# Corrigé du Devoir D1

**Exercice D1.1.**— 1. Supposons qu'il existe une telle fonction $g$. On doit avoir, pour $x \geq 0$, $g(x) = f(\sqrt{x})$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et pour $x > 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^1 f''(t\sqrt{x})\sqrt{x}dt,$$

compte tenu du fait que les dérivées de $f$ d'ordre impair sont nulles en 0 (ce sont des fonctions impaires). Ce qui montre que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \qquad \forall x > 0,\ g^{(k)}(x) = \frac{2^{1-2k}}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t^2)^{k-1} f^{(2k)}(t\sqrt{x})dt,$$

est vraie pour $k = 1$. Supposons alors que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k$. On a alors, par dérivation sous le signe somme (fonction $\mathcal{C}^\infty$ et on intègre sur un compact),

$$g^{(k+1)}(x) = \frac{2^{1-2k}}{(k-1)!} \int_0^1 t(1-t^2)^{k-1} f^{(2k+1)}(t\sqrt{x})dt.$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) =& \frac{2^{1-2k}}{(k-1)!} \left\{ \left[ \frac{(1-t^2)^k}{-4k\sqrt{x}} f^{(2k+1)}(t\sqrt{x}) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^k}{-4k\sqrt{x}} f^{(2k+2)}(t\sqrt{x})\sqrt{x}dt \right\} \\ =& \frac{2^{1-2(k+1)}}{k!} \int_0^1 (1-t^2)^k f^{(2k+2)}(t\sqrt{x})dt, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi, pour tout $k \geq 0$, $g^{(k)}(x)$ admet une limite $a_k$ quand $x \to 0^+$. La fonction $g$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.
Soit alors $g_-$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact autour de 0 dont les dérivées successives en 0 sont les $a_k$. Une telle fonction $g_-$ peut être construite à l'aide du procédé de Borel. D'après ce qui précède, la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{pour} \quad x > 0, \\ g_-(x) & \text{pour} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et répond à la question.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $f_+, f_-$ les fonctions définies par

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\ f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a $f = f_+ + f_-$, et $f_+, f_-$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, respectivement paire et impaire. Puisque $f_-(0) = 0$, on peut aussi écrire $f_-(x) = xg_-(x)$, avec $g_- \in \mathcal{C}^\infty$ fonction paire. D'après la question 1/, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $g_1$ et $g_2$ telles que $f_+(x) = g_1(x^2)$ et $g_-(x) = g_2(x^2)$, et l'on a bien

$$f(x) = g_1(x^2) + xg_2(x^2).$$

**Exercice D1.2.—** 1. Pour $x \le 0$, on a $0 < e^x \le 1$, donc $0 < \phi(x) \le 1$. Pour $x > 0$, on a $e^x > x$, donc également $0 < \phi(x) \le 1$, ce qui montre que $\phi$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Quand $x \to -\infty$, on a $\phi(x) \sim e^x$, et pour $x > 0$ assez grand, $\phi(x) \le e^{-x}$, ce qui montre que la fonction continue $\phi$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. D'ailleurs, puisque $(e^{-e^x})' = -e^x e^{-e^x}$, on a

$$\int \phi(x)dx = [-e^{-e^x}]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

2. Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\phi \in L^\infty$ le produit de convolution $f * \phi$ definit une fonction de $L^\infty$ :

$$f * \phi(x) = \int_0^{+\infty} f(s) \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k}{k!} e^{(k+1)(x-s)} ds.$$

Posons $\psi_n(x,s) = f(s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} e^{(k+1)(x-s)} H(s)$. On a $\psi_n(x,s) \to H(s)f(s)\phi(x-s)$ quand $n \to +\infty$, et aussi :

$$\begin{aligned} |\psi_n(x,s)| &\le |f(s)| \sum_{k \ge 0} \frac{1}{k!} e^{(k+1)(x-s)} H(s) \le |f(s)| e^{x-s} e^{e^{x-s}} H(s), \\ &\le |f(s)| e^x e^{e^x} H(s) \in L^1(\mathbb{R}_s). \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée entraine donc bien

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(s) \sum_{k=0^n} \frac{(-1)^k}{k!} e^{(k+1)(s-x)} ds = f * \phi(x).$$

3. On va montrer que $\phi_n * f$ tend vers $f$ dans $L^1$. Par conséquent il existe une suite extraite $\phi_{n_k} * f$ qui tend vers $f$ presque partout. On peut montrer facilement, en remplaçant $\phi$ par $\phi_n$ dans le raisonnement de la question 2, que $\phi_n * f = 0$ pour tout $n$. On aura donc obtenu le résultat demandé.

On a d'abord

$$|f * \phi_n(x) - f(x)| \le \int |f(x-s) - f(x)| \phi_n(s) ds \le \int |f(x - u/n) - f(x)| \phi(u) du.$$

Donc

$$\int |f * \phi_n(x) - f(x)| dx \le \int (\int |f(x-u/n) - f(x) dx)| \phi(u) du = \int \|\tau_{u/n} f - f\|_{L^1} \phi(u) du.$$

On utilise alors le théorème de convergence dominée : puisque les translations sont continues dans $L^1$, $\|\tau_{u/n} f - f\|_{L^1} \to 0$ quand $n \to +\infty$. De plus

$$\|\tau_{u/n} f - f\|_{L^1} \phi(u) \le 2\|f\|_{L^1} \phi(u) \in L^1,$$

ce qui donne bien $\int |f * \phi_n(x) - f(x)|dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice D1.3.—** 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([-N, N])$. On a

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq \sum_{n=0}^{N} |\phi^{(n)}(n)| \leq \sum_{n=0}^{N} \|\phi^{(n)}\|_\infty,$$

donc $T$ définit bien une distribution.
2. On a

$$(*) \qquad \langle T, \phi_\alpha\rangle = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^k}\phi^{(k)}(\frac{k-n-1}{\alpha}).$$

On choisit alors $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-1, 1[)$ telle que $\phi^{(n+1)}(0) = 1$. On peut par exemple prendre $\phi$ de la forme $\phi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x)$, avec $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-1, 1[)$ telle que $\psi = 1$ près de 0.
Pour cette fonction $\phi$, (*) devient

$$\langle T, \phi_\alpha\rangle = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\phi^{(n+1}(0) = \frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

Supposons que $T$ est d'ordre $n$. Puisque les $\phi_\alpha$ ont toutes leur support dans $[-1, 1]$ pour $\alpha < 1$, on doit avoir, pour une certaine constante $C > 0$, et pour tout $0 < \alpha < 1$.

$$\frac{1}{\alpha^{n+1}} = |\langle T, \phi_\alpha\rangle| \leq C\sum_{k\geq 0}^{n} \|\phi_\alpha^{(k)}\|_\infty \leq C\sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{\alpha^k}\|\phi^{(k)}\|_\infty \leq \frac{C}{\alpha^n}\sum_{k\geq 0}^{n} \|\phi^{(k)}\|_\infty,$$

ce qui est absurde.
3. La distribution $T$ n'a donc pas d'ordre : $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \neq \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}'^{(k)}(\mathbb{R})$.

**Exercice D1.4.—** 1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$|T(\phi)| = |\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(\phi(\frac{1}{n}) - \phi(0))| = |\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\int_0^1 \phi'(\frac{t}{n})dt| \leq \|\phi'\|_\infty \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

ce qui montre que $T$ est une distribution d'ordre 1.
Le support de $T$ clairement inclus dans $K = \{0\}\bigcup\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Réciproquement, pour $n \neq 0$, et tout voisinage $V$ de $1/n$, on peut construire une fonction plateau $\phi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\phi \subset ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[\cap V$, et $\phi_n(\frac{1}{n}) = 1$. On a alors $\langle T, \phi_n\rangle = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset \operatorname{supp} T$. Puisque $\operatorname{supp} T$ est un fermé, $K = \overline{\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}} \subset \operatorname{supp} T$, et finalement $K = \operatorname{supp} T$.
2. Soit $\phi_n$ une fonction plateau telle que $\operatorname{supp}\phi_n \subset ]\frac{1}{n+1}, 2[$, $0 \leq \phi_n \leq 1$, et $\phi_n(x) = 1$ pour tout $x \in [\frac{1}{n}, 1]$. On a

$$\langle T, \phi_n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty,$$

bien que

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^1(K)} = \|\phi\|_{\mathcal{C}^0(K)} + \|\phi'\|_{\mathcal{C}^0(K)} = 1,$$

puisque $\phi_n' = 0$ sur $K$.
3. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^-$ par $g(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1-x}\cdot$ On a $g(0) = f(0)$ et $g'(x) = f'(0)\frac{1}{(1-x)^2}$, donc $g'(0) = f'(0)$. La fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in [0,1], \\ g(x) & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1]$. De plus, pour $x \leq 0$, on a

$$|g(x)| \leq |f(0)| + |f'(0)| \text{ et } |g'(x)| \leq |a_1|,$$

d'où $|\tilde{f}(x)| \leq |f(0)| + 2|f'(0)| \leq 2\|f\|_{\mathcal{C}^1}$. On peut faire la même construction en 1, et on obtient une fonction $Pf$ ayant les propriétés demandées.
4. On pose $\psi = \phi - P(\phi_{|[0,1]})$. On a $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, et $\psi(x) = \psi'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On peut, quitte à écrire $\psi = \chi\psi + (1-\chi)\psi$ avec $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(x) = 0$ pour $x < 1/4$ et $\chi(x) = 1$ pour $x > 1/2$, supposer que $\psi = 0$ sur $[0, +\infty[$. Le problème en 1 (i.e. pour $(1-\chi)\psi$ se traite de la même manière.
Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty([-1,1])$ une fonction plateau, avec $0 \leq \chi \leq 1$, et $\chi = 1$ sur $[-1/2, 1/2]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_n(x) = \chi(nx)$. On a

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, \chi_n \psi \rangle| + \langle T, (1-\chi_n)\psi \rangle|.$$

Puisque $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}(1-\chi_n)\psi = \emptyset$, le second terme du membre de droite est nul. On va montrer que le premier terme peut être rendu aussi petit que l'on veut.
Les $\chi_n$ ayant toutes leur support inclus dans $[-1,1]$, et puisque $T$ est d'ordre 1, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\langle T, \chi_n \psi \rangle| \leq C(\|\chi_n \psi\|_\infty + \|\chi_n' \psi\|_\infty + \|\chi_n \psi'\|_\infty).$$

Puisque $\chi_n \psi$ est continue, il existe $x_n \in [-1/n, 0]$ tel que

$$\|\chi_n \psi\|_\infty = \sup_{x \in \operatorname{supp} \chi_n \psi} |\chi_n(x)\psi(x)| = |\chi_n(x_n)\psi(x_n)| \leq |\psi(x_n)|.$$

Puisque $\psi$ est continue et $x_n \to 0$, on voit que $\|\chi_n \psi\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. On montre de la même manière que $\|\chi_n \psi'\|_\infty \to 0$. Enfin, en utilisant la formule de Taylor, on a

$$\|\chi_n' \psi\|_\infty = |\chi_n'(x_n)\psi(x_n)| = |\chi'(nx_n)n\psi(x_n)| = |\chi'(nx_n)n(\psi(0) + x_n\omega(x_n))|,$$

pour une fonction continue $\omega$, et l'on voit également que $\|\chi_n' \psi\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\langle T, \psi \rangle = 0$, et donc que

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, P(\phi_{|[0,1]}) \rangle.$$

Finalement, on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C\|P(\phi_{|[0,1]})\|_{\mathcal{C}^1([0,1])} \leq 2C\|\phi\|_{\mathcal{C}^1([0,1])}.$$