Feuille d'Exercices 5

Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 5.1.— Soit T_n la distribution donnée par la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}$.

1. Montrer que $T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, mais que (T_n) ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la fonction test $\phi(x) = e^{-x^2/2}$.

Exercice 5.2.— Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ définies par les fonctions suivantes :

1. e^{iax} $(a \in \mathbb{R})$, $\cos x$, $\cos^k x$ $(k \in \mathbb{N})$, $x \sin x$, $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ $(a > 0)$.
2. $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, $\dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 5.3.— On note H_ϵ la fonction donnée par $H_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x}H(x)$, où H est la fonction de Heaviside. On note aussi $G(x) = H(-x)$ et $G_\epsilon(x) = H_\epsilon(-x)$.

1. Montrer que toutes ces fonctions définissent des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et calculer leur transformée de Fourier. Retrouver la transformée de Fourier de $\dfrac{\sin x}{x}$.
2. En déduire que (cf. Exercice 2.3) $\delta_0 = \dfrac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}(\dfrac{1}{x-i\epsilon} - \dfrac{1}{x+i\epsilon})$.
3. Utiliser ce qui précède pour calculer la transformée de Fourier de chacune des distributions suivantes, après avoir montré qu'il s'agit de distributions tempérées :

$$\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \quad \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) \quad \mathrm{Pf}(\frac{H(x)}{x}) \quad \frac{1}{(x+i0)^2}$$

Exercice 5.4.—Pour $\epsilon > 0$ on pose $P_\epsilon = \epsilon D^2 + iD + 1$, où D est l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$.

1. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $P_0 u = \delta$. Quelles sont les solutions tempérées ?
2. Quelles sont les solutions tempérées u_ϵ de l'équation $P_\epsilon u = \delta$?
3. Déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite u_ϵ.

Exercice 5.5.— Soit ω un nombre réel strictement positif. On considère l'équation différentielle sur la droite réelle,

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (1-\omega^2 x)u = 0. \tag{E}$$

1. On désigne par Δ_ω l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E) qui sont des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$. Montrer que les transformées de Fourier des éléments de Δ_ω vérifient une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}$. Résoudre cette équation. Quelle est la dimension de Δ_ω ?

2. Soit f un élément de Δ_ω.

   a) Montrer que f est une fonction continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer en outre que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est de carré intégrable, et en déduire que f est intégrable.

   c) On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$. Calculer, pour $f \neq 0$, $q(\omega) = \dfrac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx}$.

Exercice 5.6.— Dans $\mathbb{C}$, on note $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, et on dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})$ est holomorphe si $\partial_{\overline{z}} T = 0$.

1. Montrer que les seules distributions holomorphes et tempérées sont les polynômes en z.
2. Soit f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Montrer que f définit une distribution tempérée sur $\mathbb{C}$ et calculer $\partial_{\overline{z}} \widehat{f}$.
3. On rappelle que $\dfrac{1}{\pi z}$ est une solution élémentaire de $\partial_{\overline{z}}$. Déduire de ce qui précède un calcul de $\widehat{f}$.

Exercice 5.7.— Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on pose $\langle T, \phi\rangle = \displaystyle\int \phi(x,x)dx$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.
2. On se propose de calculer $\widehat{T}$.

   a) Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2_\xi)$. Montrer que l'on a $\langle \widehat{T}, \psi\rangle = \lim\limits_{\epsilon \to 0} I_\epsilon, \quad I_\epsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon x^2}\widehat{\psi}(x,x)dx$.

   b) En exprimant $\widehat{\psi}(x,x)$ montrer que l'on a $I_\epsilon = 2\sqrt{\pi}\int\int e^{-\zeta^2}\psi(\xi, 2\sqrt{\epsilon}\zeta - \xi)\; d\xi\; d\zeta$.

   c) En déduire $\widehat{T}$.

Exercice 5.8.— Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ une fonction à support compact telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 0$.

1. Établir que $\widehat{f}(\xi) = O(\|\xi\|)$ au voisinage de $\xi = 0$.
2. En déduire qu'il existe une unique solution $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ de l'équation $-\Delta u = f$.
3. Ceci reste-t-il vrai sans l'hypothèse $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 0$?
4. Que peut-on dire de la régularité de u à l'extérieur du support de f ?

Exercice 5.9.— Soit $\lambda > 0$. On note $W_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la distribution définie par $W_\lambda = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\lambda k}$.

1. Montrer que les ditributions tempérées u vérifiant
$$(\delta_\lambda - \delta_0) * u = 0 \text{ et } (e^{2i\pi x/\lambda} - 1)u = 0$$
   sont exactement les multiples de W_λ.
2. En déduire que $\widehat{W_\lambda} = C(\lambda)W_{2\pi/\lambda}$ pour une certaine constante $C(\lambda)$.
3. Calculer $C(\lambda)$ en utilisant une fonction test bien choisie.
4. En déduire la formule de Poisson : pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Exercice 5.10.— *Paramétrixe des opérateurs elliptiques à coefficients constants.*
On considère l'opérateur différentiel d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$à coefficients constants $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Pour $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, et on considère les polynômes

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \quad \text{et} \quad p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (i\xi)^\alpha.$$

1. Vérifier que pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(P(T)) = p\mathcal{F}(T)$.
2. On dit que P est elliptique si son symbole principal $p_m(\xi)$ ne s'annule qu'en $\xi = 0$.
   a) Les opérateurs suivants sont-ils elliptiques :
   $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ et Δ^k sur $\mathbb{R}^n$, $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$,
   $Q = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ et $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ agissant dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$?
   b) Soit $P = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1\leq i\leq n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ un opérateur d'ordre 2, avec $a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{R}$.
   À quelle condition sur la matrice $A = (a_{i,j})$, P est-il elliptique ?

On suppose désormais que P est un opérateur elliptique.

3. Montrer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que $|p_m(\xi)| \geq C_0\|\xi\|^m$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe $C_1 > 0$ et $R > 0$ tels que $|p(\xi)| \geq C_1\|\xi\|^m$ pour tout $\|\xi\| \geq R$.
4. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\chi(\xi) = 1$ pour $\|\xi\| \leq R$. On note $q = \dfrac{1-\chi}{p}$.
   Montrer que $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En déduire qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que $PE = \delta_0 + r$. (E s'appelle une paramétrix de P.)
5. a) Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\partial_\beta(x^\alpha E)$ soit continue si $|\alpha| \geq k$.
   On pourra montrer que la transformée de Fourier de $\partial_\beta(x^\alpha E) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha|$ assez grand.
   b) En déduire que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
6. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si une distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ satisfait $PT = f$ avec $f \in C^\infty(U)$, alors $T \in C^\infty(U)$.

Exercice 5.11.— Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x)$ et $t \geq 0$ on pose $u(t) = \overline{\mathcal{F}}(e^{-t\xi^2}\widehat{f})$.

1. Montrer que $u(t)$ est bien définie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x)$.
2. Montrer que si $f \in H^s(\mathbb{R}_x)$ alors, pour tout $t \geq 0$ on a $u(t) \in H^s(\mathbb{R}_x)$ et

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^s}$$

3. On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R}_x)$.
   Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a $D_x^k u(t) \in L^2(\mathbb{R}_x)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $\|D_x^k u(t)\| \leq \frac{C}{t^{\frac{k}{2}}}\|f\|_{L^2}$.
4. a) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}_x)$.
   Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$u(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

   b) En déduire une majoration de $u(t)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ pour $t > 0$.

5. On suppose $f \in L^1(\mathbb{R}_x)$ et $xf \in L^1(\mathbb{R}_x)$.
a) Montrer que $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}_\xi) \cap L^\infty(\mathbb{R}_\xi)$.
b) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(0)| \leq C|\xi| \, \|xf\|_{L^1}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
c) On pose $v(t,\xi) = (\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(0)) \, e^{-t\xi^2}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|v(t,\xi)| \leq \frac{C}{t} \, \|xf\|_{L^1}.$$

d) En déduire que l'on peut ecrire

$$u(t) = \Big(\int f(x) \, dx \Big) \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + R(t)$$

oú $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_x)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|R(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t} \|xf\|_{L^1}.$$

Exercice 5.12.— Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on note $T \circ A$ la forme linéaire définie sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ par $\langle T \circ A, \phi \rangle = \dfrac{1}{\det A} \langle T, \phi \circ A^{-1} \rangle$.

1. Montrer que $T \circ A$ est une distribution.
2. Montrer que, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{T \circ A} = \frac{1}{\det A} \widehat{T} \circ ({}^t A)^{-1}$.
3. Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution homogène de degré λ est homogène de degré $-n - \lambda$.
4. On veut calculer la transformée de Fourier T de la distribution $x_+^{-1/2}$.
   (a) Montrer que T doit vérifier l'équation différentielle $\xi T' + \frac{1}{2} T = 0$.
   (b) Résoudre cette équation, et en déduire que $T = C_+ \xi_+^{-1/2} + C_- \xi_-^{-1/2}$.
   (c) Montrer que $C_+ - C_- = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5.13.—(*Méthode de la phase stationnaire pour les phases quadratiques*) Soit A une matrice $n \times n$ symétrique et inversible.

1. On veut calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée définie par la fonction $f(x) = e^{i\lambda\langle Ax, x\rangle}$, où $\lambda > 0$.
   (a) On pose $I(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zx^2/2} dx$ pour $z \in \mathbb{C}$. Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire $I(z)$ pour $\operatorname{Re} z \geq 0$.
   (b) Soit $a \in R^*$. Montrer que la fonction $g(x) = e^{iax^2/2}$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Former une équation différentielle simple satisfaite par g.
   (c) Montrer que $\hat{g}(\xi) = Ce^{-i\xi^2/2a}$ pour un certain $C \in \mathbb{C}$. Déterminer C en calculant $\langle \hat{g}, e^{-x^2/2} \rangle$.
   (d) Calculer $\hat{f}$ dans le cas où A est diagonale.
   (e) Dans le cas général, en déduire que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi\lambda)^{-n/2}} \frac{e^{i\,\mathrm{sign}(A)\pi/4}}{|\det A|^{1/2}} e^{-i\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle/2\lambda}.$$

2. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On considère l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\langle Ax,x\rangle/2}\phi(x)dx, \quad \lambda > 0$. Justifier l'égalité
$$I(\lambda) = B_n\lambda^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(2\lambda)^{-1}\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}\hat{\phi}(\xi)d\xi \ ,$$
où $B_n \in \mathbb{C}$ est un coefficient que l'on précisera.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\left|e^{i\theta} - \sum_{k=0}^N \frac{(i\theta)^k}{k!}\right| \le \frac{|\theta|^{N+1}}{(N+1)!}$.
4. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a
$$I(\lambda) = \sum_{k=0}^N \lambda^{-n/2-k}(P_k\phi)(0) + R_{N,\lambda}(\phi) \ , \quad \lambda > 0 \ ,$$
où P_k est un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre $2k$ et $R_{N,\lambda}(\phi)$ un reste qui vérifie
$$|R_{N,\lambda}(\phi)| \le C_N(\phi)\lambda^{-n/2-(N+1)} \ , \quad \lambda > 0 \ ,$$
avec $C_N(\phi)$ une constante qui dépend de ϕ.

Exercice 5.14.— On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une pseudo-mesure lorsque $\hat{T} \in L^\infty$.

1. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est une pseudo-mesure.
2. Montrer que toute distribution T d'ordre 0 à support compact est une pseudo-mesure.
3. Former une équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier de $u : x \mapsto e^{ix^2}$. En déduire que u est une pseudo-mesure.
4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 1$. Montrer que T est une pseudo-mesure.
5. (a) Soit $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, telle que $0 \le h \le 1$ et $h(x) = 1$ pour $x \in [-1,1]$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $h_\epsilon(x) = h(\epsilon x)$. Montrer que si T est une pseudo-mesure, $h_\epsilon T$ aussi, et que, pour une certaine constante $C > 0$,
$$\|\widehat{h_\epsilon T}\|_{L^\infty} \le C\|\widehat{T}\|_{L^\infty}$$
   (b) Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que $\sum_{n\ge 0} a_n = +\infty$, et $T = \sum a_n\delta_n$. Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, mais, en utilisant ce qui précède, que T n'est pas une pseudo-mesure.