

# Vecteurs

Damien THOMINE

16 avril 2021

## Les vecteurs



## Objectif

Dans le supérieur, la géométrie affine (ou euclidienne) est développée à partir de la géométrie vectorielle.

Les élèves de collège sont familiers avec la géométrie euclidienne, mais pas avec la géométrie vectorielle.

**Question** : comment introduire la géométrie vectorielle à partir de la géométrie euclidienne ?

Les programmes sont malheureusement peu détaillés, et peu clairs sur la question...

## Quelques repères

- 4e : Déplacements du plan. Translations (**définition naturelle**). Frises et pavages.
- 2nde : Translations (**définition rigoureuse**). Vecteurs : définition, somme et produit par un réel. Colinéarité. Équations réduites. **La somme est introduite via la composition des translations.**
- 1eS : Déterminant et équations cartésiennes de droites. Produit scalaire.
- TS : Même chose, mais dans l'espace.

## Actions libres et transitives

Avant toutes choses, un espace vectoriel est un groupe (pour l'addition) avec une opération supplémentaire (multiplication par un scalaire). On va dans un premier temps récupérer le groupe additif avant de se définir la multiplication.

Le plan euclidien peut être vu comme un “groupe dont on a oublié l'élément neutre”. On peut soustraire des éléments (cela donnera un vecteur), mais on ne peut pas en ajouter (la somme de deux points du plan n'a pas de sens!).

Pour formaliser cette idée, on va parler d'*action de groupe*.

### Definition

Soient  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. On voit  $G$  comme un groupe de transformations (ou symétries) de  $X$ . Cette action est *simplement transitive* si, pour tous  $x, y \in X$ , il existe une unique transformation  $g \in G$  telle que  $g(x) = y$ .

# Actions de groupes

## Exemples :

- $G = \mathbb{Z}$  et  $X$  est l'ensemble des graduations d'une droite. Transformations : translations.
- $G = \mathbb{R}$  et  $X$  est une ligne. Transformations : translations.
- $G = \mathbb{R}^2$  et  $X$  est le plan euclidien. Transformations : translations/vecteurs.
- $G = \mathbb{U}$  et  $X$  est un cercle.
- $G$  est l'ensemble des permutations licites d'un cube de Rubik, et  $X$  est l'ensemble des configurations d'un cube de Rubik.

## Non-exemples :

- $G = \mathbb{R}$  et  $X = \mathbb{R}^2$ , avec  $g(x, y) = (x + g, y)$ . Pourquoi ?
- $G = \mathbb{R}^2$  et  $X = \mathbb{R}$ , avec  $(g_1, g_2)(x) = x + g_1$ . Pourquoi ?

## Le problème

Si l'on connaît  $G$ , on peut facilement construire un espace  $X$  qui convient. Ici, on a la situation inverse : on part de l'espace  $X$  (le plan euclidien), et l'on construit le groupe  $G$  (l'espace  $\mathbb{R}^2$  des vecteurs). Comment faire ?

**Méthode 1 (algébrique)** : définir directement  $G$  comme étant les “bonnes” transformations de  $X$ . La loi de groupe est la composition.

**Méthode 2 (géométrique)** : si un tel groupe  $G$  existe, pour tout couple  $(x, y) \in X^2$ , il existe un unique  $g \in G$  tel que  $g(x) = y$ . On pourrait poser  $g = yx^{-1} := (x, y)$ . Cependant, plusieurs couples  $(x, y)$  correspondent au même élément  $g$ , donc on identifie des couples à l'aide d'une relation d'équivalence  $\sim$ . Formellement, on passe au quotient :  $G \simeq X^2 / \sim$ . L'information sur l'action est cachée dans la relation  $\sim$ , qu'il faut définir à la main.

La loi de groupe est la concaténation : pour tous  $x, y \in X$ , on a  $e = [xx^{-1}]$ ,  $[yx^{-1}]^{-1} = [xy^{-1}]$  et  $[zy^{-1}][yx^{-1}] = [zx^{-1}]$ . **Loi de Chasles.**

**Méthode 3 (analytique)** : On part de l'intuition qu'il manque un élément neutre ‘a  $X$ . Fixons  $x_0 \in X$ . Alors, pour tout  $x \in X$ , il existe un unique  $g \in G$  tel que  $x = g(x_0)$ . On obtient donc une bijection entre  $X$  et  $G$  (qui dépend de  $x_0$  !). Il reste à définir à la main la loi de groupe.

On peut passer d'un point de vue à un autre.

## Exemple 1 : les translations du plan

$X$  est le plan euclidien.  $G \simeq \mathbb{R}^2$  sera un espace vectoriel.

**Méthode 1** : définir le groupe  $G$  des translations du plan euclidien. Un vecteur est une translation. La loi de groupe est la composition.

**Méthode 2** : définir une relation d'équivalence sur les couples de points. La loi de groupe est la concaténation.

**Méthode 3** : fixer une origine. Tout point de  $X$  devient un élément d'un groupe, si l'on définit la bonne loi de groupe.



## Exemple 2 : les entiers relatifs

On se donne une droite graduée et orientée.  $X$  est l'ensemble des graduations.  $G \simeq \mathbb{Z}$ .

**Méthode 1** : définir le groupe  $G$  des translations de la droite qui présevent les graduations. Un entier relatif est une translation. La loi de groupe est la composition.

**Méthode 2** : définir une relation d'équivalence sur les couples de points. La loi de groupe est la concaténation.

**Méthode 3** : fixer une origine. Toute graduation correspond alors à un entier relatif.

## Exemple 3 : les angles orientés

Comment définir un angle orienté ? ici,  $X$  est le cercle, ou de façon équivalente l'ensemble des directions (et sens) du plan.

**Méthode 1** : un angle orienté est une rotation vectorielle. Ajouter deux angles, c'est composer les rotations.

**Méthode 2** : définir une relation d'équivalence sur les couples de directions. La loi de groupe est la concaténation.

**Méthode 3** : fixer une origine. Toute point du cercle correspond alors à un angle orienté (cercle trigonométrique).

# Définition algébrique

## Definition

Un vecteur est une transformation du plan : une translation.

**Propriété-définition** : Pour tous points  $A$  et  $B$ , il existe une unique translation envoyant  $A$  sur  $B$ .

## Avantages :

- Présentation géométrique : lien avec les transformations du plan.
- Point de vue algébrique : composition de transformations, frises et pavages.
- Objet défini de façon intrinsèque. Pas de dépendance en fonction du repère.
- Relation de Chasles explicite.

## Inconvénients :

- Choix de définition non standard.
- Difficultés usuelles dans la manipulation des transformations du plan (obligation de les expliciter, d'expliquer leur propriétés...).
- Quelle définition pour la multiplication par un scalaire ?

## Définition géométrique

### Definition

Un vecteur est une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence sur les paires de points.

**Définition(-propriété ?)** : un vecteur  $\vec{AB}$  est une quantité qui a une direction, une longueur et un sens. Deux vecteurs non nuls  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$  sont équivalents si et seulement si  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles,  $AB = CD$  et  $(A, B)$ ,  $(C, D)$  sont dans le même sens.

### Avantages :

- Présentation géométrique intuitive, en lien avec la physique.
- Objet défini de façon intrinsèque. Pas de dépendance en fonction du repère.
- Relation de Chasles explicite.
- Multiplication par un scalaire intuitive.
- Lien facile entre les notions d'alignement et de colinéarité.

### Inconvénients :

- Notion de sens difficile à formaliser.
- Obligation de manipuler des classes d'équivalence, sans pouvoir le mentionner.
- Choix du point de départ du vecteur.
- Point de base et sens géométrique de la somme.

# Définition analytique

## Definition

On se place dans un repère. Les vecteurs ont eux aussi des coordonnées, que l'on peut manipuler directement.

### Avantages :

- Lien avec le supérieur et l'algèbre linéaire.
- Géométrie analytique.
- Sens intuitif aux opérations (somme, multiplication par un scalaire).

### Inconvénients :

- L'objet (vecteur) et ses propriétés (somme, colinéarités) sont-ils indépendants du repère ?
- Distinction entre point et vecteur moins nette.
- Perte de sens géométrique des opérations.
- Le lien entre propriétés géométriques et coordonnées peut être délicat (par exemple : lien entre colinéarité et alignement).

## Introduction

Afin de comparer ces approches, nous allons résumer avec chacune d'elle ce qu'il faudrait définir ou démontrer pour définir proprement les vecteurs, leur somme, la multiplication par un réel, et le lien entre alignement et colinéarité.

Il est évident qu'en pratique, il est impossible de démontrer toutes ces propriétés devant une classe. De plus, l'approche choisie en pratique est mixte.

## Définition algébrique

- Étant donnés deux points  $A$  et  $B$ , définition de la translation envoyant  $A$  sur  $B$  (ou translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ ). Attention : translation de vecteur nul, parallélogrammes plats.
- **Propriété** : unicité de la translation envoyant  $A$  sur  $B$  : si la translation de vecteur  $\overrightarrow{CD}$  envoie  $A$  sur  $B$ , alors elle est la même transformation que la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- Élément neutre, inverse.
- **Propriété** : la composée de deux translations est une translation.
- Multiplication par un scalaire : définition.
- Alignement de points et colinéarité.

## Définition géométrique

- Étant donnés deux points  $A$  et  $B$ , définition du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- On a en fait défini une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).
- **Propriété** : pour tout point  $A$  et tout vecteur  $\overrightarrow{CD}$ , il existe un unique point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .
- **Définition** :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .
- **Propriété** : la somme ainsi définie ne dépend pas du point de base  $A$ .
- Multiplication par un scalaire : définition (facile !).
- Alignement de points et colinéarité (facile !).



## Définition analytique

- Définition des coordonnées d'un point. Existence et unicité de ces coordonnées.
- Définition des coordonnées d'un vecteur. Si l'on dispose de la définition géométrique du vecteur : **indépendance de ces coordonnées en fonction du représentant.**
- Somme, multiplication par un scalaire : définitions (facile !).
- Somme, multiplication par un scalaire : **indépendance de ces opérations en fonction du représentant**
- Alignement de points et colinéarité (difficile !).

## Vecteurs : une définition

Informellement, un vecteur est défini par :

- sa direction (la droite par laquelle il est porté) ;
- son sens (son orientation le long de la droite) ;
- sa longueur.

Formellement, on identifie les couples de points  $(A, B)$  et  $(C, D)$  tels que :

- les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles ;
- $(A, B)$  et  $(C, D)$  sont dans le même sens ;
- $AB = CD...$

... si  $A \neq B$  et  $C \neq D$ . On définit à par le vecteur nul. On note la classe d'équivalence  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Proposition** : On définit ainsi une relation d'équivalence.

## Vecteurs : une autre définition

Plus souvent, on rencontre par exemple :

### Definition (Définition-Propriété)

Un vecteur  $\vec{AB}$  est une quantité qui a une direction, une longueur et un sens.

Deux vecteurs non nuls  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$  sont équivalents si et seulement si  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles,  $AB = CD$  et les paires de points  $(A, B)$  et  $(C, D)$  sont dans le même sens.

Quelle est la définition ? Quelle est la propriété ?

Quel est l'intérêt de cette approche ?

## Somme de vecteurs

La somme de vecteurs est définie par leur concaténation (relation de Chasles).  
 Informellement,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Formellement : soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs, et  $A$  un point du plan.

Soit  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

Soit  $C$  tel que  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ .

On pose  $\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}$ .

**Proposition** : Soient  $\vec{u}$  un vecteur et  $M$  un point du plan. Il existe un unique point  $N$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ .

**Proposition** : La somme ainsi définie ne dépend pas du point  $A$  choisi.

## Aparte : vecteurs et parallélogrammes

Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

Pour montrer que la somme de vecteurs est bien définie, on veut utiliser la réciproque : si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  alors  $ABCD$  est un parallélogramme.

Qu'est-ce qu'un parallélogramme plat ?

- Côtés opposés parallèles ?
- Côtés opposés de même longueur ?

... ou l'on se contente de l'équivalence  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  si et seulement si  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

## Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient  $\vec{u}$  un vecteur et  $\lambda$  un réel. On définit le vecteur  $\lambda\vec{u}$  comme le vecteur :

- de même direction que  $\vec{u}$  ;
- de même sens que  $\vec{u}$  si  $\lambda > 0$ , et de sens opposé si  $\lambda < 0$  ;
- de longueur  $|\lambda|$  fois la longueur de  $\vec{u}$ .

... les cas  $\vec{u} = \vec{0}$  et  $\lambda = 0$  sont à définir à part.

... il faudrait vérifier que la notion de longueur de vecteur est bien définie.

Formellement : soient  $\vec{u} \neq \vec{0}$  un vecteur,  $\lambda$  un réel et  $A$  un point du plan.

Soit  $B$  tel que  $\vec{AB} = \vec{u}$ .

Soit  $C$  d'abscisse  $\lambda$  sur la droite  $(AB)$  dans le repère  $(A, B)$ .

On pose  $\lambda\vec{u} := \vec{AC}$ .

**Proposition** : La multiplication ainsi définie ne dépend pas du point  $A$  choisi.

## Et ensuite...

Passage en coordonnées. Définition des coordonnées d'un vecteur, addition et multiplication par un réel en coordonnées.

Les coordonnées permettent de démystifier ces opérations d'addition et de multiplication, et de démontrer facilement les axiomes d'espace vectoriel.

Passage en coordonnées : exposé d'Alicia.

Axiomes d'espace vectoriel : exposé de Delphine.

## Introduire les vecteurs

Longtemps, les vecteurs étaient introduits via l'identification de couples de points. Maintenant, la logique du programme est hybride : identification de couples de points, mais s'appuyant sur les transformations (point de vue algébrique) :

- Définir les translations du plan (4ème) : à deux points  $A$  et  $B$ , on associe la translation qui envoie  $A$  sur  $B$ .
- Introduire les vecteurs comme couples de points correspondant à la même translation (2nde). Composition et relation de Chasles.
- Fixer un repère. Coordonnées de vecteurs et opérations algébriques : addition, multiplication par un réel.

À aucun moment on n'identifie explicitement vecteur et translation. Cependant, les translations permettent :

- d'introduire les vecteurs et leur relation d'équivalence ;
- d'introduire la somme de vecteurs (composition des translations) ;
- de glisser un certain nombre de points techniques sous le tapis (non démontrés au cycle 4, admis en 2nde).



## Écueil : les documents Eduscol de cycle 4

Citations extraites du document ressource “Géométrie plane”, Cycle 4.

*Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite.*

Même document :

*Les autres transformations (translations, rotations, homothéties) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles n'est pas un attendu.*

On vous demande de faire de la géométrie en 4ème dans le même cadre qu'à l'école primaire (géométrie perceptive).  
Pas de définition, pas de raisonnement possible, a fortiori pas d'utilisation des translations comme outils de démonstration.

## Les translations : définition

**Question** : Comment définir une translation au collège ?

Version intuitive : Translater une figure, c'est la déplacer sans la déformer, la faire tourner, ou la changer de taille.

Version formelle : À toute paire de points du plan  $A$  et  $B$ , on associe la translation de  $A$  vers  $B$ . Étant donné un point  $C$  du plan, cette translation envoie  $C$  sur le point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme.

**Ce qui est souvent présenté comme *méthode de construction* est en fait une *définition*. Il ne faut pas l'oublier !**

## Propriétés sous-jacentes

Certaines propriétés intuitives peuvent être admises par les élèves (*cf. le cours sur les axiomes en géométrie*) ou cachées :

- Les translations sont des isométries.
- Pour tous  $A$  et  $B$ , il existe une unique translation qui envoie  $A$  sur  $B$ .
- La composée de deux translations est une translation.
- Les translations commutent.

Les compositions de translations sont travaillées dans le cadre des frises et pavages. Pensez à concaténer les vecteurs !

# Grilles

Un savoir-faire consiste à appliquer des translation à des objets en s'aidant d'une grille.

Avantage : introduire les coordonnées d'un vecteur sans introduire de point base (en d'autre termes, les coordonnées du vecteur ne dépendent pas du point base).

Ne pas encore écrire en coordonnées ; préférer au début "2 pas à droite, 1 pas vers le bas" plutôt que  $(2, -1)$ , afin de ne pas identifier encore vecteur et coordonnées.

Tous les exemples de grilles trouvées sont orthonormées...

## Résumé

Penser à introduire le matériel suivant sur les translations dès le cycle 4 :

- méthode de construction des translations (présentée comme définition ou non) ;
- représentation par des flèches ;
- vocabulaire de direction (pas dans le sens usuel !), sens, longueur ;
- les pavages, compositions de translations et concaténations de flèches ;
- le vocabulaire de vecteur.

Le lien avec la physique sont à votre discrétion (cf. sous-section suivante).

## Définition physique

Une physique, une définition possible est par exemple :

*Un vecteur est une grandeur ayant une direction, un sens et une magnitude.*

Les vecteurs sont représentés par des flèches.

Dans une certaine mesure, on peut s'appuyer sur ce type de définition pour dresser des parallèles entre mathématiques et physique (ce qui enrichit les deux). En particulier, on pourra :

- utiliser le vocabulaire de direction, sens, longueur ;
- représenter les vecteurs par des flèches.

Notamment, les notions de direction (parallélisme) et de longueur sont déjà présentes en mathématiques, et une flèche représente naturellement un déplacement (donc une translation).

## Aspect kinesthétique

En physique, les vecteurs sont introduits pour représenter des forces (puis s'étendent à d'autres grandeurs : vitesse, accélération, moment cinétique, champs électrique et magnétique...).

En plus d'une intuition visuelle (géométrique), on dispose occasionnellement d'une intuition kinesthétique. Par exemple ("The Singular Mind of Terry Tao", New York Times, 24 juillet 2015) :

*Early in his career, he struggled with a problem that involved waves rotating on top of one another. He wanted to come up with a moving coordinate system that would make things easier to see, something like a virtual SteadiCam. So he lay down on the floor and rolled back and forth, trying to see it in his mind's eye. "My aunt caught me doing this," Tao told me, laughing, "and I couldn't explain what I was doing."*

C'est le cas ici : on se représente mentalement une force agissant sur soi par sa direction, son sens et son intensité, pas par des coordonnées.

## Attention aux écarts

Faites attention aux différences entre physique et mathématique.

- Comme toute grandeur physique, les vecteurs en physique ont une unité.
- En physique, le point d'application est important : on travaille avec des paires (position, vecteur) ! Il détermine par exemple le couple appliqué à un solide. Il n'est en général pas possible de translater impunément des vecteurs ayant des points d'application différents, contrairement au traitement mathématique.
- Dès la troisième, les élèves peuvent rencontrer des champs de vecteurs en technologie (champs de contraintes sur une construction).



## Définition

Deux points  $A$  et  $B$  définissent une unique translation qui envoie  $A$  sur  $B$ . Cette translation est appelée **translation de vecteur**  $\overrightarrow{AB}$ .

Définition : deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux s'ils définissent la même translation, ou de façon équivalente :

- $D$  est l'image de  $C$  par la translation qui envoie  $A$  sur  $B$  ;
- $B$  est l'image de  $A$  par la translation qui envoie  $C$  sur  $D$  ;
- $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
- les segments  $[AD]$  et  $[BC]$  ont même milieu.

Définition : vecteur nul  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

## Somme et produit

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. La somme  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur correspondant à la translation par  $\vec{u}$ , suivie de la translation par  $\vec{v}$ .

Propriété utilisée : la composée de deux translations est une translation. L'associativité est gratuite (la composition de fonctions est associative). La commutativité des translations implique que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

Théorème (loi de Chasles) :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

Propriétés du vecteur nul, inverse. Éventuellement : notation  $A + \vec{u}$  pour le translaté de  $A$  par  $\vec{u}$ .

Le produit d'un vecteur par un réel est défini comme avec la définition géométrique.

## Quelques avantages

Cette approche a plusieurs avantages :

- introduire naturellement la relation d'équivalence ("correspondre à la même translation") ;
- faire le lien avec le point de vue algébrique, et introduire naturellement la somme de vecteurs ;
- arnaquer les élèves en faisant prendre pour acquis des choses non démontrées au collège, ni explicitées.

Pour tous points  $A$  et  $B$ , existe-t-il une unique translation envoyant  $A$  sur  $B$  ?  
La composition de deux translations est-elle une translation ?

## Cycle 4 : attention aux manuels !

Comme vu précédemment, il faudrait idéalement introduire :

- méthode de construction des translations (présentée comme définition ou non) ;
- représentation par des flèches ;
- vocabulaire de direction (pas dans le sens usuel !), sens, longueur ;
- les pavages, compositions de translations et concaténations de flèches ;
- éventuellement, le vocabulaire de vecteur.

### Extraits de manuels.

Et faites aussi attention aux exercices proposés (*cf. Mission Indigo*)...

## Autour de la définition de vecteur

D'autres définitions de vecteur en géométrie euclidienne existent :

- On identifie  $(A, B)$  et  $(C, D)$  si  $ADBC$  est un parallélogramme, en traitant à part les cas d'alignement (Perrin).
- On identifie  $(A, B)$  et  $(C, D)$  si les segments  $[AC]$  et  $[BD]$  ont même milieu (définition officielle jusqu'en 2019).

Avantage : ne fait pas intervenir le sens...

Inconvénient : ... explicitement.

## Définition du produit par un réel

Le programme laisse la liberté d'introduire la multiplication par un réel géométriquement ou en coordonnées. De nombreux manuels utilisent les coordonnées. C'est plus simple, mais il y a plusieurs inconvénients :

- on veut pouvoir utiliser la multiplication par un réel dans un contexte géométrique (alignement de points, centre de gravité du triangle, barycentre...), car elle donne toute sa puissance aux méthodes vectorielles. Cependant, il est peu cohérent de définir cette opération en coordonnées et de revenir ensuite au point de vue géométrique.
- l'interprétation de la multiplication par un réel en termes de direction, sens, longueur est extrêmement importante. Elle est plus naturelle dans des contextes géométriques, physiques...
- en introduisant la multiplication géométriquement, on n'a pas à montrer (ou admettre) qu'elle est indépendante du repère choisi.

## Colinéarité

**Définition** : Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  ou  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ .

Informellement : si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  sont non nuls, ils sont colinéaires si et seulement s'ils sont portés par des droites parallèles.

**Proposition** : Trois points du plan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

C'est cette proposition qui permet de développer la théorie des équations de droites.

Avec une définition géométrique de la multiplication par un scalaire : **démonstration**.

Avec une définition en coordonnées : ?.

## Travailler en coordonnées : les limites

Le point de vue géométrique est plutôt délaissé dans les programmes. Il y a une tentation de travailler purement numériquement (traduire un problème en équations que l'on résout), quitte à ne pas faire de figure :

*La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.*

Cependant, le point de vue géométrique reste important, ne serait-ce que pour vous. Une des forces de la géométrie analytique est d'allier les deux points de vue, la géométrie guidant les calculs.

Exemple : résolution de système linéaire et intersection de droites, de plans...



## Travailler géométriquement : le besoin d'une méthode

Que ce soit en travaillant géométriquement ou algébriquement, sans méthode, l'élève risque de faire des calculs au hasard en espérant aboutir.

Exemple : Petit x numéro 53 (2000).

*Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Soit  $E$  le point du segment  $[ID]$  tel que  $3IE = ID$ . Montrer que les points  $A$ ,  $E$  et  $C$  sont alignés.*

## Travailler géométriquement : le besoin d'une méthode (2)

Les élèves se retrouvent à appliquer de façon répétée la relation de Chasles en espérant tomber sur le bon résultat (**cf. article**).

Propriété fondamentale du plan : on peut exprimer tout vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs formant une base.

Méthode : fixer deux vecteurs formant une base, et exprimer les vecteurs d'intérêt dans cette base. En bref, sans le dire, travailler en coordonnées.