Université de Paris Sud 11 **L2 – MPI**
Mathématiques **2ème semestre 11/12**

Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{1+x^n}\cdot$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.
2. Expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 2.2.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$

1. Dresser le tableau de variation de f_n. On discutera en fonction de la parité de n.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
3. Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
4. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 2.3.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}e^{-x}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$? sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$?
3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que la suite (g_n) définie sur $[0,1]$ par $g_n(u) = \frac{u}{1+u}e^{-u/n}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On pourra montrer que $|e^{-x} - 1| \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
5. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)du$.
6. Soit $A > 0$. Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^A f_n(t)dt$ quand $n \to +\infty$. On pourra découper l'intégrale en deux, pour utiliser la question précédente.
7. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.4.— Soit (P_n) une suite de polynômes, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Que dit le critère de Cauchy uniforme pour la suite (P_n) ?
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est borné.
3. En déduire qu'il existe une suite (a_n) de réels tels que, pour tout $n \geq N$, $P_n(x) = P_N(x) + a_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que la suite (a_n) converge. Notant a sa limite, montrer que $f(x) = P_N(x) + a$.
5. Que peut-on en déduire sur la nature de la fonction f ?

Exercice 2.5.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$. On s'intéresse à la série de terme général f_n.

1. En utilisant le critère de D'Alembert, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$, et qu'elle diverge en dehors de cet intervalle.
2. Calculer la somme S de cette série de fonctions.
3. Comparer $S(1)$ et $\sum_{n\geq 0} f_n(1)$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$.

Exercice 2.6.— On s'intéresse à la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$

1. En étudiant la suite de ses sommes partielles, montrer que cette série converge uniformément sur $[-1,1]$.
2. Calculer la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$. La série peut-elle être normalement convergente sur [0,1] ?
3. Même question sur $[-1,0]$. On pourra étudier la fonction $g_n = (-1)^n f_n$.

Exercice 2.7.— Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n^2}\cdot$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée de f_n. Montrer alors que la série ne peut pas converger normalement sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que si une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I, alors $\|f_n\|_{I,\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On pourra introduire les fonctions $R_n(x) = \sum_{p\geq n} f_p(x)$.
4. En déduire que cette série ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
5. Pour $\alpha > 0$, on pose $g_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+n^2}\cdot$. En vous aidant de ce qui précède, étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum_{n\geq 0} g_n$ sur $[0,+\infty[$.
6. Montrer que pour $\alpha \in]1,2[$, la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. On pourra minorer $R_n(x)$ par $R_n(x) - R_{2n+1}(x)$.
7. Montrer néanmoins que pour $\alpha \in]1,2[$, la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ convergerge uniformément sur tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 2.8.— Montrer que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{x^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.9.— Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}(\cos x)^n \sin(nx)$, pour $n \geq 1$. On étudie la série de fonction de terme gênéral f_n.

1. Montrer qu'il suffit d'étudier cette série de fonction sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note désormais S sa somme
3. Montrer que $f_n'(x) = (\cos x)^{n-1}\cos((n+1)x)$, et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $]a, \frac{\pi}{2} - a[$ pour tout $a > 0$ petit. Que peut-on en déduire pour S ?
4. Que vaut $\mathrm{Re}\sum_{n\geq 1}(\cos(x)e^{ix})^{n-1}$? En déduire une expression simple pour $S'(x)$, puis pour $S(x)$.