \in [1,t] \ \ v(g_i(x)) > 0, \ \exists i \in [t+1,u] \ \ v(g'_i(x)) = 0\}$$

Posons pour tout $\lambda, \mu > 0$,

$$U_{\lambda,\mu} = \{x \in P_K, \forall i \in [1,r] \ \ v(g_i(x)) \geq \mu, \ \exists i \in [r+1,s] \ \ v(g_i(x)) \leq \lambda\}$$

et

$$U'_{\lambda,\mu} = \{x \in P'_K, \forall i \in [1,t] \ \ v(g'_i(x)) \geq \mu, \ \exists i \in [t+1,u] \ \ v(g'_i(x)) \leq \lambda\}$$

Comme la valuation de $\mathcal{O}_K$ est discrète, pour μ proche de 0 il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \leq \lambda_0$, l'ouvert $U_{\lambda,\mu}$ est indépendant des choix des générateurs des idéaux ([**Ber**], 1.2.4).

Proposition 4.15 **([Ber], 1.2.8).** — *L'application f envoie U dans U' ; de plus il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que : pour tout μ suffisamment proche de zéro, il existe $\lambda_0 > 0$, pour $\lambda \leq \lambda_0$,*

$$f(U_{\lambda,\mu}) \subset U'_{N\lambda,\mu}$$

Généralisons un peu le contexte, et avec les mêmes notations remplaçons le morphisme f par un espace rigide affine $T = \mathrm{Spm}\ C_K$ muni de deux projections :

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ P_K & & P'_K \end{tikzcd}$$

telles que $\mathrm{sp}(p_2 p_1^{-1}(]Y_0[)) \subset Y'_0$ et $\mathrm{sp}(p_2 p_1^{-1}(U)) \subset U'_0$.

Proposition 4.16. — *La proposition 4.15 ce généralise à ce contexte. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout μ suffisamment proche de 0 il existe $\lambda_0 > 0$, pour $\lambda \leq \lambda_0$,*

$$p_2 p_1^{-1}(U_{\lambda,\mu}) \subset U'_{N\lambda, \frac{1}{N}\mu}$$

Commençons par rappeler le lemme :

Lemme 4.1 **([Bos], 2.8, lem. 5)**. — *Soit B une $\mathcal{O}_K$-algèbre admissible et $f \in B_K$ un élément tel que $|f|_{sup} \leq 1$. Alors l'algèbre $B[f]$ est admissible et finie au dessus de B.*

Corollaire 4.3. — *Il existe une $\mathcal{O}_K$-algèbre admissible C qui possède les propriétés suivantes :*
- *On a un isomorphisme $C \otimes_{\mathcal{O}_K} K = C_K$ qui permet d'identifier C à un sous-anneau de C_K.*
- *Il existe un morphisme encore noté $p_2^\star : A' \to C$ induisant $p_2^\star : A'_K \to C_K$.*
- *Les éléments $\{p_1^\star(g_i), i = 1...t\}$ de C_K appartiennent à C.*

Démonstration. Commençons par prendre C' une $\mathcal{O}_K$-algèbre admissible telle que $C' \otimes K = C_K$. L'existence de C' est assurée par [**Bos**], 2.8, théo. 3 (e). Considérons une présentation de A' :

$$p : \mathcal{O}_K\langle X_1, \ldots, X_m\rangle \to A'$$

et posons $C = C'[p_1^\star(g_i), p_2^\star(p(X_j))]$, d'après le lemme cette algèbre est admissible et vérifie par construction les trois points du corollaire. □

Pour démontrer la proposition 4.16 on va se ramener à la proposition 4.15. On a en effet une situation :

$$\begin{tikzcd} U''_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y''_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\ C_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spf}\ C \arrow[d, "p_2"] \\ U'_0 \arrow[r] & Y'_0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & P' \end{tikzcd}$$

où C_0 est la réduction de C modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, Y''_0 est le fermé réduit d'idéal la racine de l'idéal engendré par les images de $p_1^\star(g_1), ..., p_1^\star(g_s)$ dans C_0 et U''_0 est l'ouvert de Y''_0 complémentaire du fermé d'idéal engendré par les images des $p_1^\star(g_{s+1}), ..., p_1^\star(g_t)$ dans l'anneau de Y''_0. On peut alors appliquer la proposition 4.15 pour conclure, en remarquant qu'en raison du caractère éventuellement non réduit de l'idéal engendré par les images de $p_1^\star(g_1), ..., p_1^\star(g_s)$ dans C_0, il convient de diviser μ .

Généralisons encore un peu : Avec les notations de la proposition 4.16, supposons seulement que P et P' sont des schémas formels quasi-compacts, que les morphismes p_1 et p_2 sont quasi compacts et que T est quasi séparé. Soit $(W_i)_{i\in I}$ et $(W'_j)_{j\in J}$ des recouvrements spéciaux finis de P et P'. Sur chaque W_i on dispose du fermé $Y_0^i = Y_0 \cap (W_i)_0$ et de l'ouvert $U_0^i = U_0 \cap (W_i)_0$ de ce fermé. Des choix de générateurs des idéaux de Y_0^i et $Y_0^i \backslash U_0^i$ permettent de définir des ouverts $U_{\lambda,\mu}^i$. Pour μ proche de zéro et $\lambda \leq \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$

dépendant de μ) les ouverts $U^i_{\lambda,\mu}$ sont indépendants des choix et se recollent en des ouverts $U_{\lambda,\mu}$ de P_K. De même, sous des hypothèses semblables sur λ et μ, on dispose d'ouverts $U'_{\lambda,\mu}$ de P'_K.

Proposition 4.17. — *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour μ proche de zéro, il existe $\lambda_0 > 0$, pour $\lambda \leq \lambda_0$,*

$$p_2 p_1^{-1}(U_{\lambda,\mu}) \subset U'_{N\lambda, \frac{1}{N}\mu}$$

Démonstration. Soit (W_i) et (W'_i) les recouvrement spéciaux de P et P', considérés plus haut. Soit $(W^{i,j}_l)$ un recouvrement spécial fini de $p_1^{-1}(W_i)_K \cap p_2^{-1}(W'_j)_K$. Pour chaque i, j, l, on peut appliquer la proposition 4.15 à la situation :

$$\begin{tikzcd} & W^{i,j}_l \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ (W_i)_K & & (W'_j)_K \end{tikzcd}$$

comme il n'y a qu'un nombre fini de situations à considérer, on peut conclure. □

4.9. La correspondance $C(p)_{rig}$ et les groupes canoniques. —

4.9.1. Dans les voisinages stricts des tubes ordinaires. — Au dessus du tube ordinaire $]X_0^{or}[$, la correspondance $C(p)_{rig} \times_{p_1, X_{rig}}]X_0^{or}[= C(p)^{or}$ est la réunion de trois composantes disjointes :

$$C(p)^{or} = C(p)^{or,can} \bigcup C(p)^{or,m} \bigcup C(p)^{or,e}$$

où $C(p)^{or,can} = \{x \in C(p)^{or},\ \deg H(x) = 2\}$, $C(p)^{or,m} = \{x \in C(p)^{or},\ \deg H(x) = 1\}$ et $C(p)^{or,e} = \{x \in C(p)^{or},\ \deg H(x) = 0\}$. Notons p_i^{can}, p_i^m et p_i^e, $i \in \{1, 2\}$ les projections respectives vers $]X_0^{or}[$. On dispose de cette manière d'applications

$$\begin{aligned} U_p^{can} = p_2^{can}(p_1^{can})^{-1} :&\quad \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \to \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \\ U_p^m = p_2^m(p_1^m)^{-1} :&\quad \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \to \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \\ U_p^e = p_2^e(p_1^e)^{-1} :&\quad \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \to \mathcal{P}(]X_0^{or}[) \end{aligned}$$

qui vérifient :

$$U_p^{can}(]X_0^{or}[) \subset]X_0^{e,e}[,\quad U_p^m(]X_0^{or}[) \subset]X_0^{e,m} \cup X_0^{m,e}[\text{ et } U_p^e(]X_0^{or}[) \subset]X_0^{m,m}[.$$

Cette discussion se généralise dans des voisinages stricts de $]X^{i,j}[$, $i, j \in \{e, m\}$. Soit V un ouvert de X_{rig} sur lequel le sous-groupe canonique est défini. La correspondance $C(p)_V = C(p)_{rig} \times_{p_1, X^{rig}} V$ est la réunion de trois composantes disjointes :

$$C(p)_V = C(p)_V^{can} \bigcup C(p)_V^m \bigcup C(p)_V^e$$

où $C(p)_V^{can} = \{x \in C(p)_V,\ H(x) = H_{can}(x)\}$, $C(p)_V^m = \{x \in C(p)_V,\ \dim_{\mathbb{F}_p} H(x)(\bar{K}) \cap H_{can}(x)(\bar{K}) = 1\}$ et $C(p)_V^m = \{x \in C(p)_V,\ H(x)(\bar{K}) \cap H_{can}(x)(\bar{K}) = \{0\}\}$. Comme ci-dessus, on note p_i^{can} p_i^m et p_i^e, $i \in \{1, 2\}$ les projections respectives vers V et U_p^{can}, U_p^m et U_p^e les opérateurs induits. On a donc une décomposition ensembliste de l'opérateur de Hecke :

$$U_p = U_p^{can} \cup U_p^m \cup U_p^e$$

Proposition 4.18. — *Il existe $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$, le sous-groupe canonique soit défini sur $]X_0^{i,j}[_\lambda$ pour $i, j \in \{e, m\}$ et :*

$$U_p\Big(\bigcup_{i,j}]X_0^{i,j}[_\lambda \Big) \subset \bigcup_{i,j}]X_0^{i,j}[_{N\lambda}$$

en particulier :

- *Au niveau de $]X_0^{e,e}[$, on a :*

$$\begin{aligned} U_p^m\big(]X_0^{e,e}[_\lambda\big) &\subset]X_0^{e,m}[_{N\lambda} \cup]X_0^{m,e}[_{N\lambda} \\ U_p^e\big(]X_0^{e,e}[_\lambda\big) &\subset]X_0^{m,m}[_{N\lambda} \\ U_p^{can}\big(]X_0^{e,e}[_\lambda\big) &\subset]X_0^{e,e}[_{N\lambda} \end{aligned}$$

- *Au niveau de $]X_0^{e,m}[\cup]X_0^{m,e}[$, on a :*

$$\begin{aligned} U_p^m\big(]X_0^{e,m}[_\lambda \cup]X_0^{m,e}[_\lambda\big) &\subset]X_0^{e,m}[_{N\lambda} \cup]X_0^{m,e}[_{N\lambda} \\ U_p^{et}\big(]X_0^{e,m}[_\lambda \cup]X_0^{m,e}[_\lambda\big) &\subset]X_0^{m,m}[_{N\lambda} \end{aligned}$$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de la proposition 4.17. □

4.9.2. Au niveau de $]X_0^{nor}[$. — Au dessus du tube $]X_0^{nor}[$, la correspondance

$$C(p)_{rig} \times_{p_1, X_{rig}}]X_0^{nor}[= C(p)^{nor}$$

est la réunion de deux composantes :

$$C(p)^{nor} = C(p)^{nor,mo} \bigcup C(p)^{nor,eo}$$

où $C(p)^{nor,mo}$ est le lieu où le groupe H contient le sous-groupe canonique partiel d'ordre p et $C(p)^{nor,eo}$ est le lieu où le groupe H ne contient pas le sous-groupe canonique partiel d'ordre p.
Au dessus de $]X_0^{o,m}[$ et $]X_0^{m,o}[$ cette décomposition est triviale puisqu'on a alors $C(p)^{nor} = C(p)^{nor,eo}$.
Si on note p_i^{eo} et p_i^{mo}, $i \in \{1, 2\}$, les projections respectives, on dispose d'applications : $U_p^{mo} = p_2^{mo}(p_1^{mo})^{-1}$ et $U_p^{eo} = p_2^{eo}(p_1^{eo})^{-1}$. On a donc une décomposition :

$$U_p = U_p^{mo} \cup U_p^{eo}$$

qui vérifie

$$\begin{aligned} U_p^{eo}\big(]X_0^{nor}[\big) &\subset]X_0^{m,o} \cup X_0^{o,m}[\\ U_p^{mo}\big(]X_0^{nor}[\big) &\subset]X_0^{e,o} \cup X_0^{o,e}[. \end{aligned}$$

On peut évidemment étendre cette décomposition à tout ouvert V sur lequel le sous-groupe canonique de rang p est défini.

4.10. Drapeau canonique. — On peut généraliser l'étude précédente sur un ouvert V sur lequel le sous-groupe canonique et le sous-groupe canonique d'ordre p sont définis, on parle alors de drapeau canonique. Au dessus de V, on a la décomposition :

$$\big(C(p)\big)_V = \big(C(p)\big)_V^{can} \bigcup \big(C(p)\big)_V^{m,mo} \bigcup \big(C(p)\big)_V^{m,eo} \bigcup \big(C(p)\big)_V^{e}$$

où

$$\big(C(p)\big)_V^{m,mo} = \big\{x \in \big(C(2)\big)_V, H_{can}^{(1)}(x) \subset H(x), H_{can}(x) \neq H(x)\big\}$$

et

$$\big(C(p)\big)_V^{m,eo} = \big\{x \in \big(C(p)\big)_V, H_{can}^{(1)}(x) \not\subseteq H(x), H_{can}(x) \cap H(x) \neq \{0\}\big\}$$

On a ainsi des décompositions induites des opérateurs de Hecke :

$$\begin{array}{rcl} U_p^m & = & U_p^{m,mo} \cup U_p^{m,eo} \\ U_p^{eo} & = & U_p^{m,eo} \cup U_p^{e} \\ U_p^{mo} & = & U_p^{can} \cup U_p^{m,mo} \\ U_p & = & U_p^{can} \cup U_p^{m,mo} \cup U_p^{m,eo} \cup U_p^{e}. \end{array}$$

5. Formes modulaires

5.1. Formes modulaires classiques. — Considérons le schéma en groupe $\mathrm{GL}_2/_{\mathbb{Z}}$ réalisé comme l'ensemble des matrices 2×2 inversibles, B le Borel triangulaire supérieur, U son radical unipotent et T son tore maximal. On note $X(\mathrm{T})$ le groupe des caractères de T. À tout couple d'entiers (k_1, k_2) on associe le caractère $diag(t_1, t_2) \mapsto t_1^{k_1} t_2^{k_2}$. Ceci fixe un isomorphisme $\mathbb{Z}^2 \tilde{\rightarrow} X(\mathrm{T})$. Si $\kappa = (k_1, k_2)$ est un caractère, on définit $\kappa' = (-k_2, -k_1)$. Soit R un anneau et $\mathcal{A} \to \mathrm{Spec}\ R$ une surface abélienne, e sa section unité. Le groupe $\mathrm{GL}_2(R)$ agit sur les trivialisations $\omega : R^2 \tilde{\rightarrow} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$, si $g \in \mathrm{GL}_2(R)$, on pose $g.\omega = \omega \circ g^{-1}$.

Définition 5.1. — *Une forme modulaire de Siegel F, sur X, de poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ est une loi qui à toute $\mathcal{O}_K$-algèbre R, tout R-point $(\mathcal{A}, H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{A}[p])$ de X, et toute trivialisation $\omega : R^2 \tilde{\rightarrow} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$, associe un élément de R, noté $F(\mathcal{A}, H_1 \subset H_2, \omega)$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Fonctorialité : Soit $R \xrightarrow{r} R'$ un morphisme de $\mathcal{O}_K$-algèbres, pour tout diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}', H_1' \subset H_2', \omega') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{A}, H_1 \subset H_2, \omega) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\ R' \arrow[r, "r"] & \mathrm{Spec}\ R \end{tikzcd}$$

  on a $F(\mathcal{A}', H_1' \subset H_2', \omega') = r\big(F(\mathcal{A}, H_1 \subset H_2, \omega)\big)$.
- *Équation fonctionnelle :*

$$\forall t \in \mathrm{T}(R), u \in \mathrm{U}(R),\ F(\mathcal{A}, H_1 \subset H_2, \omega \circ tu) = \kappa'(t) F(\mathcal{A}, H_1 \subset H_2, \omega)$$

Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Isom}(\mathcal{O}_X^2, e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/X})$ et $\Pi : \mathcal{T} \to X$ la projection, elle fait de $\mathcal{T}$ un GL_2-torseur au dessus de X. Définissons le fibré $\omega^\kappa = \Pi_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}/\mathrm{U}}[\kappa']$. De façon alternative, on a $\omega^\kappa = \mathrm{Sym}^{k_1 - k_2} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/X} \otimes \det^{k_2} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/X}$ (voir [**Pi**], rem. 4.1). Une forme de Siegel sur X de poids κ est donc par définition un élément de $\mathrm{H}^0(X, \omega^\kappa)$. De même, une forme modulaire sur X_K, de poids κ, est un élément de $\mathrm{H}^0(X_K, \omega^\kappa)$. On note ce dernier espace $\mathrm{M}(\kappa, X)$.

D'après le théorème principal de [**Str1**], X admet une compactification toroïdale $\bar{X} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$. Notons $\mathcal{G} \to \bar{X}$ le schéma semi-abélien étendant le schéma abélien universel. On peut prolonger le torseur $\mathcal{T}$ à cette compactification en posant $\bar{\mathcal{T}} = \mathrm{Isom}(\mathcal{O}_{\bar{X}}^2, e^\star \Omega^1_{\mathcal{G}/\bar{X}})$. On étend le faisceau modulaire ω^κ à $\bar{X}$ en posant $\omega^\kappa = \Pi_\star \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}/\mathrm{U}}[\kappa']$. Il résulte alors du principe de Koecher ([**Str1**], prop. 4.1.5.6) que $\mathrm{H}^0(X, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{X}, \omega^\kappa)$ et $\mathrm{H}^0(X_K, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{X}_K, \omega^\kappa)$.

Notons $\bar{\mathfrak{X}}$ la complétion formelle de $\bar{X}$ le long de sa fibre spécial et $\bar{X}_{rig}$ sa fibre générique. On obtient également un principe de Koecher formel ([**Str1**], prop. 4.1.5.6), $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}}, \omega^\kappa)$ et un principe de Koecher rigide, $\mathrm{H}^0(X_{rig}, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{X}_{rig}, \omega^\kappa)$. Enfin, d'après GAGA, on a $\mathrm{H}^0(\bar{X}_{rig}, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(\bar{X}_K, \omega^\kappa)$. En résumé,

Proposition 5.1. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^0(X_{rig}, \omega^\kappa) \simeq \mathrm{M}(\kappa, X)$$

5.2. Formes modulaires surconvergentes. — Nous allons utiliser une définition faible de forme surconvergente :

Définition 5.2. — *L'espace des formes modulaires surconvergentes de poids κ sur X_{rig} est :*

$$\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger = \mathrm{colim}_V \mathrm{H}^0(V, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts V de $]X_0^{m,m}[$ dans X_{rig}.

Les ouverts $(]X_0^{m,m}[_\lambda, \lambda \to 0^+)$ forment un système fondamental de voisinage strict de $]X_0^{m,m}[$, une forme surconvergente provient d'une section du fibré ω^κ sur un ouvert $]X_0^{m,m}[_\lambda$ convenable.
On dispose d'une injection :

$$\mathrm{M}(\kappa, X) \hookrightarrow \mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$$

Définition 5.3. — *Une forme surconvergente est classique si elle appartient à l'image du morphisme précédent.*

5.3. Normes. — Ici nous suivons de près [**Kas**], para. 2. Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible sur Spf $\mathcal{O}_K$, de fibre générique Z_{rig}. Sur Z_{rig}, le faisceau structural $\mathscr{O}_{Z_{rig}}$ est équipé d'une norme.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur $\mathfrak{Z}$. Soit $\mathscr{F}_{rig}$ le faisceau induit sur Z_{rig}. On peut mettre sur $\mathscr{F}_{rig}$ une structure de $\mathscr{O}_{Z_{rig}}$-module de Banach. Soit L une extension finie de K et x : Spec $L \to Z_{rig}$ un K-point. Il provient d'un unique $\mathcal{O}_L$-point, $\tilde{x}$: Spf $\mathcal{O}_L \to \mathfrak{Z}$. On dispose d'une identification naturelle : $\tilde{x}^\star\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_L} K \simeq x^\star\mathscr{F}_{rig}$. Si $f \in x^\star\mathscr{F}_{rig}$, on pose $|f| = \inf\{|\lambda|,\ \lambda \in L^\times,\ \frac{1}{\lambda}f \in \tilde{x}^\star\mathscr{F}\}$. Si U est un ouvert de Z_{rig}, et f une section de $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}_{rig})$ on pose $|f|_U = \sup_{x\in U} |f(x)| = |x^\star f|$.

Si U est quasi-compact et réduit, pour tout $f \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{F})$, on a $|f|_U < +\infty$ et $|f|_U = 0$ si et seulement si $f = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F})$ est un espace de Banach pour la norme $|\ |_U$. On notera par $\tilde{\mathscr{F}}_{rig}$ le sous-faisceau de $\mathscr{F}_{rig}$ des éléments de norme inferieure ou égale à 1.

Le théorème suivant est un résultat d'annulation de la cohomologie :

Théorème 5.1 **([Bar78], th. 2)**. — *Soit Z un espace analytique affinoïde lisse sur K. Il existe $c \in \mathcal{O}_K$, $c \neq 0$ tel que :*

$$c\mathrm{H}^1(Z, \tilde{\mathscr{O}}_{\mathcal{X}}) = 0$$

Comme corollaire, on trouve la variante suivante du *glueing lemma* de [**Kas**] :

Corollaire 5.1. — *Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible de fibre générique Z_{rig} lisse. Pour tout ouvert U quasi-compact de Z_{rig}, on a :*

$$\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}_{rig}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \tilde{\mathscr{F}}_{rig}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \big(\lim_n \mathrm{H}^0(U, \tilde{\mathscr{F}}_{rig}/p^n)\big) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

Démonstration. Comme U est quasi-compact, tout élément de $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}_{rig})$ est de norme finie ce qui prouve l'isomorphisme de gauche. L'application de droite est injective, montrons qu'elle et surjective. Soit W_i un recouvrement spécial fini de U sur lequel le faisceau cohérent $\mathscr{F}_{rig}$ est trivial. Soit $c \in \mathcal{O}_K \backslash \{0\}$ tel que sur chaque W_i, $c\mathrm{H}^1(W_i, \tilde{\mathscr{F}}_{rig}) = 0$. Soit $f_n \in \lim_n \mathrm{H}^0(U, \tilde{\mathscr{F}}_{rig}/p^n))$, pour chaque i, notons $f_n^i \in \lim_n \mathrm{H}^0(W_i, \tilde{\mathscr{F}}_{rig}/p^n))$ la restriction. Le système projectif cf_n^i provient d'un élément cf^i de $\mathrm{H}^0(W_i, \mathscr{F}_{rig})$ et les cf_i se recollent en une section cf sur U. L'élément $f = c^{-1}cf$ est l'antécédent cherché. □

5.4. Action des opérateurs de Hecke. — La correspondance $C(p)_{rig}$ définit un opérateur U_p qui agit sur les formes de Siegel. Rappelons sa définition.

Soit $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/H$ l'isogénie universelle au dessus de $C(p)_{rig}$. Soit V un ouvert de X_{rig} auquel on associe l'ouvert $V' = U_p(V)$. Considérons le morphisme composé :

$$\tilde{U_p} : \mathrm{H}^0(V', \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0\Big(\big(C(p)\big)_{V'}, p_2^\star \omega^\kappa\Big) \xrightarrow{\pi_2^\star} \mathrm{H}^0\Big(\big(C(p)\big)_V, p_1^\star \omega^\kappa\Big) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{p_1}} \mathrm{H}^0(V, \omega^\kappa)$$

on définit alors $U_p = \frac{1}{p^3}\tilde{U}_p$.

Remarque 5.1. — Cette normalisation sera justifiée par la proposition 5.3.

Concrètement, si $F \in \mathrm{H}^0(V', \omega^\kappa)$, $x = (\mathcal{A}, H_1 \subset H_2) \in V(\bar{K})$ et $\omega : \bar{K}^2 \simeq e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/\bar{K}}$, on a :

$$U_p F(x, \omega) = \frac{1}{p^3} \sum_{H \in p_1^{-1}\{x\}} F(\mathcal{A}/H, H_1 + H/H \subset \mathcal{A}[p]/H, \omega')$$

où $\omega' : \bar{K}^2 \simeq e^\star \Omega^1_{(\mathcal{A}/H)/\bar{K}}$ est définie par la formule $\pi_2^\star \omega' = \omega$.

Remarque 5.2. — Dans la formule précédente, nous voyons $F(x, .)$ comme une fonction sur les trivialisations ω. C'est le point de vue de la définition 5.1.

D'après la proposition 4.14, l'opérateur U_p stabilise le tube $]X_0^{m,m}[$. Il agit donc, d'après la proposition 4.17, sur le système des voisinages stricts de $]X_0^{m,m}[$. On a ainsi une action de U_p sur $\mathrm{M}(\kappa, X)^\dagger$.

Soit V un ouvert de X_{rig} sur lequel le sous groupe canonique est défini. D'après le numéro 4.9.1, la correspondance $\big(C(p)\big)_V$ est la réunion disjointe de $\big(C(p)\big)_V^{can}$,$\big(C(p)\big)_V^m$ et $\big(C(p)\big)_V^e$. On peut donc écrire l'opérateur U_p comme la somme :

$$U_p = U_p^{can} + U_p^m + U_p^e$$

où $U_p^{can} F(x, \omega) = \frac{1}{p^3} \sum_{H \in (p_1^{can})^{-1}\{x\}} F(\mathcal{A}/H, ...)$, $U_p^m F(x, \omega) = \frac{1}{p^3} \sum_{H \in (p_1^m)^{-1}\{x\}} F(\mathcal{A}/H, ...)$ et $U_p^e F(x, \omega) = \frac{1}{p^3} \sum_{H \in (p_1^e)^{-1}\{x\}} F(\mathcal{A}/H, ...)$.

De plus,
– au voisinage de $]\bar{X}_0^{m,m}[$, on a $U_p = U_p^{et}$ car $U_p^{can} = U_p^m = 0$.
– au voisinage de $]\bar{X}_0^{m,e} \cup \bar{X}_0^{e,m}[$, on a $U_p = U_p^{et} + U_p^m$ car $U_p^{can} = 0$.

De même, soit V un ouvert de X_{rig} sur lequel le sous-groupe canonique d'ordre p est défini, d'après le numéro 4.9.2, on peut décomposer l'opérateur U_p comme la somme :

$$U_p = U_p^{mo} + U_p^{eo}$$

sachant qu'au voisinage de $]X_0^{m,o} \cup X_0^{o,m}[$ cette décomposition est triviale puisque $U_p^{mo} = 0$.

Soit enfin un ouvert V sur lequel le drapeau canonique (4.10) est défini. On a alors une décomposition :

$$U_p = U_p^{can} + U_p^{m,mo} + U_p^{m,eo} + U_p^e$$

Dans la suite, nous aurons à composer les différents opérateurs de Hecke. Dans ce cas, nous noterons à droite l'action des opérateurs de Hecke. Par exemple, si F est une section de ω^κ sur le tube $]X_0^{e,e}[$, $F|_{U_p^{can}U_p^e}$ est le resultat de l'action de U_p^{can} sur F, puis de U_p^e sur $U_p^{can}F$.

5.5. Calcul de la norme de U_p. — Soit V un ouvert de X_{rig}. Pour T un des opérateurs de Hecke introduit précédemment, considérons l'application $T : \mathrm{H}^0(T(V),\omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0(V,\omega^\kappa)$ lorsqu'elle fait sens.

Définition 5.4. — *On définit la norme de T sur V,*

$$||T||_V = \inf\left\{c \in \mathbb{R}_{>0}, |Tf|_V \leq c|f|_{T(V)},\ \forall f \in H^0(T(V),\omega^\kappa)\right\}$$

Dans cette partie on se propose d'étudier la norme de l'opérateur U_p.

Soit P un schéma formel admissible sur Spf $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux surfaces abéliennes sur P, de section unité e_1 et e_2 et $\pi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ une isogénie. Considérons les faisceaux conormaux $e_1^\star\Omega^1_{\mathcal{A}_1/P}$ et $e_2^\star\Omega^1_{\mathcal{A}_2/P}$ et pour tout poids $\kappa = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $k_1 \geq k_2$, soit $\omega_i^\kappa = \mathrm{Sym}^{k_1-k_2} e_i^\star\Omega^1_{\mathcal{A}_i/P} \otimes \det^{k_2} e_i^\star\Omega^1_{\mathcal{A}_i/P}$. Ces faisceaux induisent des faisceaux sur la fibre rigide P_K, notés encore ω_i^κ . Ils sont équipés d'une norme $|\ |$ qui en fait des modules de Banach sur $\mathscr{O}_{P_K}$. Pour tout extension finie F de K et tout F-point $x \in P_K$, provenant d'un $\mathcal{O}_F$-point $\tilde{x} \in P(\mathcal{O}_K)$, on note deg $\mathrm{Ker}\big(\pi(x)\big)$ pour deg $\mathrm{Ker}\big(\pi(\tilde{x})\big)$.

Lemme 5.1. — *Soit U un ouvert de P_K et $d = \inf_{x\in U}\{\deg\ \mathrm{Ker}\big(\pi(x)\big)\}$. Pour toute section $f \in H^0(U,\omega_2^\kappa)$,*

$$|\pi^\star f|_U \leq p^{-dk_2}|f|_U$$

Démonstration. Soit $x \in U$. Pour toute section ω définie au voisinage de x du faisceau $\omega_{\mathcal{A}_2}$, on a d'une part $|\pi^\star\omega(x)| \leq |\omega(x)|$ et d'autre part $|\pi^\star \det\omega(x)| \leq p^{-d}|\det\omega(x)|$. □

Rappelons que π est l'isogénie universelle au dessus de $C(p)$. On tire de ce lemme une proposition intéressante :

Proposition 5.2. — *Soit U un ouvert de X_{rig}. Notons $d = \inf_{x\in\left(C(p)\right)_U}\{\deg\ \mathrm{Ker}\big(\pi(x)\big)\}$. On a alors :*

$$||U_p||_U \leq p^{3-k_2d}.$$

Sur le lieu ordinaire, on peut faire des calculs bien plus fins. Nous n'en aurons pas besoin dans la suite, cependant ils permettent de justifier la normalisation de l'opérateur U_p, et pourraient s'avérer utiles dans le futur. Voici les résultats :

Proposition 5.3. — *On a,*

1. $||U_p^{can}||_{]X_0^{e,e}[} \leq p^{-2k_2+3}$
2. $||U_p^{m}||_{]X_0^{e,m}\cup X_0^{m,e}[} \leq p^{-k_2+2}$
3. $||U_p||_{]X_0^{m,m}[} \leq 1$

La démonstration de ces énoncés suit un même principe. Il faut combiner l'estimation proposition 5.2 qui porte sur l'action des opérateurs de Hecke sur le faisceau avec une estimation de la trace de la projection p_1. A chaque fois, on va trouver des modèles formels de la correspondance. Il sera alors aisé de calculer la trace. On traite en détail la situation 2. de la proposition. Dans les autres cas on procède exactement de la même manière.

5.5.0.1. Modèle formel. — Soit $\mathfrak{X}^m$ l'ouvert formel de $\mathfrak{X}$ de schéma sous-jacent $X_0^{m,e} \cup X_0^{e,m}$. Notons $C(p)^m$ le produit fibré $C(p)^{or,m}_{rig} \times_{p_1^m, X_{rig}}]X_0^{m,e} \cup X_0^{m,e}[$. Nous allons construire un schéma formel $p_1^{m,for} : \mathfrak{C}(p)^m \to \mathfrak{X}^m$ de fibre rigide $p_1^m : C(p)^m \to]X_0^{m,e} \cup X_0^{e,m}[$. Soit Y le schéma de module classifiant les surfaces abéliennes principalement polarisée, avec une structure principale de niveau N, un drapeau complet $H_1 \subset H_2$ de la p-torsion et un second sous-groupe lagrangien H. Soit Z l'ouvert de la fibre spéciale de Y dont les points sont les surface abéliennes ordinaires equipées de $H_1 \subset H_2$ et de H tel que le rang multiplicatif de H_2 et H soit 1 et tel que $\mathcal{A}[p] = H_1 \times H$. Soit $\mathfrak{C}(p)^m$ la complétion formelle de Y le long de Z.

Lemme 5.2. — *Soit G un groupe finie et plat sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, annulé par p, de rang 4, de rang multiplicatif 2 et de rang étale 2, H et H' deux sous-groupes de G de rang 2, de rang multiplicatif 1. On a l'équivalence :*

$$H(\bar{K}) \cap H'(\bar{K}) = 0 \Leftrightarrow H_{\bar{\mathbb{F}}_p} \cap H'_{\bar{\mathbb{F}}_p} = 0$$

Démonstration. L'implication vers la gauche est évidente. Supposons à présent $H_{\bar{\mathbb{F}}_p} \cap H'_{\bar{\mathbb{F}}_p} \neq 0$. Soit l'intersection contient un groupe multiplicatif qui se relève donc à la caractéristique zéro et $H(\bar{K}) \cap H'(\bar{K}) \neq 0$. Sinon $H(\bar{K})$ et $H'(\bar{K})$ ont même image, une droite, dans le quotient $G^{et}(\bar{K})$. Ainsi l'espace vectoriel engendré par $H(\bar{K})$ et $H'(\bar{K})$ est de dimension au plus 3 et l'intersection est non triviale. □

Corollaire 5.2. — *Le schéma $\mathfrak{C}(p)^m$ est un modèle formel de $C(p)^m$. Il est muni d'une projection $p_1^{m,for}$ vers $\mathfrak{X}^m$.*

Démonstration. Par modularité, on peut plonger $C(p)$ dans Y_K. On vérifie d'abord que $Z \supset \mathrm{sp}\big(C(p)^m\big)$, si bien qu'on dispose d'une immersion $C(p)^m \to (\mathfrak{C}(p)^m)_K$. Il faut montrer qu'elle est surjective. Pour cela il suffit de montrer que $x \in C(p)^m \Leftrightarrow \mathrm{sp}(\{x\}) \in Z$. C'est exactement l'énoncé du lemme 5.2. □

Soit $x \in \mathfrak{X}^m(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Soit $y \in (p_1^{m,for})^{-1}(\{x\})$. Par la théorie de Serre-Tate (voir [**Ka81**]), on peut décrire le morphisme entre les complétés :

$$(p_1^{m,for})^\star : \widehat{\mathscr{O}}^x_{\mathfrak{X}|_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)}} \to \widehat{\mathscr{O}}^y_{\mathfrak{C}(p)^m|_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)}}$$

il est de la forme

$$\begin{array}{rcl} W(\bar{\mathbb{F}}_p)[[T_1,T_2,T_3]] & \to & W(\bar{\mathbb{F}}_p)[[T_1,T_2,T_3]] \\ T_1 & \mapsto & (1+T_1)^p - 1 \\ T_i & \mapsto & T_i \quad i = 2,3 \end{array}$$

Proposition 5.4. — *Soit $\mathrm{Tr}_{p_1^m} : {p_1^m}_\star \mathscr{O}_{C(p)^m} \to \mathscr{O}_{]X_0^{m,e} \cup X_0^{e,m}[}$ le morphisme de trace. Soit U_0 un ouvert de $X_0^{m,e} \cup \bar{X}_0^{e,m}$, et $U =]U_0[$ son tube. Pour toute section $f \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{O}_{C(p)^m})$,*

$$|\mathrm{Tr}_{p_1^m} f|_U \leq p^{-1} |f|_{(p_1^m)^{-1}(U)}$$

Démonstration. Les schémas formels $\mathfrak{C}(p)^m$ et $\mathfrak{X}^m$ sont réguliers et donc normaux. Il résulte alors de [**Bos**], 2.8, lem. 5 que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(U_0) = \tilde{\mathscr{O}}_{X_{rig}}(U)$ et $\mathscr{O}_{\mathfrak{C}(p)^m}\big((p_1^{m,for})^{-1}(U_0)\big) = \tilde{\mathscr{O}}_{C(p)^m}\big((p_1^m)^{-1}(U)\big)$. On conclut grâce à la description locale du morphisme sur les schémas formels.

□

Remarque 5.3. — La proposition précédente est fausse si on travail avec un ouvert quelconque de $]X_0^{m,e} \cup X_0^{e,m}[$. Cette proposition est un énoncé de nature locale pour la topologie du schéma formel mais pas pour la toplogie de l'espace rigide.

5.5.0.2. Démonstration du point 2 de la proposition 5.3. — Soit U_0 un ouvert de $X_0^{m,e} \cup X_0^{e,m}$. Notons $U =]U_0[$ son tube. Considérons le morphisme composé

$$\mathrm{H}^0\big(U_p^m(U), \omega^\kappa\big) \to \mathrm{H}^0\Big(\big(p_1^m\big)^{-1}(U), (p_2^m)^\star\omega^\kappa\Big) \overset{\pi_2^\star}{\to} \mathrm{H}^0\Big(\big(p_1^m\big)^{-1}(U), (p_1^m)^\star\omega^\kappa\Big) \overset{\mathrm{Tr}_{p_1^m}}{\to} \mathrm{H}^0\big(U, \omega^\kappa\big)$$

qu'on peut voir comme un produit tensoriel $\mathrm{Tr}_{p_1^m} \circ p_2^\star \otimes \pi_2^\star$. Comme le noyau de l'isogénie au dessus de $C(p)^m$ est de degré 1, on déduit du lemme 5.1 que $|\pi_2^\star|_U \leq p^{-k_2}$. On sait par la proposition 5.4 que $|\mathrm{Tr}_{p_1^m} \circ p_2^\star|_U \leq p^{-1}$. Comme $U_p^m = \frac{1}{p^3}\mathrm{Tr}_{p_1^m} \circ p_2^\star \otimes \pi_2^\star$, on conclut bien.

6. Le prolongement analytique

On a introduit au numéro 4.2.2 l'ouvert $Y_0 = \big(X_0 \backslash Z_0^s\big) \bigcup \big(X_0^{sg} \cap X_0^{s,\alpha}\big)$ de X_0. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.1. — *Soit F une forme surconvergente de poids $\kappa = (k_1, k_2)$, $k_1 \geq k_2 \geq 3$, propre pour l'opérateur U_p, pour la valeur propre a_p, avec $k_2 - 3 > v(a_p)$. Alors F admet un unique prolongement à $]Y_0[$.*

6.1. Prolongement analytique jusqu'à $X_{0,1^+} \cup \big(X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[\big)$. —

Proposition 6.2. — *On peut prolonger F de manière unique en une forme encore notée F définie sur $X_{0,1^+}$, propre pour U_p.*

Démonstration. On suppose F définie sur un voisinage strict V de $]X_0^{m,m}[$. Considérons le recouvrement admissible $(X_{0,\lambda}, \lambda \to 1^+)$ de $X_{0,1^+}$. Il suffit de trouver des sections F_λ sur chaque $X_{0,\lambda}$ qui prolongent F et qui soient compatibles entre elles. Soit $\lambda > 1$, d'après le théorème 4.1, il existe $N > 0$ tel que $U_p^N(X_{0,\lambda}) \subset V$, posons donc :

$$F_\lambda = a_p^{-N} U_p^N F$$

□

Proposition 6.3. — *On peut étendre F en une forme définie sur $X_{0,1^+} \cup \big(X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[\big)$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.1, $U_p\big(X_{0,1^+} \cup (X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[)\big) \subset X_{0,1^+}$. On peut donc poser $F = a_p^{-1} U_p F$. □

6.2. Construction de formes au voisinage du lieu ordinaire. — Dans cette partie, nous construisons des séries analogues à celles considérées par Kassaei dans [**Kas**].

D'après la proposition 4.18, il existe un entier N et un réel $\lambda_0 \in]0,1/2]$ tels que le sous-groupe canonique soit défini sur $\cup_{i,j\in\{e,m\}}]X_0^{i,j}[_{\lambda_0}$ et de plus pour tout $\lambda \in]0,\lambda_0]$,

$$\begin{array}{rcl} U_p^m(]X_0^{e,e}[_\lambda) & \subset &]X_0^{e,m}[_{N\lambda}\cup]X_0^{m,e}[_{N\lambda} \\ U_p^{et}(]X_0^{e,e}[_\lambda) & \subset &]X_0^{m,m}[_{N\lambda} \\ U_p^{can}(]X_0^{e,e}[_\lambda) & \subset &]X_0^{e,e}[_{N\lambda} \\ U_p^m(]X_0^{e,m}[_\lambda\cup]X_0^{m,e}[_\lambda) & \subset &]X_0^{e,m}[_{N\lambda}\cup]X_0^{m,e}[_{N\lambda} \\ U_p^e(]X_0^{e,m}[_\lambda\cup]X_0^{m,e}[_\lambda) & \subset &]X_0^{m,m}[_{N\lambda} \end{array}$$

Posons alors $r = \frac{1}{N}$, fixons $\epsilon > 0$ tel que $k_2 - v(a_p) - 3 - \epsilon > 0$ et choisissons $\epsilon_0 \in]0,\lambda_0] \cap \mathbb{Q}$ tel que

- Pour tout ouvert $U \subset]X_0^{m,e}[_{\epsilon_0}\cup]X_0^{e,m}[_{\epsilon_0}$, $||U_p^m||_U \leq p^{-k_2+3+\epsilon}$.
- Pour tout ouvert $U \subset]X_0^{e,e}[_{\epsilon_0}$, $||U_p^{can}||_U \leq p^{-2k_2+3+\epsilon}$.

Ce choix est rendu possible par la proposition 5.2. Soit enfin la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$, géométrique de raison r et premier terme ϵ_0.

Proposition 6.4. — *Pour tout $n \geq 1$, il existe des formes $G_n \in \mathrm{H}^0(]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}, \omega^\kappa)$, $G'_n \in \mathrm{H}^0(]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n}, \omega^\kappa)$ et $G''_n \in \mathrm{H}^0(]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}, \omega^\kappa)$ "naturellement" attachéee à F :*

- $G_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_p^{-i-1} F|_{(U_p^m)^i U_p^e}$.
- $G'_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_p^{-i-1} F|_{(U_p^m)^i U_p^e}$.
- $G''_n = \sum_{i+j\leq n-1} a_p^{-i-j-1} F|_{(U_p^{can})^j (U_p^m)^i U_p^e}$.

Démonstration. Cette définition fait sens car pour chaque terme apparaissant dans une des trois sommes, le dernier opérateur par lequel on compose est U_p^e. □

Remarque 6.1. — La formule définissant G_n (ou G'_n) est motivée par la remarque suivante : on aimerait poser $G_n = a_p^{-n} U_p^n F$, malheureusement $U_p^m(]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}) \nsubseteq X_{0,1^+}$. Il faut corriger légèrement, notre formule se réécrit en fait formellement $G_n = a_p^{-n}U_p^n F - a_p^{-n}(U_p^m)^n F$. En effet, supposons F définie partout, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} a_p^{-n}U_p^n F & = & a_p^{-n} F|_{(U_p^e+U_p^m)U_p^{n-1}} \\ & = & a_p^{-1}F|_{U_p^e} + a_p^{-n}F|_{U_p^m U_p^{n-1}} \\ & = & ... \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_p^{-i-1}F|_{(U_p^m)^i U_p^e} + a_p^{-n}F|_{(U_p^m)^n} \end{array}$$

La formule définissant G''_n est motivée par les même raisons. On ne peut écrire $G''_n = a_p^{-n}U_p^n F$ car $U_p^{can}(]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}) \nsubseteq X_{0,1^+}$ et $U_p^m(]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}) \nsubseteq X_{0,1^+}$. Il faut corriger légèrement. Formellement on a $G''_n = a_p^{-n}U_p^n F - \sum_{i+j=n} a_p^{-n}F|_{(U_p^{can})^i(U_p^m)^j}$.

Proposition 6.5. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} |G_{n+1} - G_n|_{]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}} & = & O\big(p^{n(3+v(a_p)+\epsilon-k_2)}\big) \\ |G'_{n+1} - G'_n|_{]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n}} & = & O\big(p^{n(3+v(a_p)+\epsilon-k_2)}\big) \\ |G''_{n+1} - G''_n|_{]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}} & = & O\big(p^{n(3+v(a_p)+\epsilon-k_2)}\big) \end{array}$$

En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

$$\begin{aligned} |G_n|_{]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}} &\leq M \\ |G'_n|_{]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n}} &\leq M \\ |G''_n|_{]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}} &\leq M \end{aligned}$$

Démonstration. Sur $]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}$, on a $G_{n+1} - G_n = a_p^{-n-1} F|(U_p^m)^n U_p^e$. On a alors grâce à la proposition 5.2 et le choix fait de ϵ_0 au début de cette section,

$$|G_{n+1} - G_n|_{]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}} \leq p^{n(3+v(a_1)+\epsilon-k_2)+v(a_1)+3} |F|_{]X_0^{m,m}[_{\epsilon_0}}$$

La norme $|F|_{]X_0^{m,m}[_{\epsilon_0}}$ est finie par quasi-compacité. On raisonne de même dans les deux autres cas. Comme $]X_0^{m,e}[_{\epsilon_1}$ est quasi-compact, la norme $|G_1|_{]X_0^{m,e}[_{\epsilon_1}}$ est finie. Il résulte alors facilement de la première partie de la proposition que la norme de G_n sur son domaine de définition est uniformément bornée. On raisonne de même dans les autres cas. □

6.3. Deux lemmes de finitude. — Nous allons montrer deux lemmes deux finitudes, analogues à ceux de la partie 4 de [**Kas**].

Lemme 6.1. — *La norme de F sur $X_{1-\epsilon_1,1^+}$ est finie.*

Démonstration. Comme $X_{1-\epsilon_1,1^+}$ n'est pas quasi-compact, la finitude de la norme n'est pas automatique. D'après le théorème 4.1, il existe une suite $(\epsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de premier terme $\epsilon'_0 = \epsilon_1$, décroissante et de limite nulle, telle que

$$U_p(X_{0,1+\epsilon'_n}) \subset X_{0,1+\epsilon'_{n-1}}$$

Rappelons que sur $]X_0^{m,e}[_{\epsilon_1}$ on dispose d'une forme $G_1 = a_p^{-1} U_p^e F$. Par quasi-compacité, il existe $M \in \mathbb{R}$, $|F|_{X_{0,1+\epsilon'_0}} \leq M$ et $|G_1|_{]X_0^{m,e}[_{\epsilon'_0}} \leq M$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F|_{X_{1-\epsilon'_0,1+\epsilon'_n}} \leq M$.
Posons $W_{n+1} = X_{1-\epsilon'_0,1+\epsilon'_{n+1}} \backslash X_{1-\epsilon'_0,1+\epsilon'_n}$. Par construction $U_p(W_{n+1}) \subset W_n$.
Or

$$|F|_{W_{n+1}} \leq \max\left\{|F - a_p^{-1} U_p^m F|_{W_{n+1}}, |a_p^{-1} U_p^m F|_{W_{n+1}}\right\}$$

et d'une part, sur W_{n+1},

$$F - a_p^{-1} U_p^m F = a_p^{-1} U_p F - a_p^{-1} U_p^m F = a_p^{-1} U_p^e F = G_1,$$

d'autre part, d'après les choix du numéro 6.2, $|a_p^{-1} U_p^m F|_{W_{n+1}} \leq |F|_{U_p^m(W_{n+1})}$. Il en résulte que $|F|_{W_{n+1}} \leq M$. □

Notons $X'_{\lambda,\mu} = \{x \in X_{rig},\ \deg\ H_2/H_1(x) \geq \lambda,\ \deg\ H_2(x) \geq \mu\}$. On a un lemme analogue :

Lemme 6.2. — *La norme de F sur $X'_{1-\frac{\epsilon_1}{2},1^+}$ est finie.*

Démonstration. D'après le théorème 4.1, il existe une suite $(\epsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de premier terme $\epsilon'_0 = \frac{\epsilon_1}{2}$, décroissante et de limite nulle, telle que

$$U_p(X'_{0,1+\epsilon'_n}) \subset X'_{0,1+\epsilon'_{n-1}}$$

Rappelons que sur $]X_0^{e,m}[_{\epsilon_1}$ on dispose d'une forme $G'_1 = a_p^{-1} U_p^e F$. Par quasi-compacité, il existe $M \in \mathbb{R}$, $|F|_{X'_{0,1+\epsilon'_0}} \leq M$ et $|G'_1|_{]X_0^{e,m}[_{\epsilon_1}} \leq M$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F|_{X'_{1-\frac{\epsilon_1}{2},1+\epsilon'_n}} \leq M$.
Posons $W'_{n+1} = X'_{1-\frac{\epsilon_1}{2},1+\epsilon'_{n+1}} \backslash X'_{1-\frac{\epsilon_1}{2},1+\epsilon'_n}$. Par construction $U_p(W'_{n+1}) \subset W'_n$ et $W'_{n+1} \subset]X_0^{e,m}[_{\epsilon_1}$.
Or

$$|F|_{W'_{n+1}} \leq \max\left\{|F - a_p^{-1} U_p^m F|_{W'_{n+1}}, |a_p^{-1} U_p^m F|_{W'_{n+1}}\right\}$$

et d'une part, sur W'_{n+1},

$$F - a_p^{-1}U_p^m F = a_p^{-1}U_p F - a_p^{-1}U_p^m F = a_p^{-1}U_p^e F = G'_1,$$

d'autre part, d'après les choix du numéro 6.2, $|a_p^{-1}U_p^m F|_{W'_{n+1}} \leq |F|_{U_p^m(W'_{n+1})}$. Il en résulte que $|F|_{W'_{n+1}} \leq M$. □

Corollaire 6.1. — *La norme de F sur $]X_0^{m,o}[$ et $]X_0^{o,m}[$ est finie.*

6.4. Construction de formes sur les arêtes $]X_0^{e,o}[$ et $]X_0^{o,e}[$. —

Proposition 6.6. — *Pour tout $n \geq 1$, on a des formes $J_n \in \mathrm{H}^0(]X_0^{o,e}[, \omega^\kappa)$ et $J'_n \in \mathrm{H}^0(]X_0^{e,o}[, \omega^\kappa)$ naturellement attachées à F :*
- $J_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_p^{-i-1} F|_{(U_p^{mo})^i U_p^{eo}}$.
- $J'_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_p^{-i-1} F|_{(U_p^{mo})^i U_p^{eo}}$.

Démonstration. La définition fait sens puisque le dernier opérateur par lequel on compose est U_p^{eo}. □

Proposition 6.7. — *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} |J_n - J_{n+1}|_{]X_0^{e,o}[} &= O(p^{n(3+v(a_p)-k_2)}) \\ |J'_n - J'_{n+1}|_{]X_0^{o,e}[} &= O(p^{n(3+v(a_p)-k_2)}) \end{aligned}$$

Démonstration. On a $J_{n+1} - J_n = a_p^{-n-1} F|_{(U_p^{mo})^n U_p^{eo}}$. On obtient donc

$$|J_n - J_{n+1}|_{]X_0^{e,o}[} \leq p^{n(3+v(a_p)-k_2)+v(a_p)+3} |F|_{]X_0^{m,o} \cup X_0^{o,m}[}$$

On raisonne de même avec J'_n. □

Corollaire 6.2. — *Les suites J_n et J'_n convergent vers des sections J et J'.*

6.5. Recollement. — Rappelons qu'on a noté $Y_0 = \big(X_0 \backslash Z_0^s\big) \bigcup \big(X_0^{sg} \cap X_0^{s,\alpha}\big)$. C'est un ouvert de X_0.

Proposition 6.8. — *La section F se prolonge en une section du faisceau ω^κ sur $]Y_0[$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a un recouvrement admissible (REC_n) :

$$\begin{aligned}]Y_0[\quad \subset \quad &]X_0^{m,o} \cup X_0^{m,m} \cup X_0^{o,m}[\bigcup]X_0^{s,\alpha} \cap X_0^{sg}[\bigcup]X_0^{o,e}[\\ & \bigcup]X_0^{e,o}[\bigcup]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n} \bigcup]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n} \bigcup]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n} \end{aligned}$$

Justifions brièvement l'admissibilité du recouvrement. Considérons l'ouvert rigide $Y = \{x \in X_{rig},\ x \in]X_0 \backslash Z_0^s[\text{ ou } \deg H_2(x) = 1\}$. C'est l'image inverse par l'application deg de la réunion des arêtes, des sommets et de la diagonale $\deg H_2 = 1$ du parallélogramme. D'après le corollaire 4.2, $]Y_0[\subset Y$. Notons $Y' = \{x \in X_{rig},\ \deg H_2(x) = 1,\ \deg H_1(x) \neq 0, 1\}$. Le recouvrement

$$\begin{aligned} Y \quad \subset \quad &]X_0^{m,o} \cup X_0^{m,m} \cup X_0^{o,m}[\bigcup Y' \bigcup]X_0^{o,e}[\\ & \bigcup]X_0^{e,o}[\bigcup]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n} \bigcup]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n} \bigcup]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n} \end{aligned}$$

est admissible (c'est évident sur le parallélogramme), et l'intersection de ce recouvrement avec $]Y_0[$ est l'intersection du recouvrement (REC_n) avec $]Y_0[$ qui est donc admissible.

On dispose alors de :
- La forme F sur $X_{0,1^+} \cup \big(X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[\big)$. Rappelons que $]X_0^{m,o} \cup X_0^{m,m} \cup X_0^{o,m}[\subset X_{0,1^+} \cup \big(X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[\big)$ et $]X_0^{s,\alpha} \cap X_0^{sg}[\subset X_{0,1^+} \cup \big(X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[\big)$.
- Les formes J et J' sur $]X_0^{o,e}[$ et $]X_0^{e,o}[$.
- Les formes G_n, G'_n et G''_n sur $]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n}$, $]X_0^{e,m}[_{\epsilon_n}$ et $]X_0^{e,e}[_{\epsilon_n}$.

Toutes les formes considérées sont uniformément bornées par les lemmes 6.1 et 6.2, et les propositions 6.5 et 6.7. Nous allons chercher à les recoller. Pour chaque n, il y a trois zones de recollement :

– Au voisinage de $]X_0^{m,e}[$, où on cherche à recoller G_n avec F et J.
– Au voisinage de $]X_0^{e,m}[$, où on cherche à recoller G'_n avec F et J'.
– Au voisinage de $]X_0^{m,e}[$, où on cherche à recoller G''_n avec J et J'.

Traitons en détail la première zone de recollement. Sur $W =]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n} \cap \big(X_{0,1+} \cup (X_{0,1} \cap]X_0^{sg}[)\big)$, on a $F - G_n = a_p^{-n}(U_p^m)^n F$, et il vient

$$|F - G_n|_W \leq p^{n(-k_2+v(a_p)+\epsilon+3)} |F|_{(U_p^m)^n W}$$

Sur $W' =]X_0^{m,e}[_{\epsilon_n} \cap]X_0^{o,e}[$, on a formellement $G_n = F - a_p^{-n}(U_p^m)^n F$ et $J_n = F - a_p^{-n}(U_p^{mo})^n F$. Il vient alors

$$\begin{aligned} G_n - J_n &= a_p^{-n} F|_{(U_p^{mo})^n - (U_p^m)^n} \\ &= -a_p^{-n} \sum_{i+j=n,\ i\neq 0} F|_{(U_p^{m,mo})^j (U_p^{m,eo})^i} \end{aligned}$$

La dernière expression cesse d'être formelle. On a utilisé la décomposition $U_p^m = U_p^{m,eo} + U_p^{m,mo}$ donnée par le drapeau canonique défini sur W' (voir les numéros 4.10 et 5.4). On obtient finalement

$$\begin{aligned} |G_n - J|_{W'} &\leq \max\big\{|G_n - J_n|_{W'}, |J_n - J|_{W'}\big\} \\ &\leq \max_{i+j=n,\ i\neq 0} \big\{p^{n(-k_2+v(a_p)+\epsilon+3)} |F|_{(U_p^{m,eo})^i (U_p^{m,mo})^j W'}, |J_n - J|_{W'}\big\} \end{aligned}$$

Ceci montre bien l'existence d'une suite $(\pi_n) \in \bar{K}^{\mathbb{N}_{\geq 1}}$, $|\pi_n| = O(p^{n(-k_2+v(a_p)+\ \epsilon+3)})$, telle que les sections G_n, F et J se recollent au voisinage de $]X_0^{m,e}[$ modulo π_n. Les autres points de recollement se traitent de la même manière. Quitte à modifier éventuellement (π_n), on obtient donc que les différentes formes se recollent en une section $H_n \in \mathrm{H}^0(]Y_0[, \omega^\kappa \bmod \pi_n)$ pour $\pi_n \in \bar{K}$, $|\pi_n| = O(p^{n(3+v(a_p)+\epsilon-k_2)})$. Les sections $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées, et, quitte à modifier à nouveau la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer qu'elles forment un système projectif en vertu de la proposition 6.5. Ce système projectif provient d'une section $H \in \mathrm{H}^0(]Y_0[, \omega^\kappa)$ d'après le corollaire 5.1. □

7. Fin de la démonstration

7.1. Un lemme d'extension. — Soit $P = \mathrm{Spf}\ A$ un schéma formel affine de type fini sur $\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K$. On note $P_0 = \mathrm{Spec}\ \ A_0$ sa fibre spéciale et $P_K = \mathrm{Spm}\ A \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ sa fibre générique. Soit $U_0 \subset P_0$ un ouvert et $]U_0[\subset P_K$ le tube correspondant.

Lemme 7.1. — *Si l'application de restriction $A_0 \to \mathrm{H}^0(U_0, \mathscr{O}_{P_0})$ est un isomorphisme, alors l'application de restriction $A \otimes_{\mathcal{O}} K \simeq \mathrm{H}^0(]U_0[, \mathscr{O}_{P_K})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons U le sous-schéma formel de P d'ouvert sous-jacent U_0. Il suffit de montrer que l'application $A \to \mathrm{H}^0(U, \mathscr{O}_P)$ est un isomorphisme. Ceci résulte alors du lemme de Nakayama topologique. □

7.2. Application. — Soit $\mathfrak{X} = \cup_{i\in J} \mathfrak{U}_i$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines sur lesquels le faisceau ω^κ est libre.

Lemme 7.2. — *Pour tout $i \in J$, l'application $\mathrm{H}^0((U_i)_0, \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0((U_i)_0 \cap Y_0, \omega^\kappa)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme on suppose le faisceau libre sur $(U_i)_0$, il s'agit de montrer que l'application $\mathrm{H}^0((U_i)_0, \mathscr{O}_{X_0}) \to \mathrm{H}^0((U_i)_0 \cap Y_0, \mathscr{O}_{X_0})$ est un isomorphisme. Comme Y_0 est dense dans X_0, l'application est injective. Soit $f \in \mathrm{H}^0((U_i)_0 \cap Y_0, \mathscr{O}_{X_0})$. L'ouvert $(U_i)_0$ est réunion de ses composantes irréductibles $(U_i)_0 = \cup C_l$. Chacune de ses composantes est lisse et $C_l \backslash Y_0$ est un fermé de codimension au moins 2 d'après la proposition 4.8. Il en résulte que f admet un prolongement f_l sur chaque composante C_l. Il reste à vérifier que les fonctions f_l se recollent. L'ouvert $(U_i)_0$ hérite de la stratification de X_0. Comme Y_0 contient le complémentaire du lieu supersingulier, il suffit de vérifier que les fonctions f_l se recollent sur le lieu supersingulier. Soit $S \subset (U_i)_0$ une composante irréductible d'une strate supersingulière. Nous allons raisonner selon le type de S en utilisant les résultats du numéro 4.2.2.

– Supposons $S \subset X_0^{s,\alpha}$. Comme Y_0 est dense dans cette strate, les fonctions f_l, qui coincident toutes avec f sur Y_0, se recollent bien.
– Supposons $S \subset X_0^{sg,V}$. Il y a trois composantes irréductibles qui passent par S. Elles sont génériquement de type étale-étale, multiplicatif-étale, étale-multiplicatif. Notons les respectivement $C^{e,e}$, $C^{m,e}$, $C^{e,m}$ et posons également $f^{e,e}$, $f^{m,e}$ et $f^{e,m}$ pour les fonctions respectives sur ces composantes . Les fonctions $f^{e,e}$ et $f^{e,m}$ coincident avec f sur l'ouvert $X_0^{e,o} \cap C^{e,e} \cap C^{e,m}$ de $C^{e,e} \cap C^{e,m}$. Comme S est dans l'adhérence de cet ouvert, il en résulte que $f^{e,e}|_S = f^{e,m}|_S$. De façon symétrique, on montre que $f^{m,e}|_S = f^{e,e}|_S$ ce qui termine la démonstration dans ce cas.
– On raisonne de même lorsque $S \subset X_0^{sg,F}$.
– Supposons $S \subset X_0^{ss,F1}$. Il y a quatre composantes irréductibles passant par S. Elles sont génériquement de type étale-étale, multiplicatif-étale, étale-multiplicatif, multiplicatif-multiplicatif. Notons les respectivement $C^{e,e}$, $C^{m,e}$, $C^{e,m}$ et $C^{m,m}$. Posons également $f^{e,e}$, $f^{m,e}$, $f^{e,m}$ et $f^{m,m}$ pour les fonctions respectives sur ces composantes. Sur $C^{e,e} \cap C^{e,m}$, les fonctions $f^{e,e}$ et $f^{e,m}$ coincident sur l'ouvert $X_0^{e,o} \cap C^{e,e} \cap C^{e,m}$ de $C^{e,e} \cap C^{e,m}$. Comme S est dans l'adhérence de cet ouvert, il en résulte que $f^{e,e}|_S = f^{e,m}|_S$. On montre de la même façon que $f^{e,m}|_S = f^{m,m}|_S$, $f^{m,m}|_S = f^{m,e}|_S$ et $f^{m,e}|_S = f^{e,e}|_S$, ce qui termine la démonstration dans ce cas.
– Supposons $S \subset X_0^{ss,F2}$. La situation est alors identique à la situation précédente.

□

Proposition 7.1. — *Le morphisme de restriction* $\mathrm{H}^0(X_{rig}, \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0(]Y_0[, \omega^\kappa)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $X_0 = \cup(U_i)$ le recouvrement affine considéré plus haut. Pour tout i, l'application

$$\mathrm{H}^0(]U_i[, \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0(]U_i \cap Y_0[, \omega^\kappa)$$

est un isomorphisme. Soit $f \in \mathrm{H}^0(]Y_0[, \omega^\kappa)$. Notons f_i le prolongement de $f|_{]U_i \cap Y_0[}$ à $]U_i[$. Il reste à voir que $f_i|_{]U_i \cap U_j[} = f_j|_{]U_i \cap U_j[}$. L'égalité précédente est vraie sur $]Y_0 \cap U_i \cap U_j[$. L'ouvert $Y_0 \cap U_i \cap U_j$ est dense dans $U_i \cap U_j$ et rencontre donc toutes les composantes connexe de ce schéma. Comme $U_i \cap U_j$ est réduit, les tubes de ses composantes connexes sont connexes. On en déduit que l'ouvert $]Y_0 \cap U_i \cap U_j[$ rencontre chaque composante connexe de $]U_i \cap U_j[$, ce qui permet d'appliquer [**Ber**], 0.1.13 et de conclure. □

Appendice A
Filtration par le degré

Dans cet appendice, nous rappelons la définition d'une filtration sur les schémas en groupes finis et plats annulés par p sur $\mathcal{O}_K$. Cette filtration est utilisée pour démontrer la proposition 4.10. Elle apparaît dans [**A-G**] sous le nom de filtration par les sous-groupes de congruence (mais son indexation diffère légèrement), et dans [**Far1**].

A.1. La filtration. —

Définition A.1. — *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \deg : G(\bar{K}) & \to & \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x & \mapsto & \deg \mathrm{Adh} < x > \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Remarque A.1. — De manière équivalent, pour $x \in \mathrm{G}(\bar{K})\backslash\{0\}$, on a

$$\deg(x) = \sup\{v(a),\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G_{a,b}, \mathrm{Adh} < x >) \neq 0\}$$

où $G_{a,b}$ est le schéma en groupe de Oort-Tate de schéma sous-jacent $\mathcal{O}_{\bar{K}}[X]/(X^p - aX)$.

Proposition A.1. — *On a* $\deg(x+y) \geq \inf(\deg(x), \deg(y))$ *avec égalité si* $\deg(x) \neq \deg(y)$.

Démonstration. Soit $a \in \bar{K}$ tel que $v(a) = \inf(\deg(x), \deg(y))$. Soit $z \in G_{a,b}(\bar{K})\backslash\{0\}$. Il existe donc deux morphismes de groupes $\phi_i : G_{a,b} \to G$, $i \in 1,2$, tels que $\phi_1(z) = x$, $\phi_2(z) = y$. Le morphisme $\phi_1 + \phi_2$ envoie alors z sur $x+y$ ce qui démontre la première partie de cette proposition. Supposons maintenant $\deg(x) < \deg(y)$ et l'inégalité stricte, autrement dit que $\deg(x+y) > \deg(x)$. Appliquant la première partie de la proposition à $(x+y, -y)$ on obtient $\deg(x) \geq \deg(x+y)$ et une contradiction. □

Définition A.2. — *On dispose d'un filtration décroissante, par le degré, sur* $\mathrm{G}(\bar{K})$ *en posant pour tout* $\lambda \in [0,1]$

$$G_\lambda^{\deg}(\bar{K}) = \{x \in G(\bar{K}),\ \deg(x) \geq \lambda\}$$

Il résulte de la proposition A.1 que les $G_\lambda^{\deg}(\bar{K})$ sont des sous-groupes.

Définition A.3. — *Soit* $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_{\mathrm{ht}G}$*, les sauts de la filtrations par le degré (avec multiplicité). On note :*
- $c^-(G) = \lambda_{\mathrm{ht}G}$.
- $c^+(G) = \lambda_1$.
- $\mathrm{fil}G = (\lambda_1, ..., \lambda_{\mathrm{ht}G})$.

On obtient facilement un certain nombre de propriétés de la filtration par le degré :

Proposition A.2. — *Soit G et H deux groupes finis et plats, annulés par p sur $\mathcal{O}_K$.*
- *Soit $f : H \to G$ un morphisme de groupes, pour tout $x \in H(\bar{K})$,* $\deg(f(x)) \geq \deg(x)$.
- *La filtration par le degré est fonctorielle.*
- *La filtration par le degré passe au sous-groupe : si $H \hookrightarrow G$ est un sous groupe fermé,*

$$H_\lambda^{\deg}(\bar{K}) = G_\lambda^{\deg}(\bar{K}) \cap H(\bar{K})$$

- *Si* $c^+(G) < c^-(H)$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(H,G) = 0$.
- *Soit $f : H \to G$ un morphisme de groupe qui induit un isomorphisme génériquement,*

$$\mathrm{fil}G \geq \mathrm{fil}H$$

- $G_{1-\lambda}^{\vee\,\deg} \subset G_\lambda^{\deg\,\perp}$ *et en particulier* $c^+(G) \leq 1 - c^-(G^\vee)$.

A.2. Le cas monogène. — Nous suivons ici [**Far**], para. 6. Supposons que $G = \mathrm{Spec}\, A$ avec $A = \mathcal{O}_K[T]/P$, où P est un polynôme unitaire, tel que $P(0) = 0$. La section unité est donnée par $T = 0$.

Proposition A.3. — *On a l'identité :*

$$\deg G = \sum_{H \subset G,\ \mathrm{ht} H = 1} \deg H$$

Démonstration. Posons $g = \mathrm{ht} G$ et soit $0, z_1, ..., z_{p^g - 1}$ les racines de P. On a d'abord $\deg G = v(P'(0)) = \sum_i v(z_i)$. D'autre part $\deg(z_i) = v_p(z_i)(p-1)$. □

Exemple 4. — Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique sur $\mathcal{O}_K$. Posons $\mathrm{fil}\mathcal{E}[p] = (\lambda_1, \lambda_2)$. On obtient la relation $\lambda_1 + p\lambda_2 = \deg \mathcal{E}[p] = 1$. La condition $\lambda_1 > \lambda_2$ se réécrit donc $\lambda_1 > \frac{1}{p+1}$ est dans ce cas $\mathcal{E}[p]^{\deg}_{\lambda_1}$ est le sous-groupe canonique. Soit r la valuation de l'invariant de Hasse évalué sur $E \otimes \mathcal{O}_K/p$. Par la théorie de Lubin-Katz [**Ka**] part. 3, on a alors $\lambda_1 = 1 - r$ si $r \leq 1 - \frac{1}{p+1}$, $\lambda_1 = \frac{1}{p+1}$ sinon.

A.3. Démonstration de la proposition 4.10. — Commençons par rappeler l'énoncé de la proposition :

Proposition A.4. — *Soit F une extension finie de K et G un schéma en groupe fini et plat, de p-torsion, de rang p^2 sur $\mathcal{O}_K$ et de fibre spéciale isomorphe à α. Alors :*

$$\deg G = 1$$

Démonstration. Soit $\mathrm{fil}G = (\lambda_1, \lambda_2)$. Commençons par remarquer que $\mathrm{fil}G^\vee = (1 - \deg G + \lambda_1, 1 - \deg G + \lambda_2)$. En effet, soit $H \hookrightarrow G$ une immersion fermé d'un sous groupe de rang p dans G. Passant aux duaux on en déduit une suite exacte : $H^\perp \hookrightarrow G^\vee \to H^\vee$. Il en résulte que $\deg H^\perp = 2 - \deg G - (1 - \deg H) = 1 - \deg G + \deg H$.
En outre, α étant monogène, G et $G^\vee$ aussi. En effet, soit A l'anneau de G. Par le lemme de Nakayama, A est engendré comme $\mathcal{O}_K$-algèbre par un seul élément, disons x. Considérons donc la surjection $\mathcal{O}_K[X] \to A$ d'idéal I qui applique X sur x. Soit k le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$. Par platitude de A, $I \otimes k$ s'identifie au noyau du morphisme résiduel : $k[X] \to A \otimes k$. Par le lemme de Nakayama à nouveau, I est principal, et il peut être engendré par un polynôme unitaire sinon A ne serait pas plate. On raisonne de même avec $G^\vee$.
On déduit de la proposition A.3 les formules $\deg G = \lambda_1 + p\lambda_2$, $\deg G^\vee = 1 - \deg G + \lambda_1 + p(1 - \deg G + \lambda_2)$. Comme $\deg G^\vee = 2 - \deg G$, on obtient $2 - \deg G = 1 - \deg G + p(1 - \deg G) + \lambda_1 + p\lambda_2 = p + 1 - p \deg G$ et finalement $\deg G = 1$. □

Références

[EGA] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique IV*, Publ. Math. I.H.E.S, **28**, 1966.

[A-M] A. Abbès et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adic pour les variétés abèliennes*, Publ. Math. IHES, **99**, 2004.

[A-G] F. Andreatta et C. Gasbarri, *The canonical subgroup for families of abelian varieties*, Compositio Math., **143** (2007), p.566 à 602.

[Bar78] W. Bartenwerfer, *Die erst "metrische" Kohomologiegruppe glatter affinoider Raüme*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser., A 40, n. 1, 1978, p. 1 à 14.

[Ber] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Buz] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc., **16** , n. 1, p. 29 à 55, 2002.

[Bos] S. Bosch, *Lectures on formal and rigid geometry*, prépublication, 2005.

[Col] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math., **124**, 215-241, 1996.

[dJ] A. J. de Jong, *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, J. Algebraic Geom. **2** (1993), n° 4, p. 667 à 688.

[D-R] P. Deligne et M. Rapoport. *Les schémas de modules de courbes elliptiques.* Proc. Antwerpen Conference, vol. 2 ; Lecture Notes in Math. **349** (Springer-Verlag 1973) pp. 143–316.

[Far] L. Fargues, *La Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, à paraître à Journal für die Reine und angewandte Mathematik.

[Far1] L. Fargues, *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles*, avec la collaboration de Yichao Tian, prépublication.

[Ge] A. Genestier, *Un modèle semi-stable de la variété de Siegel de genre* 3 *avec niveau* $\Gamma_0(p)$, Compositio Mathematicae, **123**, 303-328, 2000.

[Hi86] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. ENS, **19**, 231-273, 1986.

[Hi02] H. Hida, *Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, Jour. Inst. Math. Jussieu, **1**, 2002.

[Kas] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. Journal **132** (2006), no. 3, p. 509 à 529.

[K-O] T. Katsura et F. Oort, *Families of supersingular abelian surfaces*, Compositio Mathematica **62**, p. 107 à 167 (1987).

[Ka] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.

[Ka81] N.Katz, *Serre-Tate local moduli*, Surfaces Algébriques, Springer, LNM **868**, 1981.

[K-L] M. Kisin et K. Lai, *Overconvergent Hilbert modular forms* American Journal of Mathematics, **127** (2005), no. 4, 735–783.

[Me] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, LNM, vol **264**, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1972.

[N-G] B.C. Ngô et A. Genestier, *Alcôves et p-rang des variétés abéliennes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **52**, 6 (2002), 1665-1680.

[O-T] F.Oort et J. Tate, *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t.3, 1970, p. 1 à 21.

[Pi] V. Pilloni, *Sur la théorie de Hida pour* GSp_{2g}, soumis à publication, disponible à `www.math.columbia.edu/~pilloni/`.

[P-S] V.Pilloni et B. Stroh, *Sous-groupes canoniques partiels*, à paraître à Manus. Math, disponible à `www.math.columbia.edu/~pilloni/`.

[Str1] B. Stroh, *Compactifications des variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, à paraître aux Bull. de la SMF, disponible à `www.math.univ-paris13.fr/~stroh/`.

[Str2] B. Stroh, *Compactification minimale et mauvaise réduction*, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier, disponible à `www.math.univ-paris13.fr/~stroh/`.

[Til] J. Tilouine, *Siegel varieties and p-adic Siegel modular forms*, Documenta Math., Extra Volume Coates, p. 781 à 817, 2006.

[Urb] E. Urban, *Eigenvarieties on reductive group*, prépublication.

Juin 2009

Vincent Pilloni • *Courriel :* `pilloni@math.columbia.edu`