Université Paris Saclay **M1 FESM**
1er semestre 2024-25 **Analyse 1**

Feuille d'exercices 2

Espaces vectoriels normés

Exercice 2.1.— 1) Soit E un espace vectoriel normé de dimenson infinie. Montrer que si E admet une base dénombrable, alors E n'est complet pour aucune norme.
2) En déduire que l'espace des fonctions polynômiales $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Exercice 2.2.— (Espaces de suites) Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et $p \geq 1$ un réel. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note :

$$\begin{cases} \|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \ell^p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < +\infty \}, \\ \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n| \quad \text{et} \quad \ell^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty < +\infty \}. \end{cases}$$

Si $p > 1$, alors $p' := \frac{p}{p-1}$ désigne l'exposant conjugué de p.

1. Soit $1 < p < \infty$.
   (a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{p}\alpha^p + \dfrac{1}{p'}\beta^{p'}$.
   (b) Montrer que si $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^{p'}$ alors $xy = (x_n y_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$ et
   $$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \qquad \textit{(Inégalité de Hölder).}$$
   (c) Montrer que si $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^p$ alors $x + y \in \ell^p$ et
   $$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \textit{(Inégalité de Minkowski).}$$
2. Montrer que pour $p \geq 1$, ℓ^p est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .
3. Montrer que tous les espaces ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$, sont complets (espaces de Banach).
4. Montrer que l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0, est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$
5. Soit $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang ; montrer que c'est un sous-espace vectoriel de ℓ^p pour $p \geq 1$; déterminer $\overline{F}$ dans chacun de ces espaces.
6. En déduire que ℓ^p est séparable si $p \neq +\infty$.
7. On va montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
   Soit $B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \ell^\infty$, montrer que si $x, y \in B$ et que $x \neq y$ alors $\|x - y\|_\infty \geq 1$. En déduire que si A est une partie dense dans ℓ^∞, A n'est pas dénombrable.
8. Si $1 \leq p < q \leq +\infty$, montrer que ℓ^p est inclus dans ℓ^q ; quelle est son adhérence ?

Exercice 2.3.—

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $A_n = \{x \in \ell^2 : \sum_k |x_k| \leq n\}$ est fermé et d'intérieur vide dans ℓ^2.
2. En déduire que ℓ^1 est d'intérieur vide dans ℓ^2.
3. Généraliser en montrant que si $1 \leq p < q \leq +\infty$, alors ℓ^p est d'intérieur vide dans ℓ^q.
4. Montrer que $\bigcup_{1\leq p<q} \ell^p$ est d'intérieur vide dans ℓ^q.