
Math206 – Equations aux Dérivées Partielles

Feuille d'Exercices 1

NB. Ces exercices, et les corrigés qui suivent, sont issus du site <http://www.bibmath.net>

Exercice 1.1.— Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy), \quad f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}.$$

Exercice 1.2.— Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^2(x + y), \quad f(x, y) = e^{xy}.$$

Exercice 1.3.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est \mathcal{C}^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est \mathcal{C}^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 1.4.— Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x, y) = f(y, x)$.
2. $g(x) = f(x, x)$.
3. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$.
4. $g(x) = f(x, f(x, x))$.

Exercice 1.5.— On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 1.6.— Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0, 0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 1.7.— Démontrer que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 1.8.— Les fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R}^2 , sont-elles de classe C^1 ?

1. $f(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
3. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Indication : Pour les deux premières, on pourra étudier la régularité des dérivées partielles en $(0, 0)$. Pour la dernière, on pourra commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon

Exercice 1.9.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

1. On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

- (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Exercice 1.10.— Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Indication : Intégrer d'abord une équation en fixant l'autre variable. La constante d'intégration dépend de cette variable. Dérivée en utilisant l'autre relation pour l'éliminer...

Exercice 1.11.— Etant données deux fonctions g_0 et g_1 d'une variable réelle, de classe C^2 sur \mathbb{R} , on définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = g_0\left(\frac{y}{x}\right) + x g_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Justifier que f est de classe C^2 , puis prouver que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Exercice 1.12.— On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$

où a est un réel.

1. On note f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f .
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 1.13.— Chercher toutes les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R} vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra faire un changement linéaire de coordonnées de sorte que l'équation se simplifie. . .

Exercice 1.14.— On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et vérifiant :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et $F(u, v) = f(x, y)$. Démontrer que $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.
3. Conclure.

Exercice 1.15.— Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Exercice 1.16.— Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique si son laplacien est nul, ie si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe C^3 . Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.
2. On suppose désormais que f est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Corrigés

Corrigé 1.1.— Il est facile de vérifier que par exemple $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable, et de même pour les autres fonctions. On trouve respectivement :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{-x} \sin y.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cos(xy) - y(x^2 + y^2) \sin(xy), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy). \end{aligned}$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

Corrigé 1.2.— Il suffit de dériver successivement par rapport aux bonnes variables. Remarquons que les fonctions sont clairement de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et donc que les dérivées croisées d'ordre 2 sont égales.

1. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 2xy, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x + 2y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2x. \end{aligned}$$

2. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^2 e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x^2 e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= e^{xy} + xye^{xy}. \end{aligned}$$

Corrigé 1.3.—

1. La fonction $t \mapsto (2 + 2t, t^2)$ est de classe C^1 , car polynomiale, donc g est de classe C^1 par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on note $u(t) = 2 + 2t$ et $v(t) = t^2$, alors

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)),$$

soit

$$g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2).$$

2. La fonction $(u, v) \mapsto (uv, u^2 + v^2)$ est de classe C^1 car polynomiale, donc h est de classe C^1 . Notons $r(u, v) = uv$ et $q(u, v) = u^2 + v^2$. Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v), q(u, v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v), q(u, v)).$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Corrigé 1.4.—

1. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x},$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x),$$

et symétriquement

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$

Pour ceux qui se perdent dans ce calcul formel, poser $u(x, y) = y$ et $v(x, y) = x$, on a $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots$$

2. On a :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

3. Notons, pour simplifier, $h(x) = f(x, x)$. On a donc :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)).$$

De même, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, h(x)).$$

4. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient la somme des quantités précédemment calculées.

Corrigé 1.5.— D'une part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{1/4}.$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$. Du fait que $f(0, t) = 0$ pour tout réel t , f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = |t|^{-1/2}.$$

Ceci tend vers $+\infty$ si t tend vers 0, et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$.

Corrigé 1.6.—

1. Prouvons d'abord que f n'est pas continue. En effet, on a

$$f(e^{-n^2}, 1/n) = -1,$$

qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini. Fixons maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et démontrons que f admet une dérivée suivant (a, b) en $(0, 0)$. Soit $t \neq 0$. On a

$$\frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \begin{cases} tb^2(\ln(t) + \ln(a)) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 (en particulier, parce que $t \ln t$ tend vers 0 en 0). Ainsi, f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant le vecteur (a, b) qui est nulle.

2. De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

D'autre part, fixons $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et prouvons que g admet une dérivée suivant (a, b) en $(0, 0)$. On a

$$\frac{g(ta, tb) - g(0, 0)}{t} = \frac{t^2 a^2 b}{t^4 a^4 + t^2 b^2}.$$

Si $b = 0$, ceci est nul, sinon

$$\frac{g(ta, tb) - g(0, 0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{a^2}{b}.$$

Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée partielle en $(0, 0)$ suivant le vecteur (a, b) qui vaut $\frac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et qui vaut 0 si $b = 0$.

Corrigé 1.7.—

1. De la majoration $x^2 \leq x^2 + y^2$, on obtient que

$$|f(x, y)| \leq y^3,$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$. D'autre part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 y^2 \frac{3x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. On a en effet :

$$f(x, 0) - f(0, 0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$. Mais on a, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2|xy| \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{4} |3x^2 + y^2|.$$

On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$.

2. On commence par étudier la continuité de f en $(0, 0)$ (f est clairement continue ailleurs).

On a

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &\leq x^2 y^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq (x^2 + y^2)^2 |\ln(x^2 + y^2)| \\ &\leq (x^2 + y^2) \times (x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)|. \end{aligned}$$

Du fait que $u \ln u$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0^+ , on en déduit que f est continue en $(0, 0)$. Ensuite, remarquons que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable ailleurs qu'en $(0, 0)$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pour étudier l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$, on étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. On va maintenant prouver la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. Le même raisonnement que pour la continuité de f (en utilisant par exemple $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$) prouve que $2xy^2 \ln(x^2 + y^2)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part,

$$\left| \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 2x^2|y|$$

ce qui prouve également que $\frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2}$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$, et par suite sur \mathbb{R}^2 . Enfin, par symétrie des variables x et y , ce que l'on vient de démontrer est aussi valable pour les dérivées partielles par rapport à la deuxième variable. Ainsi, f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Corrigé 1.8. — On remarque d'abord que, dans les 3 cas, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|,$$

et $|x| \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Ainsi, f est continue en $(0, 0)$. De plus, un calcul facile montre que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En particulier, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, t) = -1$ tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a aucune chance d'être continue en $(0, 0)$ (alors qu'on n'a même pas étudié l'existence d'une dérivée partielle en $(0, 0)$!). Ainsi, f n'est pas de classe C^1 .

2. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} + |y| \times \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, f est continue en $(0, 0)$. D'autre part, un calcul facile montre que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Il vient, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, t) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut pas être continue en $(0, 0)$ et f n'est pas C^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. On va commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon. Clairement, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, on a $g'(t) = 0$ si $t < 0$ et $g'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$. On a donc $g'(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. On en déduit, par le théorème de prolongement d'une dérivée, que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $g'(0) = 0$. Maintenant, $f = g \circ \phi$ avec $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Par composition, f est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Corrigé 1.9.—

1. La fonction g est C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 . On a :

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

2. (a) On peut alors écrire $g(t) = tf(x, y)$, et le calcul de la dérivée de g donne $g'(t) = f(x, y)$. La comparaison avec l'expression obtenue à la question précédente donne le résultat.
- (b) Il suffit d'appliquer la relation précédente pour $t = 0$. On a $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Corrigé 1.10.—

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x, y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + Cte$. Cette constante dépend de y , qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

Puisque f est C^1 , C est également C^1 et la deuxième relation donne

$$C'(y) = 0,$$

c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A.$$

Réciproquement, une telle fonction est solution du système.

2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x, y)$. De $g'(x) = e^x y$, on tire $g(x) = e^x y + cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^x y + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y , et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 + Cte$. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = e^x y + y^2 + A.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions.

3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + C(y)$. On dérive par rapport à y , et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2 , les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.

Corrigé 1.11.— La fonction f est de classe C^2 comme composée de fonctions toutes de classe C^2 . On a ensuite, en notant $t = y/x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}g'_0(t) + g_1(t) - \frac{y}{x}g'_1(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2y}{x^3}g'_0(t) + \frac{y^2}{x^4}g''_0(t) + \frac{y^2}{x^3}g''_1(t) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x}g'_0(t) + g'_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}g'_0(t) - \frac{y}{x^3}g''_0(t) - \frac{y}{x^2}g''_1(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2}g''_0(t) + \frac{1}{x}g''_1(t).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de faire la somme demandée pour obtenir le résultat.

Corrigé 1.12.—

1. Par composition, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

2. On intègre cette équation. Pour tout v , il existe une constante $h(v)$ telle que

$$f(u, v) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Puisque la fonction $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est de classe C^1 , il en est de même de $v \mapsto h(v)$.

3. g est solution de l'équation si et seulement si il existe une fonction h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 telle que, pour tout u, v , on a :

$$g \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Pour revenir à x et y , il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$: on a donc

$$g(x, y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y).$$

Corrigé 1.13.— Dans ce genre d'exercice, l'idée est de faire un changement de variables linéaire en posant $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, et en définissant $f(x, y) = F(u, v)$. Quand on ne donne pas explicitement le changement de variables dans l'énoncé, le mieux est encore de garder les constantes dans les calculs, et de les choisir au dernier moment de sorte que tout s'élimine. On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial F}{\partial u} + c \frac{\partial F}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = b \frac{\partial F}{\partial u} + d \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = (a - 3b) \frac{\partial F}{\partial u} + (c - 3d) \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Prenons $c = 3$, $d = 1$, $b = 0$ et $a = 1$ (qui est bien un changement de variables [inversible]). L'équation devient alors $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. F est fonction uniquement de v , et f est solution de l'équation si, et seulement si, il existe g une fonction C^1 définie sur \mathbb{R} et telle que

$$f(x, y) = g(3x + y).$$

Corrigé 1.14.—

1. On dérive la relation par rapport à t et on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = 0.$$

Il suffit ensuite de faire $t = 0$ pour conclure.

2. Commençons par exprimer x et y en fonction de u et v . On trouve $x = (u+v)/2$ et $y = (u-v)/2$. Ainsi,

$$F(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

On calcule la dérivée partielle par rapport à u en utilisant la dérivée d'une fonction composée. On trouve

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = 0.$$

3. L'équation précédente nous dit que F ne dépend que de v : il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = g(v)$. Si on revient à f , si f vérifie la relation initiale, alors il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = g(x-y)$. Réciproquement (à ne pas oublier!), si f s'écrit $f(x, y) = g(x-y)$, alors on a bien $f(x+t, y+t) = f(x, y)$ pour tous x, y, t de \mathbb{R} .

Corrigé 1.15.— On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2 . La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Corrigé 1.16.—

1. Posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$. Alors, d'après le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0.$$

On prouve exactement de la même façon que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique. D'autre part, posons $h = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$. Alors,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}.$$

On trouve de même que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}.$$

Ainsi,

$$\Delta(h) = 2\Delta(f) + x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

en vertu de la première partie de la question.

2. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2 + y^2) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2\varphi''(x^2 + y^2).$$

De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 + y^2).$$

En posant $t = x^2 + y^2$, on en déduit que, puisque $\Delta(f) = 0$,

$$\varphi'(t) + t\varphi''(t) = 0.$$

Ainsi, φ' est solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + y = 0$.

3. On résout l'équation différentielle précédente. Ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto C/x$. En intégrant, on trouve qu'il existe deux constantes $C, D \in \mathbb{R}$ de sorte que $\varphi(x) = C \ln(x) + D$. Ainsi, f s'écrit nécessairement $f(x, y) = C \ln(x^2 + y^2) + D$. Réciproquement, on vérifie que toute fonction de la forme précédente est harmonique.