Université Paris Saclay **M1 FESM**
1er semestre 2024-25 **Analyse 1**

Feuille d'exercices 1

Topologie - Espaces métriques

Exercice 1.1.— Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $x \in X$ et $r \geq 0$, on définit

$$B(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) < r\}, \quad \overline{B}(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) \leq r\}.$$

1) Montrer que $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$ et que $B(x,r) \subset \operatorname{int} \overline{B}(x,r)$.
2) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}^+, \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases} \end{aligned}$$

est une distance sur X. Montrer que $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$ et que $B(x,r) \neq \operatorname{int} \overline{B}(x,r)$ pour un $r > 0$ bien choisi.

Exercice 1.2.— (**Distance de Hausdorff**) Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $A \subset X$ une partie non vide. On définit la distance entre x et A par

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

1) Montrer que l'application $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ est 1-Lipschitz.
2) Supposons que A est fermé. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Qu'en est-il si A n'est pas fermé ?
3) Montrer que si A est compact, il existe $a \in A$ tel que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.
4) Supposons que X est compact, et soient A et B deux sous ensembles fermés de X. On définit la distance de Hausdorff entre A et B par

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A) \right\}.$$

Montrer que $d_{\mathcal{H}}$ définit une distance sur la famille des sous ensembles fermés de X.

Exercice 1.3.— Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$.
1) Expliquer pourquoi le théorème du point fixe de Banach-Picard ne s'applique pas.
2) Montrer cependant que f admet un unique point fixe $a \in X$.
3) Montrer que la suite des itérées de f converge simplement vers la fonction constante égale à a.
4) Que dire dans le cas de l'inégalité large $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ (les autres hypothèses étant vérifiées par ailleurs) ?

Exercice 1.4.— Soit (X, d) un espace métrique complet et $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés tels que $X = \bigcup_n F_n$. Alors $\bigcup_n \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans X

Exercice 1.5.— **(Limite simple d'une suite de fonctions continues)** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f.
1) La fonction f est-elle en général continue ?
2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_{n,k} := \bigcap_{m,p\geq n}\{x \in \mathbb{R} : \ |f_m(x) - f_p(x)| \leq 1/k\}$, $U_k := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_{n,k}$ et $W := \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} U_k$.

a) Montrer que les $F_{n,k}$ sont fermés et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,k} = \mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ et que W est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f est continue sur W.

3) Montrer que la dérivée d'une fonction réelle (dérivable) est continue sur un ensemble dense.