

Fonctions topicales à portée finie et fonctions uniformément topicales

Thierry Bousch*

Jean Mairesse†

9 janvier 2003

Abstract

We introduce a remarkable subclass of the class of topical functions, the class of *uniformly topical* functions, whose dynamical behaviour is investigated. Every uniformly topical endofunction has a spectral vector, related to some special fixed points (possibly at infinity), about which we establish various properties. In the stochastic case, we prove a multiplicative ergodic theorem, asserting that the stochastic spectral vector exists in all cases.

Résumé

Nous introduisons une sous-classe remarquable de la classe des fonctions topicales, celle des fonctions *uniformément topicales*, dont nous étudions les propriétés dynamiques. Toute endofonction uniformément topicale admet un vecteur spectral, interprétable en termes de points fixes (éventuellement à l'infini), et pour lequel on établit diverses propriétés. Dans le cas stochastique, nous démontrons un théorème ergodique multiplicatif, affirmant l'existence du vecteur spectral stochastique dans tous les cas.

Mots-clés: Fonction topicale, fonction uniformément topicale, portée finie, vecteur spectral, vecteur temps de cycle, théorème ergodique multiplicatif

Classification AMS (2000): 47H09, 46T10, 37H15

Table des matières

1	Introduction	2
2	Fonctions topicales à portée finie	4
2.1	Rappels sur les fonctions topicales	4
2.2	Fonctions topicales à portée finie	4
2.3	Approximation par des fonctions min-max-plus	7
2.4	Fonctions topicales à portée nulle	8
3	Fonctions uniformément topicales	9
3.1	Fonctions uniformément topicales	9
3.2	Approximation par des fonctions topicales à portée finie	11
3.3	Asymptotes	13

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr.

†LIAFA, CNRS et Université Paris 7, case 7014, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr.

4	L'espace configurationnel	15
4.1	Rappels sur le permutaèdre \mathfrak{P}_S	15
4.2	L'espace configurationnel $\text{Cf}(S) \simeq \mathfrak{P}_S$	16
4.3	Quotient par $\mathbb{R}\mathbf{u}$ d'une fonction uniformément topocale	17
5	Existence et propriétés du vecteur spectral	19
5.1	Un théorème de points fixes	19
5.2	Diverses propriétés du vecteur spectral	22
5.3	Le principe de sélection	24
6	Théorèmes ergodiques multiplicatifs	24
6.1	Enoncé du problème	24
6.2	Produits stochastiques d'applications max-plus	28
6.3	Démonstration du théorème 6.1	29
6.3.1	Les normes \mathcal{N}_K	29
6.3.2	Le cas des \hat{u}_ω permutations	32
6.3.3	Le cas des \hat{u}_ω linéaires	34
6.3.4	Le cas général — fin de la démonstration	35
6.4	Un théorème ergodique inverse	37
	Références	38

1 Introduction

L'étude dynamique des "systèmes à événements discrets" amène à étudier l'itération de fonctions de \mathbb{R}^N dans lui-même, qui sont croissantes (pour l'ordre produit sur les coordonnées) et additivement homogènes (c.à.d. qui commutent avec un certain groupe à un paramètre de translations) [Ba, Gu1]. Selon la complexité du système, ces fonctions peuvent prendre des formes diverses, plus ou moins générales (max-plus, min-max-plus, affines par morceaux, etc.) mais vérifient toujours les deux axiomes précédents. Gunawardena et Keane [GK] ont appelé *topocales* les fonctions vérifiant ces deux axiomes (dûs à Crandall & Tartar [CT]), et se sont demandé quelles étaient les propriétés (de nature dynamique) communes à toutes ces fonctions, indépendamment de leur forme particulière.

Du point de vue dynamique, une des questions les plus importantes est de savoir si une endofonction topocale f de \mathbb{R}^N admet un *vecteur spectral* (parfois appelé *vecteur temps de cycle*), c.à.d. de savoir si $f^n(0)/n$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. On sait que c'est vrai pour certaines classes particulières de fonctions topocales: en particulier, pour les fonctions min-max-plus et plus généralement, les fonctions topocales affines par morceaux, l'existence du vecteur spectral a été démontrée par Bewley et Kohlberg [BK, Koh], d'une manière non constructive; par la suite, divers auteurs [ZP, ST, GG1, GG2] ont retrouvé ce résultat, et ont donné des algorithmes de calcul du vecteur spectral dans le cas min-max-plus (assez efficaces en pratique, mais dont la complexité est encore mal comprise).

En revanche, pour des fonctions topocales générales, le vecteur spectral n'existe pas toujours [Koh, GK], et ce dès que $N \geq 3$. En voici un contre-exemple particulier (d'après Kohlberg et

Sparrow): soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y + 1 \\ x + h(y - x) \end{bmatrix}$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. On voit que f est additivement homogène, et elle est croissante si et seulement si h est lipschitzienne avec $0 \leq h' \leq 1$. Supposons qu'il en soit ainsi. On a alors $f^{n+1}(0) = (0, n+1, h(n))$, et le vecteur spectral existe si et seulement si $h(n)/(n+1)$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Or cette limite peut ne pas exister: considérons la fonction h définie par $h(x) = 0$ si $x \leq 0$, $h(x) = \min(x-1, 2)$ si $2 \leq x \leq 4$, et $h(2x) = 2h(x)$ partout (voir Figure 1). La fonction h est bien lipschitzienne avec $0 \leq h' \leq 1$ donc f est bien topicale, mais $h(n)/(n+1)$ n'a pas de limite.

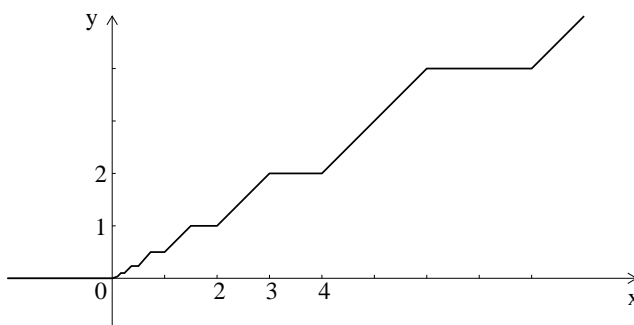


Figure 1: La fonction h

Ce phénomène, qui va totalement à l'encontre de ce qu'on sait être vrai pour les familles classiques de fonctions topicales, suggère que la classe de *toutes* les fonctions topicales est sans doute trop vaste pour qu'on puisse en dire des choses intéressantes, d'un point de vue dynamique.

Le contre-exemple ci-dessus présente typiquement le genre de comportement qu'on voudrait éviter: les orbites sortent de tout compact (dans $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\vec{u}$), et on n'a aucun contrôle sur la dynamique de f au voisinage de l'infini.

Notre réponse à ce problème consiste à associer à chaque \mathbb{R}^N sa compactification $[-\infty, +\infty]^N$, et à étudier seulement les fonctions topicales f prolongeables par continuité sur ces compactifications, que nous appelons fonctions *uniformément topicales*. On étudie leurs propriétés en §3 et §4, par le truchement des fonctions topicales à *portée finie*, introduites en §2 et qui généralisent les fonctions min-max-plus. La topologie rejoint l'algèbre avec le corollaire 3.6, qui affirme que les fonctions uniformément topicales ne sont pas autre chose que les limites uniformes de fonctions min-max-plus.

La section §5 est consacrée à l'itération d'une fonction uniformément topicale (quelconque), et aux propriétés du vecteur spectral, qui existe toujours.

Enfin, la section §6 démontre plusieurs théorèmes ergodiques multiplicatifs, concernant les itérées aléatoires de fonctions uniformément topicales. Le principal résultat est l'existence, en toute généralité, d'un vecteur spectral stochastique (moyennant une hypothèse d'intégrabilité). Ces résultats englobent et généralisent tout ce qui est déjà connu dans le cas max-plus [Ba, GY].

2 Fonctions topicales à portée finie

2.1 Rappels sur les fonctions topicales

On se place dans \mathbb{R}^S , où S désigne un ensemble fini, considéré (préférentiellement) comme un espace affine, d'origine \mathbf{o} , et de dimension $N = \#S$. Les fonctions coordonnées sont notées $\gamma_i : \mathbf{x} \mapsto x_i$, pour i décrivant S . L'ensemble \mathbb{R}^S est muni de l'ordre produit, i.e. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ssi $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in S$.

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\mathbf{x} + \lambda$ (ou $\lambda + \mathbf{x}$) comme étant le point $\mathbf{x} + \lambda \bar{\mathbf{u}}$, où $\bar{\mathbf{u}} = (1, \dots, 1)$ si bien que $\gamma_i(\mathbf{x} + \lambda) = \gamma_i(\mathbf{x}) + \lambda$. La fonction $(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda + \mathbf{x}$ est croissante en λ et en \mathbf{x} , et c'est une action de groupe, i.e. $0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $\lambda + (\lambda' + \mathbf{x}) = (\lambda + \lambda') + \mathbf{x}$.

Pour un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^S$ on définit (quand S est non vide) le plancher $\lfloor \vec{v} \rfloor = \inf v_i$ et le plafond $\lceil \vec{v} \rceil = \sup v_i$, et pour deux points $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ on définit

$$\begin{aligned} \lfloor \mathbf{x}, \mathbf{y} \rfloor &= \lfloor \mathbf{y} - \mathbf{x} \rfloor = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + \lambda \leq \mathbf{y} \}, \\ \lceil \mathbf{x}, \mathbf{y} \rceil &= \lceil \mathbf{y} - \mathbf{x} \rceil = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{y} \leq \mathbf{x} + \lambda \} = -\lfloor \mathbf{y}, \mathbf{x} \rfloor. \end{aligned}$$

Une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ (où A, B sont des ensembles finis) sera dite *topicale* si elle est croissante et "additivement homogène", c.à.d. telle que $f(\mathbf{x} + \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda$. Si f est topicale, alors $\lfloor f\mathbf{x}, f\mathbf{y} \rfloor \leq \lfloor \mathbf{x}, \mathbf{y} \rfloor$ pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A$. (La réciproque est également vraie.) On a de même $\lceil f\mathbf{x}, f\mathbf{y} \rceil \geq \lceil \mathbf{x}, \mathbf{y} \rceil$; les fonctions topicales abaissent les plafonds et soulèvent les planchers [GK]. La distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, où $\|\vec{v}\| = \max |v_i|$, joue un rôle particulier relativement aux fonctions topicales: la formule $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lfloor \mathbf{x}, \mathbf{y} \rfloor \vee \lceil \mathbf{y}, \mathbf{x} \rceil$ montre que $d(f\mathbf{x}, f\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour toute fonction f topicale. De même, la distance \tilde{d} sur l'espace quotient $\mathbb{R}^A / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$, définie par $\tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d(\mathbf{x}, \lambda + \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\lfloor \mathbf{x}, \mathbf{y} \rfloor + \lceil \mathbf{y}, \mathbf{x} \rceil)$, où $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ sont les images dans $\mathbb{R}^A / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ de deux points $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A$, est diminuée par la fonction quotient $\tilde{f} : \mathbb{R}^A / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^B / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$.

On note $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ l'ensemble des fonctions topicales de \mathbb{R}^A dans \mathbb{R}^B . Cet ensemble dispose d'un ordre naturel qui en fait un treillis distributif, dont les opérations \vee et \wedge sont données "point par point", i.e. $(f \vee g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \vee g(\mathbf{x})$ et de même pour \wedge . En particulier, la médiane $\text{med}(f, g, h)$ est donnée par $\mathbf{x} \mapsto \text{med}(f\mathbf{x}, g\mathbf{x}, h\mathbf{x})$.

Une forme topicale est une fonction topicale à valeurs réelles. Une forme max-plus (resp. min-plus, min-max-plus) sur \mathbb{R}^A est un suprémum (resp. un infimum, une combinaison par les opérations \vee et \wedge) d'un nombre fini de formes topicales du type $\gamma_i + \text{Cte}$. Une fonction max-plus (resp. min-plus, min-max-plus) est une fonction $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ dont chaque composante est une forme max-plus (resp. min-plus, min-max-plus). On note $\mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ et $\mathbf{Minp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ les espaces de fonctions max-plus et min-plus de \mathbb{R}^A dans \mathbb{R}^B .

La topologie naturelle sur $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est celle de la convergence simple; elle coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de \mathbb{R}^A , puisque les fonctions topicales sont 1-lipschitz. Cette topologie est complètement métrisable, et localement compacte (les parties compactes de $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ sont les parties fermées et bornées). Par ailleurs $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est séparable, car les fonctions min-max-plus y sont denses.

Le lecteur intéressé trouvera dans [GK, BM] bien plus de détails.

2.2 Fonctions topicales à portée finie

Soit $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ la fonction qui associe à chaque nombre réel son signe et, par extension, on note également $\text{sgn} : \mathbb{R}^S \rightarrow \{-1, 0, 1\}^S$ la fonction donnant le signe, composante par composante, d'un vecteur.

Définition 2.1. Soit $L \geq 0$. Une fonction topocale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est dite de portée au plus L si, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A$ on a l'implication

$$\left[\forall \lambda \in [-L, L] \quad \text{sgn}(\lambda + \mathbf{x}) = \text{sgn}(\lambda + \mathbf{y}) \right] \implies \text{sgn } f(\mathbf{x}) = \text{sgn } f(\mathbf{y}). \quad (2.1)$$

La fonction f est dite de portée finie si elle est de portée au plus L pour un certain $L \geq 0$. Il existe alors un plus petit L vérifiant cette condition, qu'on appelle la portée de f .

Il est commode d'introduire la relation d'équivalence $\overset{L}{\approx}$ sur \mathbb{R}^S , définie par $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y}$ ssi $\text{sgn}(\lambda + \mathbf{x}) = \text{sgn}(\lambda + \mathbf{y})$ pour tout $\lambda \in [-L, L]$. La condition (2.1) se réécrit alors $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y} \implies f\mathbf{x} \overset{0}{\approx} f\mathbf{y}$.

Un cas particulier important est celui des fonctions topocales à portée nulle, i.e. vérifiant (2.1) avec $L = 0$, autrement dit, $\text{sgn } \mathbf{x} = \text{sgn } \mathbf{y} \implies \text{sgn } f\mathbf{x} = \text{sgn } f\mathbf{y}$. C'est-à-dire que le signe des coordonnées de $f\mathbf{x}$ ne dépend que du signe des coordonnées de \mathbf{x} .

On notera $\mathbf{FrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ et $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ l'ensemble des fonctions topocales de portée finie et de portée au plus L , respectivement (où $L \geq 0$). On notera aussi $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ au lieu de $\mathbf{FrTp}_0(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$.

La définition ci-dessus appelle plusieurs remarques évidentes. Une fonction topocale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est de portée au plus L si et seulement si toutes ses composantes $f_i = \gamma_i \circ f$ sont de portée au plus L (pour i décrivant B). On a ainsi des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) &\simeq \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})^B, \\ \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^C) &\simeq \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \times \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^C). \end{aligned}$$

On voit aussi que si $f, g : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ sont topocales de portée au plus L , alors il en est de même de $f \vee g$ et $f \wedge g$. Enfin, une composée de fonctions topocales à portée finie est encore à portée finie: si $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ et $g : \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^C$ sont de portée au plus L, L' , alors $g \circ f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^C$ est de portée au plus $L + L'$; cela résulte des implications $\mathbf{x} \overset{L+L'}{\approx} \mathbf{y} \implies f\mathbf{x} \overset{L'}{\approx} f\mathbf{y} \implies gf\mathbf{x} \overset{0}{\approx} gf\mathbf{y}$.

Et puis, une translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \vec{v}$ est une endofonction à portée finie, de portée $\|v\| = \max |v_i|$. Il résulte de tout cela que toute fonction min-max-plus $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est à portée finie.

On voit facilement qu'une forme topocale $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ est de portée au plus L si et seulement si $\alpha^{-1}(0)$ est saturé pour la relation d'équivalence $\overset{L}{\approx}$ (ceci est dû au fait que toutes ses classes sont connexes). Ceci permet de vérifier, par exemple, que la forme $\alpha(x, y) = \max(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, \frac{x+y}{2} + \frac{1}{4})$ est de portée 1 (voir figure 2), tandis que la forme $\alpha(x, y) = (x + y)/2$ n'est pas à portée finie. On vérifie également qu'une forme max-plus

$$\alpha(x_1, \dots, x_N) = (x_{i_1} + a_1) \vee \dots \vee (x_{i_K} + a_K) \quad (i_1, \dots, i_K \text{ distincts})$$

est de portée $|a_1| \vee \dots \vee |a_K|$. (Pour montrer ce dernier résultat, on peut aussi s'aider du lemme 2.2 ci-dessous.)

Lemme 2.2. Soit $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ une forme topocale de portée au plus L . Pour tout $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^S$, il existe un indice $i \in S$ tel que $|\alpha(\mathbf{x}) - x_i| \leq L$. En particulier, $|\alpha(\mathbf{o})| \leq L$.

Démonstration. On peut supposer $\alpha\mathbf{x} = 0$, quitte à remplacer \mathbf{x} par $-\lambda + \mathbf{x}$ avec $\lambda = \alpha\mathbf{x}$. Supposons maintenant que $K = \min |x_i| = \min |x_i|$ soit strictement plus grand que L . On aurait alors $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{x} + \epsilon$ pour $\epsilon = (K - L)/2 > 0$ et donc $\text{sgn}(\alpha\mathbf{x}) = \text{sgn}(\alpha\mathbf{x} + \epsilon)$, soit $0 = 1$, qui est la contradiction cherchée. \square

Faisant $L = 0$ dans le lemme ci-dessus, on voit que si α est à portée nulle, $\alpha(\mathbf{x})$ prend ses valeurs parmi les coordonnées de \mathbf{x} .

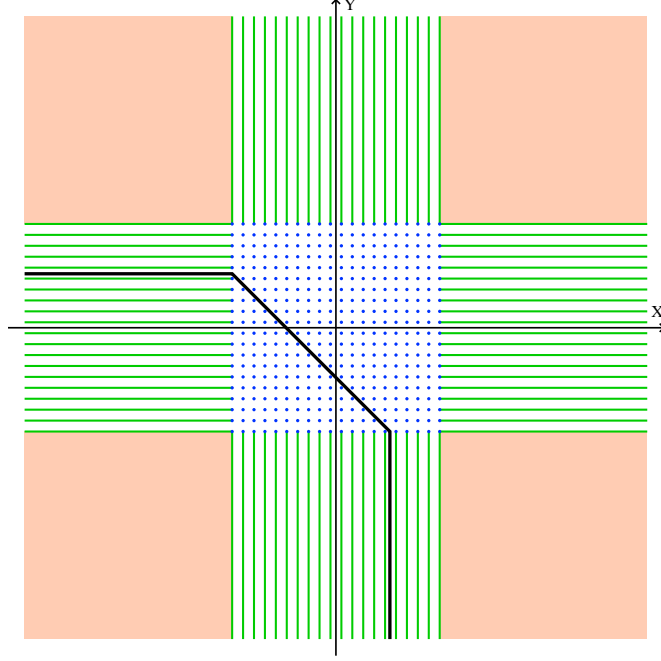


Figure 2: L'ensemble $\alpha^{-1}(0)$ et les classes d'équivalence de la relation $\overset{L}{\approx}$

Lemme 2.3. *Une forme topicale sur \mathbb{R}^S , limite simple de formes topicales de portée au plus L , est elle-même de portée au plus L .*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence simple. On va montrer que le complémentaire est ouvert. Soit $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ une forme topicale qui n'est pas de portée au plus L , si bien qu'on peut trouver $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ tels que $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y}$ et $\text{sgn } \alpha(\mathbf{x}) \neq \text{sgn } \alpha(\mathbf{y})$. Si $\alpha(\mathbf{x})$ et $\alpha(\mathbf{y})$ sont tous deux non nuls, il est manifeste que la condition $\text{sgn } \beta(\mathbf{x}) \neq \text{sgn } \beta(\mathbf{y})$ est réalisée pour tout β assez voisin de α . Sinon, on se ramène à la situation précédente en notant que $\lambda + \mathbf{x} \overset{L}{\approx} \lambda + \mathbf{y}$ pour tout λ assez voisin de 0. \square

Le lemme 2.2 affirme que toute partie non vide de $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ admet un infimum et un suprémum dans $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$; ces deux fonctions peuvent être obtenues comme limites simples d'infimums ou de suprémums finis, et sont donc elles-mêmes de portée au plus L , par le lemme 2.3. Ainsi $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est stable par des infimums et suprémums arbitraires (non vides).

Théorème 2.4. *Les topologies de la convergence simple et de la convergence uniforme coïncident sur $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, et en font un espace compact.*

Démonstration. On peut se borner à étudier le cas des formes topicales, i.e. $B = 1$.

L'ensemble $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$, pour la topologie de la convergence simple, car il est fermé et borné d'après les lemmes 2.2 et 2.3.

Les topologies à comparer étant l'une et l'autre métrisables, il suffit de démontrer qu'elles ont les mêmes suites convergentes. Soit donc $\alpha_n \rightarrow \alpha$ une suite simplement convergente dans $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$. Supposons que la convergence ne soit pas uniforme; il existerait alors $0 < \epsilon < 1$, une suite (\mathbf{x}_n) de points de \mathbb{R}^A et une infinité d'indices n tels que $|\alpha_n(\mathbf{x}_n) - \alpha(\mathbf{x}_n)| > \epsilon$; disons $\alpha_n(\mathbf{x}_n) > \alpha(\mathbf{x}_n) + \epsilon$ pour fixer les idées, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n - \alpha(\mathbf{x}_n)$, si bien que $\alpha(\mathbf{y}_n) = 0$ et $\alpha_n(\mathbf{y}_n) > \epsilon$.

On peut alors trouver une suite de points (\mathbf{z}_n) telle que $\|\mathbf{z}_n\| < L + 1$ et $\mathbf{z}_n \stackrel{L+\epsilon}{\approx} \mathbf{y}_n$. Cela entraîne $\alpha(\mathbf{z}_n) \stackrel{\epsilon}{\approx} \alpha(\mathbf{y}_n)$, autrement dit $\alpha(\mathbf{z}_n) = 0$, et $\alpha_n(\mathbf{z}_n) \stackrel{\epsilon}{\approx} \alpha_n(\mathbf{y}_n)$, soit $\alpha_n(\mathbf{z}_n) > \epsilon$. Mais par ailleurs, on sait que la convergence simple $\alpha_n \rightarrow \alpha$ entraîne la convergence uniforme sur les parties bornées de \mathbb{R}^A , et comme la suite (\mathbf{z}_n) est bornée on devrait avoir $(\alpha_n - \alpha)(\mathbf{z}_n) \rightarrow 0$, ce qui est contradictoire. La convergence $\alpha_n \rightarrow \alpha$ est donc bien uniforme. \square

2.3 Approximation par des fonctions min-max-plus

Majorants max-plus minimaux. Soit $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ une fonction topocale. Notons

$$W(f) = \{g \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) : g \geq f\}$$

l'ensemble des majorants max-plus de f , et $V(f)$ l'ensemble des éléments minimaux de $W(f)$. On a $f = \inf W(f)$, car pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ on peut trouver une fonction max-plus $g_{\mathbf{x}}$ telle que $g_{\mathbf{x}} \geq f$ et $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, à savoir $g_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}) + [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

D'autre part, $V(f)$ est non vide d'après le lemme de Zorn et, plus précisément, tout élément de $W(f)$ a un minorant dans $V(f)$. Il en résulte que $f = \inf V(f)$.

Ainsi f est min-max-plus si $V(f)$ est un ensemble fini. La réciproque est également vraie, et se déduit aisément du lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ des formes topocales. On a*

$$W(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) = W(\alpha_1) \cap \dots \cap W(\alpha_n) \quad (2.2)$$

$$W(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) = W(\alpha_1) \cup \dots \cup W(\alpha_n) \quad (2.3)$$

Démonstration. L'égalité (2.2) est évidente, ainsi que l'inclusion \supseteq dans (2.3). Il reste à montrer que si β est une forme max-plus telle que $\beta \geq \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$, alors β majore l'un des α_k .

Ecrivons $\beta(\mathbf{x}) = (x_1 + b_1) \vee \dots \vee (x_N + b_N)$, où $-\infty \leq b_i < \infty$, et considérons en premier lieu le cas où tous les b_i sont finis. L'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S : \beta(\mathbf{x}) \leq 0\}$ admet alors un plus grand élément, le point $\mathbf{p} = (-b_1, \dots, -b_N)$. Evaluant en \mathbf{p} l'inégalité $\beta \geq \bigwedge \alpha_k$, on voit qu'il existe un $k \in [1, n]$ tel que $\alpha_k(\mathbf{p}) \leq 0$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ on a $\alpha_k(\mathbf{x}) \leq [\alpha_k(\mathbf{p}), \alpha_k(\mathbf{x})] \leq [\mathbf{p}, \mathbf{x}] = \beta(\mathbf{x})$, autrement dit $\alpha_k \leq \beta$.

Dans le cas général, où les b_i ne sont pas supposés finis, on applique le résultat précédent aux formes $\beta_s = \beta \vee (s + \gamma_+)$, avec $s \in \mathbb{R}$ et $\gamma_+ = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_N$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, β_s est dans $W(\alpha_1) \cup \dots \cup W(\alpha_n)$, et comme cet ensemble est fermé dans $\mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence simple (comme union finie de fermés), il contient la limite des β_s quand $s \rightarrow -\infty$, à savoir β , ce qui prouve le lemme. \square

Théorème 2.6. *La fonction f est de portée au plus L si et seulement si tous les éléments de $V(f)$ sont de portée au plus L .*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante, car $f = \inf V(f)$ et $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est stable par des inf quelconques. Réciproquement, considérons une forme topocale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}$ de portée au plus L , et soit

$$g(\mathbf{x}) = (x_{i_1} + \theta_{i_1}) \vee \dots \vee (x_{i_K} + \theta_{i_K}) \quad (i_1, \dots, i_K \text{ distincts})$$

un élément quelconque de $V(f)$. Sa portée est $\sup |\theta_i|$, et on veut montrer qu'elle est bornée par L . Raisonnons par l'absurde, en supposant $\sup |\theta_i| > L$. Ecrivons

$$g(\mathbf{x}) = (x_s + \theta) \vee h(\mathbf{x})$$

où $|\theta| > L$ et h est une forme max-plus ne dépendant pas de la coordonnée d'indice s . (On posera $h(\mathbf{x}) = -\infty$ identiquement si g n'a qu'un seul terme.)

Choisissons un $\theta' < \theta$ avec $\theta' \stackrel{L}{\approx} \theta$ (autrement dit, $\theta' < \theta$ si θ est négatif, et $L < \theta' < \theta$ sinon). La forme max-plus

$$g'(\mathbf{x}) = (x_s + \theta') \vee h(\mathbf{x})$$

minore *strictement* g et ne peut donc pas être dans $W(f)$, à cause de la minimalité de g . Il existe donc un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^A$ tel que $0 = g'(\mathbf{p}) < f(\mathbf{p}) \leq g(\mathbf{p})$, c'est-à-dire

$$0 = (p_s + \theta') \vee h(\mathbf{p}) < f(\mathbf{p}) \leq (p_s + \theta) \vee h(\mathbf{p}),$$

d'où $h(\mathbf{p}) \leq 0$ et $-\theta < p_s \leq -\theta'$. Soit maintenant $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^A$ le point défini par $q_s = -\theta$ et $q_i = p_i$ pour tout $i \neq s$, si bien que $h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{p})$, et $f(\mathbf{q}) \leq g(\mathbf{q}) = 0$. Mais par ailleurs on a $f(\mathbf{p}) > 0$ et $\mathbf{p} \stackrel{L}{\approx} \mathbf{q}$, contredisant l'hypothèse que f est de portée au plus L . \square

Une formulation équivalente de ce théorème est la suivante.

Théorème 2.7. *Une fonction topicale $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est de portée au plus L si et seulement si c'est un infimum (éventuellement infini) de fonctions max-plus de portée au plus L .*

Une telle fonction est donc limite simple de fonctions min-max-plus de portée au plus L . En combinant ceci avec le théorème 2.4, il vient:

Corollaire 2.8. *Une fonction topicale $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est de portée au plus L si et seulement si c'est une limite uniforme de fonctions min-max-plus de portée au plus L .*

2.4 Fonctions topicales à portée nulle

On a vu que pour une forme max-plus $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivant $\alpha(\mathbf{x}) = \max_{i \in S_\alpha} (x_i + \alpha_i)$, où S_α est une partie non vide de S , la portée de α est finie et vaut $\max_{i \in S_\alpha} |\alpha_i|$. En particulier, les formes max-plus de portée nulle s'obtiennent en combinant certaines formes coordonnées par l'opérateur \vee (en d'autres termes, il s'agit du semi-treillis supérieur (librement) engendré par les formes coordonnées); il y en a autant que de parties non vides de S , soit $2^N - 1$ (où N désigne le cardinal de S). Combinant cette observation avec le théorème 2.7, on obtient:

Théorème 2.9. *Toutes les formes topicales de portée nulle sur \mathbb{R}^S s'obtiennent par une combinaison finie des formes coordonnées γ_i et des opérateurs \vee et \wedge . Autrement dit, $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ est le treillis distributif (librement) engendré par les formes coordonnées.*

La fait que $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ est *librement* engendré par les formes coordonnées sera démontré plus tard, en §3.3, théorème 3.9.

En particulier, il n'existe qu'un nombre fini $\mathfrak{D}(N)$ (cardinal de $\text{Fdl}(N)$, le treillis distributif libre à N générateurs) de formes topicales de portée nulle, mais qui croît rapidement (bi-exponentiellement!) en fonction de N . Les nombres $\mathfrak{D}(N)$ s'appellent les *nombre de Dedekind* [Ded]. L'ensemble $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est en bijection avec $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})^B$ et donc de cardinal $\mathfrak{D}(\sharp A)^{(\sharp B)}$.

N	0	1	2	3	4	5	6
$\mathfrak{D}(N)$	0	1	4	18	166	7 579	7 828 352

Notons également qu'une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ topicale à portée nulle est multiplicativement positivement homogène, i.e. $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ pour tous $\lambda \geq 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$. On a par ailleurs les identités $f(\mathbf{x} \vee \mathbf{o}) = f(\mathbf{x}) \vee \mathbf{o}$ et $f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{o}) = f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{o}$, dont nous nous servirons en §5.2.

3 Fonctions uniformément topicales

3.1 Fonctions uniformément topicales

On note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ avec sa topologie usuelle.

Définition 3.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est dite *uniformément topicale* si elle est topicale et admet un prolongement continu $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$.

La définition ci-dessus peut être reformulée un peu différemment. Munissons \mathbb{R}^A et \mathbb{R}^B des structures uniformes (voir [AB], §3.13, ou [Bou]) induites par les inclusions $\mathbb{R}^A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^A$ et $\mathbb{R}^B \subseteq \overline{\mathbb{R}}^B$; alors une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est uniformément topicale ssi elle est topicale et uniformément continue (pour ces structures uniformes particulières).

Plusieurs propriétés découlent immédiatement de cette définition.

- (i) Une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est uniformément topicale ssi toutes ses fonctions coordonnées $f_i : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}$ sont uniformément topicales;
- (ii) Si $f, g : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ sont uniformément topicales, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ aussi;
- (iii) Si $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ et $g : \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^C$ sont uniformément topicales, alors $g \circ f$ aussi;
- (iv) Si une suite (ou un filet) de fonctions uniformément topicales converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$, alors f est uniformément topicale.

Un résultat de Burbanks et Sparrow [BS] affirme que toute fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ admet un prolongement continu $f_\perp : \mathbb{R}_\perp^A \rightarrow \mathbb{R}_\perp^B$, où $\mathbb{R}_\perp = [-\infty, +\infty[$. Rappelons brièvement l'argument. Si une forme topicale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}$ admet un prolongement continu $f_\perp : \mathbb{R}_\perp^A \rightarrow \mathbb{R}_\perp$, celui-ci doit être donné par la formule

$$f_\perp(\mathbf{p}) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{p}}} f(\mathbf{x}) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\mathbf{p} \vee \lambda \bar{\mathbf{u}})$$

ce qui définit bien une fonction $f_\perp : \mathbb{R}_\perp^A \rightarrow \mathbb{R}_\perp$ croissante, additivement homogène, et semi-continue supérieurement (comme infimum de fonctions continues).

Mais d'autre part, une fonction croissante et additivement homogène $f_\perp : \mathbb{R}_\perp^A \rightarrow \mathbb{R}_\perp$ est automatiquement semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > M\}$ est ouvert. En effet, soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\perp^A$ tel que $f(\mathbf{x}) > M$, et soit $\epsilon = (f(\mathbf{x}) - M)/2$; alors $f(\mathbf{y}) > M$ pour tout \mathbf{y} dans l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_\perp^A : \mathbf{y} \geq -\epsilon + \mathbf{x}\}$, qui est un voisinage de \mathbf{x} . La fonction f_\perp est donc bien un prolongement continu de f .

Par dualité, f admet aussi un prolongement continu $f_\top : \mathbb{R}_\top^A \rightarrow \mathbb{R}_\top^B$, où $\mathbb{R}_\top =]-\infty, +\infty]$. Ainsi, si $\mathbf{p} \in \overline{\mathbb{R}}^A$ est dans \mathbb{R}_\perp^A ou \mathbb{R}_\top^A , on sait que f admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}^B$) au point \mathbf{p} . En revanche, on ne peut rien affirmer pour les points $\mathbf{p} \in \overline{\mathbb{R}}^A$ qui ne sont ni dans \mathbb{R}_\perp^A , ni dans \mathbb{R}_\top^A , c'est-à-dire qui ont au moins une coordonnée égale à $+\infty$ et une autre égale à $-\infty$; la limite peut exister ou non. Nous qualifierons ces points de *critiques*. Le lieu critique (c.à.d. l'ensemble des points critiques) est de codimension deux dans $\overline{\mathbb{R}}^A$; nous avons représenté, figure 3, le lieu critique en dimension trois.

La forme topicale $\mathbf{x} \mapsto (\sum x_i)/(\sharp A)$ n'admet de limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en *aucun* point critique; ce n'est donc pas une forme uniformément topicale sur \mathbb{R}^A (pour $\sharp A > 1$).

Comme exemples de fonctions uniformément topicales qui ne sont pas à portée finie (en général), on peut citer les fonctions conjuguées-linéaires $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$, définies par

$$\exp \kappa f_i = \sum_{j \in A} a_{ij} \exp \kappa x_j$$

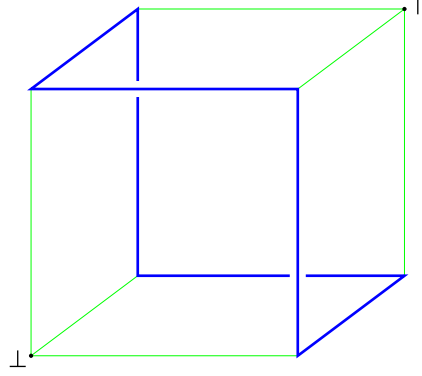


Figure 3: Le cube $[-\infty, +\infty]^3$ et son lieu critique

où $\kappa > 0$, et (a_{ij}) est une matrice à coefficients positifs dont aucune ligne n'est identiquement nulle. Ces fonctions permettent d'approcher uniformément les fonctions max-plus, et nous les retrouverons plus loin dans cet article.

La définition 3.1 suggère qu'il est plus naturel de considérer une fonction uniformément topocale comme une fonction $\overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$. Si on adopte ce point de vue, on peut en donner la définition équivalente que voici:

Définition 3.2. Une fonction $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$ est dite uniformément topocale si elle est continue, croissante, additivement homogène, et telle que $\bar{f}(\perp) = \perp$ et $\bar{f}(\top) = \top$.

Les symboles \perp et \top désignent le plus petit et le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}^A$ ou $\overline{\mathbb{R}}^B$, et la condition d'homogénéité additive signifie que $\bar{f}(\lambda + \mathbf{x}) = \lambda + \bar{f}(\mathbf{x})$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^A$, où $\lambda + \mathbf{x}$ est défini de la façon évidente. Les conditions $\bar{f}(\perp) = \perp$, $\bar{f}(\top) = \top$ sont des conditions de finitude; elles reviennent à demander (modulo les autres hypothèses) que $\bar{f}(\mathbb{R}^A) \subseteq \mathbb{R}^B$, comme le lecteur pourra le vérifier.

Théorème 3.3. Toute fonction topocale à portée finie est uniformément topocale.

Démonstration. Considérons une forme topocale $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ de portée au plus L . Soit (\mathbf{x}_n) une suite de points de \mathbb{R}^S admettant une limite $\mathbf{p} \in \overline{\mathbb{R}}^S$; on doit montrer que $f(\mathbf{x}_n)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Considérons la suite (\mathbf{y}_n) de points de \mathbb{R}^S définie par

$$\gamma_i(\mathbf{y}_n) = \begin{cases} \gamma_i(\mathbf{p}) & \text{si } \gamma_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}, \\ \gamma_i(\mathbf{x}_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $i \in S$, $n \in \mathbb{N}$. On a $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \rightarrow 0$ et donc $|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| \rightarrow 0$. Ainsi la convergence (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des $f(\mathbf{x}_n)$ équivaut à la convergence des $f(\mathbf{y}_n)$.

La suite (\mathbf{y}_n) vérifie la propriété suivante: pour tout $K \geq 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\mathbf{y}_n \stackrel{L+K}{\approx} \mathbf{y}_p$ pour tous $n, p \geq n_0$. Ainsi $f(\mathbf{y}_n) \stackrel{K}{\approx} f(\mathbf{y}_p)$ pour n, p assez grands. En particulier, la suite $\text{med}(-K, f(\mathbf{y}_n), K)$ est stationnaire, a fortiori convergente; en fonction de $\ell_1 = \liminf f(\mathbf{y}_n)$ et $\ell_2 = \limsup f(\mathbf{y}_n)$, cela signifie que

$$\text{med}(-K, \ell_1, K) = \text{med}(-K, \ell_2, K)$$

et ce pour tout $K \geq 0$, ce qui n'est possible que si $\ell_1 = \ell_2$. Le théorème en résulte. \square

Le théorème ci-dessus, qui est la principale motivation derrière la définition 3.1, peut aussi s'obtenir par un argument plus abstrait, permettant d'expliquer pourquoi le cube $\overline{\mathbb{R}}^S$ apparaît comme la "bonne" compactification de \mathbb{R}^S , du point de vue des fonctions topicales à portée finie. Soit $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ une fonction topicale de portée au plus L . Pour tout $K \geq 0$, il existe une fonction (continue) quotient f_K entre les espaces topologiques non séparés $(\mathbb{R}^A / \overset{K}{\approx})$ et $(\mathbb{R}^B / \overset{K}{\approx})$. Prenant la limite projective pour $K \rightarrow \infty$ (dans la catégorie des espaces topologiques), on obtient une fonction continue

$$\bar{f} : \varprojlim_K (\mathbb{R}^A / \overset{K}{\approx}) \longrightarrow \varprojlim_K (\mathbb{R}^B / \overset{K}{\approx})$$

Or, il est facile de voir que les espaces limites s'identifient justement à $\overline{\mathbb{R}}^A$ et $\overline{\mathbb{R}}^B$, et que \bar{f} est un prolongement de f (modulo cette identification).

L'ensemble $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ des fonctions uniformément topicales $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ peut être vu, conformément à la définition 3.2, comme une partie de l'ensemble $C(\overline{\mathbb{R}}^A, \overline{\mathbb{R}}^B)$ des fonctions continues $\overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$; or cet espace dispose d'une structure uniforme naturelle (et de la topologie correspondante), donnée par la distance

$$\delta(f, g) = \sup_{i \in B} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A} |\text{th } g_i(\mathbf{x}) - \text{th } f_i(\mathbf{x})| \quad (3.1)$$

et $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ en est une partie fermée. Mais il est plus simple pour les calculs, et plus naturel du point de vue des fonctions topicales, de munir $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ de la distance uniforme ordinaire, que nous notons d :

$$d(f, g) = \sup_{i \in B} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A} |g_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})| \quad (3.2)$$

Cette distance est reliée à la distance induite δ par la formule

$$\frac{\delta(f, g)}{2} = \text{th } \frac{d(f, g)}{2}$$

valable pour tous $f, g \in \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, comme le montre un raisonnement simple (indication: remplacer \mathbf{x} par $\lambda + \mathbf{x}$ dans la formule (3.1), et maximiser sur λ). Ainsi d et δ munissent $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ de la même structure uniforme, et a fortiori de la même topologie.

Théorème 3.4. *L'ensemble $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ des fonctions uniformément topicales de \mathbb{R}^A dans \mathbb{R}^B , muni de la distance uniforme d donnée par la formule (3.2), est un espace métrique complet séparable.*

Notons aussi qu'une partie $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est précompacte si et seulement si elle est précompacte comme partie de $C(\overline{\mathbb{R}}^A, \overline{\mathbb{R}}^B)$, autrement dit, si les prolongements $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$, où f décrit \mathcal{F} , constituent une famille équicontinue.

3.2 Approximation par des fonctions topicales à portée finie

D'après les résultats de la section précédente, une limite uniforme de fonctions topicales de portée finie est uniformément topicale. La réciproque est également vraie:

Théorème 3.5. *Toute fonction uniformément topicale est limite uniforme de fonctions topicales à portée finie.*

Et comme on sait par ailleurs (corollaire 2.8) que toute fonction topicale à portée finie est limite uniforme de fonctions min-max-plus, il vient:

Corollaire 3.6. *Toute fonction uniformément topicale est limite uniforme de fonctions min-max-plus.*

Commençons par deux lemmes préliminaires.

Lemme 3.7. *Soit C une classe de $\overset{L}{\approx}$ dans \mathbb{R}^S , autre que la classe $\{\mathbf{x} : x_i > L \forall i\}$, et $\mathbf{c} = (c_i)$ un point quelconque de C . Il existe une plus grande forme topicale prenant des valeurs négatives sur C . Cette forme, qu'on notera $\mathbf{x} \mapsto [C, \mathbf{x}]$, est donnée par la formule*

$$[C, \mathbf{x}] = \max_{\substack{i \in S \\ c_i \leq L}} (x_i - \max(c_i, -L)) \quad (3.3)$$

En particulier, elle est max-plus, et de portée au plus L .

Cela se vérifie aisément. On note que $[C, \mathbf{x}] = \inf_{\mathbf{c} \in C} [\mathbf{c}, \mathbf{x}]$, ce qui justifie la notation employée. Par ailleurs:

Lemme 3.8. *Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément topicale. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $L \geq 0$ tel que*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S \quad \mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y} \text{ et } f(\mathbf{y}) = 0 \implies |f(\mathbf{x})| \leq \epsilon. \quad (3.4)$$

Démonstration. La fonction $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si on munit \mathbb{R}^S de la distance $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i |\text{th } y_i - \text{th } x_i|$ et \mathbb{R} de la distance $\delta(x, y) = |\text{th } y - \text{th } x|$. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \eta \implies |\text{th } f(\mathbf{y}) - \text{th } f(\mathbf{x})| \leq \text{th } \epsilon.$$

Soit maintenant $L \geq 0$ tel que $1 - \text{th } L \leq \eta$. Alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ tels que $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y}$, on a $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 1 - \text{th } L \leq \eta$ et par conséquent $|\text{th } f(\mathbf{y}) - \text{th } f(\mathbf{x})| \leq \text{th } \epsilon$, cette dernière inégalité se réduisant à $|f(\mathbf{x})| \leq \epsilon$ lorsque $f(\mathbf{y}) = 0$. \square

Démonstration du théorème 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément topicale, et $\epsilon > 0$ arbitraire. Choisissons $L \geq 0$ comme dans le lemme 3.8. Alors la classe $C_+ = \{\mathbf{x} : x_i > L \forall i\}$ n'intersecte pas $f^{-1}(0)$. En effet, s'il existait $\mathbf{y} \in C_+$ tel que $f(\mathbf{y}) = 0$, on aurait $f(\mathbf{x}) = 2\epsilon$ pour $\mathbf{x} = 2\epsilon + \mathbf{y}$, en contradiction avec (3.4) car $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y}$.

On peut donc définir la fonction $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \inf_{\substack{C \text{ classe de } \overset{L}{\approx} \\ C \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset}} [C, \mathbf{x}] = \inf_{\mathbf{y} \in f^{-1}(0)} [\text{cl}_L \mathbf{y}, \mathbf{x}]$$

où $\text{cl}_L \mathbf{y}$ désigne la classe de $\overset{L}{\approx}$ contenant \mathbf{y} . Cette formule est bien définie car $\text{cl}_L \mathbf{y}$ n'est jamais égal à C_+ . En outre, toutes les formes topicales intervenant dans l'infimum sont de portée au plus L , donc l'infimum existe comme fonction à valeurs réelles, et c'est une forme topicale de portée au plus L .

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ tel que $f(\mathbf{y}) = 0$, on a $\alpha(\mathbf{y}) \leq [\text{cl}_L \mathbf{y}, \mathbf{y}] \leq 0$. Ceci montre que $\alpha \leq f$.

Par ailleurs, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ tel que $f(\mathbf{y}) = 0$, on sait que $f(\mathbf{x}) \leq \epsilon$ pour tout $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{y}$. La forme topicale $f - \epsilon$ est négative sur $\text{cl}_L \mathbf{y}$ et donc majorée par $\mathbf{x} \mapsto [\text{cl}_L \mathbf{y}, \mathbf{x}]$ sur \mathbb{R}^S . En d'autres termes,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^S \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S \quad f(\mathbf{y}) = 0 \implies (f - \epsilon)(\mathbf{x}) \leq [\text{cl}_L \mathbf{y}, \mathbf{x}]$$

ce qui équivaut à

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^S \quad (f - \epsilon)(\mathbf{x}) \leq \inf_{\mathbf{y} \in f^{-1}(0)} [\text{cl}_L \mathbf{y}, \mathbf{x}]$$

c'est-à-dire $f - \epsilon \leq \alpha$. Ainsi on a l'encadrement $f - \epsilon \leq \alpha \leq f$, avec α à portée finie et ϵ arbitrairement petit, ce qui prouve le théorème. \square

3.3 Asymptotes

Le “cube” $\overline{\mathbb{R}}^S$ est muni d'une action de \mathbb{R} , notée $(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda + \mathbf{x}$ et définie de la façon évidente. Cette action a des points fixes: ce sont les *sommets* de $\overline{\mathbb{R}}^S$, c'est-à-dire les points dont toutes les coordonnées sont infinies en valeur absolue. Si \mathbf{x} est un sommet, alors $\lambda + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; si au contraire \mathbf{x} n'est pas un sommet, alors $\lambda + \mathbf{x}$ dépend injectivement de λ .

Une fonction uniformément topicale $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$ (ou, plus généralement, additivement homogène) doit préserver les points fixes de l'action: si \mathbf{x} est un sommet de $\overline{\mathbb{R}}^A$, alors $\bar{f}(\mathbf{x})$ est un sommet de $\overline{\mathbb{R}}^B$.

La fonction $\hat{f} : \{\pm\infty\}^A \rightarrow \{\pm\infty\}^B$ obtenue par restriction de \bar{f} est appelée *fonction asymptote* de f (ou de \bar{f}), et notée \hat{f} ou $\text{as}(f)$. Cette fonction est croissante et vérifie $\hat{f}(\perp) = \perp$, $\hat{f}(\top) = \top$.

Il est évident que $\text{as}(f \vee g) = \text{as}(f) \vee \text{as}(g)$ et $\text{as}(f \wedge g) = \text{as}(f) \wedge \text{as}(g)$, lorsque f, g ont même domaine et codomaine, et $\text{as}(g \circ f) = \text{as}(g) \circ \text{as}(f)$ lorsque f, g sont composables.

Théorème 3.9. *Soit $\theta : \{\pm\infty\}^A \rightarrow \{\pm\infty\}^B$ une fonction croissante et telle que $\theta(\perp) = \perp$, $\theta(\top) = \top$. Il existe une et une seule fonction topicale à portée nulle $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ telle que $\hat{f} = \theta$.*

Démonstration. On peut se borner au cas des formes topicales, i.e. $B = 1$.

Rappelons que le *treillis distributif libre* sur un ensemble S consiste en la donnée d'un treillis distributif $\text{Fdl}(S)$ et d'une fonction $S \xrightarrow{I} \text{Fdl}(S)$ qui est une “flèche universelle” (cf. [McI], §III.1) dans le sens suivant: pour tout treillis distributif T et toute fonction $S \xrightarrow{J} T$, il existe un et un seul morphisme de treillis $\text{Fdl}(S) \xrightarrow{E} T$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{I} & \text{Fdl}(S) \\ \parallel & & \downarrow E \\ S & \xrightarrow{J} & T \end{array}$$

Comme toujours, les “flèches universelles” sont uniques à isomorphisme près: si I, J sont toutes deux universelles, alors E est un isomorphisme de treillis.

Notons T_1 le treillis distributif $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$, et T_2 le treillis distributif des fonctions croissantes $\{\pm\infty\}^A \rightarrow \{\pm\infty\}$ qui préservent \perp et \top . On a deux fonctions naturelles $I_1 : S \rightarrow T_1$ et $I_2 : S \rightarrow T_2$, définies par $I_1 : a \mapsto \gamma_a$ et $I_2 : a \mapsto \hat{\gamma}_a$ (il s'agit simplement des projections naturelles de \mathbb{R}^A sur \mathbb{R} et de $\{\pm\infty\}^A$ sur $\{\pm\infty\}$). Par la propriété universelle de $\text{Fdl}(A)$, il existe un (unique) morphisme de treillis E faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I} & \text{Fdl}(A) \\ \parallel & & \downarrow E \\ A & \xrightarrow{I_1} & T_1 \\ \parallel & & \downarrow \text{as} \\ A & \xrightarrow{I_2} & T_2 \end{array}$$

Or, un théorème classique de Skolem (voir [Bir], §II.5 et §III.4, ou [Joh], §I.4, ainsi que [Ded, Sko]), affirme que $A \xrightarrow{I_2} T_2$ est une flèche universelle, autrement dit, que la composée $as \circ E : \text{Fdl}(A) \rightarrow T_2$ est un isomorphisme de treillis. Par ailleurs E est surjective en vertu du théorème 2.9, si bien que $as : T_1 \rightarrow T_2$ et E sont tous deux des isomorphismes de treillis.

Ainsi $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$ est *librement* engendré (comme treillis distributif) par les γ_a , comme annoncé dans le théorème 2.9. \square

Ce théorème nous permet d'*identifier* la fonction asymptote $\hat{f} : \{\pm\infty\}^A \rightarrow \{\pm\infty\}^B$ avec l'unique fonction topicale à portée nulle $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$, ou son prolongement continu $\overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$, ayant \hat{f} pour asymptote. Par la suite, on fera fréquemment ces identifications (qui sont compatibles avec les opérations du treillis, la composition, etc.).

Proposition 3.10. *Soit $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ une fonction topicale de portée au plus L , et $\hat{f} : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ son asymptote (représentée par une fonction topicale de portée nulle). Alors $d(f, \hat{f}) \leq L$.*

Démonstration. Soit \mathcal{L} l'ensemble des formes $\alpha \in \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$ telles que $\hat{\alpha} - L \leq \alpha \leq \hat{\alpha} + L$. On remarque que \mathcal{L} contient toutes les formes topicales du type $\gamma_i + c$, où $i \in A$ et $|c| \leq L$, et que \mathcal{L} est stable par les opérations du treillis; il contient donc toutes les formes min-max-plus de portée au plus L . Ainsi \mathcal{L} est dense dans $\mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$, et manifestement fermé (pour la topologie de la convergence uniforme), donc $\mathcal{L} = \mathbf{FrTp}_L(\mathbb{R}^A, \mathbb{R})$ et la proposition en résulte. \square

Corollaire 3.11. *Toute fonction uniformément topicale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ vérifie $d(f, \hat{f}) < \infty$.*

Comme on sait par ailleurs que \hat{f} est multiplicativement positivement homogène, il en résulte que \hat{f} peut s'obtenir par la formule

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda f(\mathbf{x}/\lambda) \quad (3.5)$$

la convergence étant uniforme en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$. Cette formule, qu'on aurait pu prendre comme définition de \hat{f} , explique pourquoi \hat{f} est quelquefois appelée la *fonction de récession* de f (c'est ce qu'on voit de f quand on la regarde de très loin).

Il en résulte également que deux fonctions uniformément topicales $f, g : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ vérifient $d(f, g) < \infty$ si et seulement si $\hat{f} = \hat{g}$. Ainsi, on peut interpréter \hat{f} comme la classe de f dans $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ pour la relation d'équivalence $d(f, g) < \infty$.

Proposition 3.12. *Soient $f_0, f_1 : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ uniformément topicales, et $0 < \lambda < 1$. La fonction topicale $f = (1 - \lambda)f_0 + \lambda f_1$ est uniformément topicale si et seulement si $\hat{f}_0 = \hat{f}_1$.*

Démonstration. Bornons-nous au cas $B = 1$.

Supposons $\hat{f}_0 = \hat{f}_1$, et notons $\bar{f}_0, \bar{f}_1 : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ les prolongements continus de f_0 et f_1 . On peut alors définir $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par la formule $\bar{f} = (1 - \lambda)\bar{f}_0 + \lambda\bar{f}_1$, ce qui a un sens, et donne une fonction continue, parce qu'on ne peut jamais avoir simultanément $f_0(\mathbf{x}) = -\infty$ et $f_1(\mathbf{x}) = +\infty$ ou le contraire, la différence $f_1 - f_0$ étant bornée sur \mathbb{R}^A .

Réciproquement, supposons f uniformément topicale. Il ressort de la formule (3.5) que $\hat{f} = (1 - \lambda)\hat{f}_0 + \lambda\hat{f}_1$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ un point dont toutes les coordonnées valent ± 1 . Alors $y_0 = \hat{f}_0(\mathbf{x})$, $y_1 = \hat{f}_1(\mathbf{x})$ et $y = \hat{f}(\mathbf{x})$ sont tous trois égaux à ± 1 , d'après la remarque suivant le lemme 2.2. Cela impose $y_0 = y_1$, sinon $y = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1$ serait strictement compris entre -1 et 1 . Donc $\hat{f}_0(\mathbf{x}) = \hat{f}_1(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \{\pm 1\}^A$. Mais tout sommet $\mathbf{p} \in \{\pm\infty\}^A$ peut s'écrire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mathbf{x}$ pour un $\mathbf{x} \in \{\pm 1\}^A$ bien choisi, d'où $\hat{f}_0(\mathbf{p}) = \hat{f}_1(\mathbf{p})$. On a donc bien $\hat{f}_0 = \hat{f}_1$. \square

En particulier, f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe de $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ si et seulement si elles ont même asymptote. On peut ainsi interpréter \hat{f}_0 comme la composante connexe de f_0 dans $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$. Plus formellement, la fonction $\text{as} : \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \rightarrow \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est l'unique rétraction continue de l'injection canonique $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \hookrightarrow \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$.

4 L'espace configurationnel

4.1 Rappels sur le permutaèdre \mathfrak{P}_S

Soit $N = \#S$. Rappelons que le *permutaèdre* \mathfrak{P}_S sur l'ensemble S (ou \mathfrak{P}_N , permutaèdre d'ordre N) est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^S des $N!$ points ayant pour coordonnées une permutation quelconque de $(1, 2, \dots, N)$. C'est un polytope de dimension $N - 1$, ayant $N!$ sommets. On sait que l'ensemble de ses cellules de dimension $N - k$ (pour $1 \leq k \leq N$) est naturellement en bijection avec l'ensemble des partitions ordonnées de S en k classes, c.à.d. l'ensemble des surjections de S dans $\{1, 2, \dots, k\}$. Voir [GG, Sch, Zie]. \mathfrak{P}_1 est un point, \mathfrak{P}_2 un segment, \mathfrak{P}_3 un hexagone et \mathfrak{P}_4 un octaèdre tronqué (voir figures 4 et 5). On va voir que le permutaèdre apparaît aussi comme une certaine compactification de $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\mathbf{u}$.

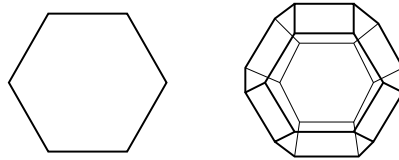


Figure 4: Les permutaèdres \mathfrak{P}_3 et \mathfrak{P}_4

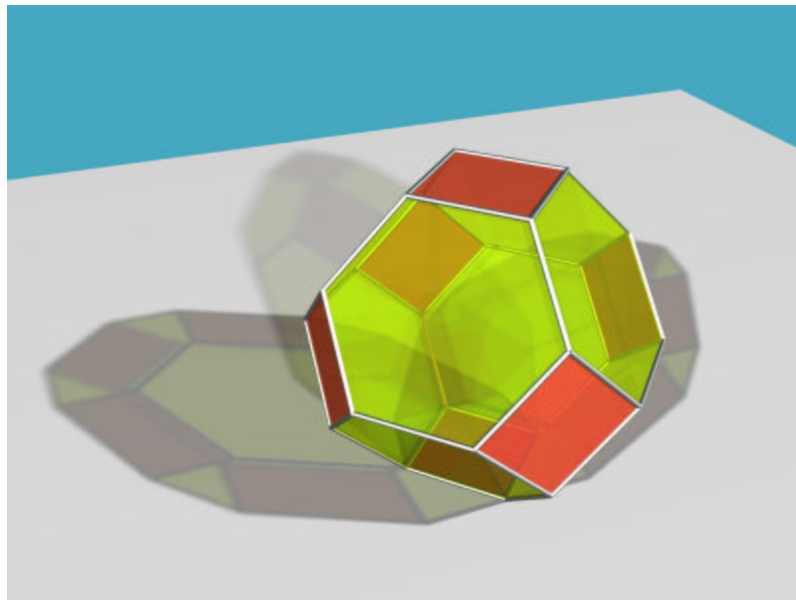


Figure 5: Le permutaèdre \mathfrak{P}_4 , ou octaèdre tronqué

Le permutaèdre peut également être décrit de la façon suivante. Soit \mathbf{x} un point de \mathbb{R}^S et x_1, x_2, \dots, x_N ses coordonnées, rangées par ordre croissant. D'après le théorème de Hardy-

Littlewood-Polya [Mir, GG], le point \mathbf{x} est dans \mathfrak{P}_S si et seulement si

$$x_1 + \cdots + x_N = 1 + \cdots + N \quad (4.1)$$

$$x_1 + \cdots + x_k \geq 1 + \cdots + k \quad (1 \leq k < N) \quad (4.2)$$

L'intérieur relatif \mathfrak{P}_S^i s'obtient en remplaçant les inégalités (4.2) par des inégalités strictes. On peut identifier \mathfrak{P}_S^i avec $\mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ en vertu du résultat suivant, que nous admettrons:

Proposition 4.1. *La fonction $\mathfrak{z} : \mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^S$ définie par $\mathfrak{z}(x_1 \dots x_N) = (y_1 \dots y_N)$, avec*

$$y_i = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{th}(x_i - x_j) \quad (1 \leq i \leq N) \quad (4.3)$$

envoie difféomorphiquement $\mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ sur \mathfrak{P}_S^i .

4.2 L'espace configurationnel $\text{Cf}(S) \simeq \mathfrak{P}_S$

Définissons maintenant l'espace configurationnel $\text{Cf}(S)$ comme l'ensemble des N^2 -uplets $(x_{ij})_{i,j \in S}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ vérifiant

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0 \quad (4.4)$$

pour tous $i, j, k \in S$, en convenant que la condition (4.4) est considérée comme remplie si le premier membre est indéterminé, c.à.d. quand un terme vaut $+\infty$ et un autre $-\infty$. Ainsi $\text{Cf}(S)$ est fermé dans $[-\infty, +\infty]^{S \times S}$. Cet ensemble peut aussi être vu comme la fermeture de l'image de la fonction $\mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow [-\infty, +\infty]^{S \times S}$ définie par $(x_i)_{i \in S} \mapsto (x_i - x_j)_{i,j \in S}$. L'espace $\text{Cf}(S)$ est donc une compactification de $\mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ qui intuitivement revient à permettre que certains écarts entre coordonnées $x_i - x_j$ (notés x_{ij}) deviennent infinis.

De façon rigoureuse, soit $k \in [1, N]$, une fonction $c : S \rightarrow \{1 \dots k\}$ surjective, et $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_N) \in \mathbb{R}^S$. Posons $x_{ij} = x_i - x_j$ si $c(i) = c(j)$, $+\infty$ si $c(i) > c(j)$ et $-\infty$ si $c(i) < c(j)$. On voit facilement que les conditions (4.4) sont remplies, et inversement que tout point de $\text{Cf}(S)$ peut être obtenu par ce procédé. La fonction c peut être vue comme une partition ordonnée de l'ensemble S , et les couples $(x_i, c(i))$ comme vivant dans k copies disjointes de \mathbb{R} , rangées dans l'ordre donné par c , et "infiniment éloignées" les unes des autres.



Figure 6: Un point de $\text{Cf}(6)$, pour $c(1, 3, 6) = 1, c(2) = 2, c(4, 5) = 3$

On notera $\text{Cf}(S, c)$ l'ensemble des éléments de $\text{Cf}(S)$ ainsi obtenus, qui est manifestement en bijection avec $(\mathbb{R}^{N_1}/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}) \times \cdots \times (\mathbb{R}^{N_k}/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}})$, où N_i est le cardinal de $c^{-1}(i)$. Les $\text{Cf}(S, c)$, pour c décrivant l'ensemble des partitions ordonnées de S , forment une partition de $\text{Cf}(S)$, et nous allons voir que c'est une partition cellulaire, équivalente à celle du polytope \mathfrak{P}_S .

La fonction \mathfrak{z} se prolonge de manière évidente en une fonction de $\text{Cf}(S)$ dans \mathfrak{P}_S , par la formule $(x_{ij}) \mapsto (y_i)$ avec

$$y_i = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{th} x_{ij} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (4.5)$$

A titre d'illustration, la figure 7 montre comment les courbes de niveau de (x_{ij}) dans $\text{Cf}(3)$ s'envoient dans \mathfrak{P}_3 .

Nous admettrons le résultat suivant:

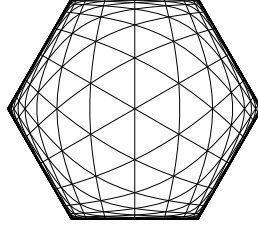


Figure 7: Courbes de niveau de x_{12}, x_{23}, x_{31} dans \mathfrak{P}_3

Proposition 4.2. *La fonction $\mathfrak{z} : \text{Cf}(S) \rightarrow \mathfrak{P}_S$ est un homéomorphisme. Pour toute partition ordonnée c de l'ensemble S en k classes, le sous-ensemble $\text{Cf}(S, c)$ est envoyé difféomorphiquement sur une des cellules de dimension $N - k$ du polytope \mathfrak{P}_S . La fonction \mathfrak{z} est donc une équivalence cellulaire entre $\text{Cf}(S)$ et \mathfrak{P}_S .*

On peut ainsi identifier l'espace configurationnel $\text{Cf}(S)$ avec le permutaèdre \mathfrak{P}_S , cette identification étant compatible avec la structure cellulaire. Les points intérieurs du permutaèdre correspondent au points de $\text{Cf}(S)$ à coordonnées finies, c'est-à-dire $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$.

4.3 Quotient par $\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ d'une fonction uniformément topicale

Pour $L \geq 0$, considérons la relation d'équivalence $\overset{L}{\cong}$ sur \mathbb{R}^S définie comme suit: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ vérifient $\mathbf{x} \overset{L}{\cong} \mathbf{y}$ si et seulement si $x_i - x_j \overset{2L}{\approx} y_i - y_j$ pour tous $i, j \in S$. Bien sûr, on peut aussi considérer $\overset{L}{\cong}$ comme une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$, et on adoptera plutôt ce point de vue. Une propriété importante (que le lecteur prendra soin de vérifier) est la suivante:

$$\mathbf{x} \overset{L}{\cong} \mathbf{y} \iff [\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists \lambda' \in \mathbb{R} \quad \lambda + \mathbf{x} \overset{L}{\approx} \lambda' + \mathbf{y}].$$

Il en résulte immédiatement que si $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est une fonction topicale de portée au plus L , et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A$ sont tels que $\mathbf{x} \overset{K+L}{\cong} \mathbf{y}$, alors $f(\mathbf{x}) \overset{K}{\cong} f(\mathbf{y})$.

Proposition 4.3. *Soient $\alpha, \beta : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ deux formes uniformément topicales. La fonction $\beta - \alpha : \mathbb{R}^S / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un (unique) prolongement continu $\text{Cf}(S) \rightarrow \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in \text{Cf}(S)$ quelconque, $c : S \rightarrow \{1, \dots, k\}$ la surjection associée à \mathfrak{p} , comme en §4.2 (telle que $c(i) > c(j)$ ssi $p_{ij} = +\infty$), et $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow S$ une section de c . Soit \mathcal{R} la fonction de $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ dans lui-même définie par $\mathcal{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, où

$$\begin{cases} y_i - y_j = p_{ij} & \text{si } c(i) = c(j), \\ y_{\sigma(r)} - y_{\sigma(s)} = x_{\sigma(r)} - x_{\sigma(s)} & \text{pour tous } r, s \in \{1, \dots, k\}, \end{cases}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned} y_i - y_j &= [y_i - y_{\sigma c(i)}] - [y_j - y_{\sigma c(j)}] + [y_{\sigma c(i)} - y_{\sigma c(j)}] \\ &= [p_{i, \sigma c(i)} - p_{j, \sigma c(j)}] + [x_{\sigma c(i)} - x_{\sigma c(j)}] \end{aligned}$$

pour tous $i, j \in S$. Cette fonction est idempotente et vérifie $\tilde{d}(\mathbf{x}, \mathcal{R}\mathbf{x}) \rightarrow 0$ lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \mathfrak{p}$. On voit également que pour tout $L \geq 0$, on a $\mathcal{R}\mathbf{x} \overset{L}{\cong} \mathcal{R}\mathbf{y}$ dès que \mathbf{x}, \mathbf{y} sont suffisamment proches de \mathfrak{p} . Posons $\ell_1 = \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathfrak{p}} (\beta - \alpha)(\mathbf{x})$ et $\ell_2 = \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathfrak{p}} (\beta - \alpha)(\mathbf{x})$.

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. D'après le théorème de densité 3.5, il existe α', β' de portée au plus L , pour un $L \geq 0$ convenable, telles que $d(\alpha, \alpha') \leq \epsilon$ et $d(\beta, \beta') \leq \epsilon$. Choisissons $K \geq 0$ tel que $1 - \text{th} 2K \leq \epsilon$. Soit \mathcal{V} la trace sur $\mathbb{R}^S/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ d'un voisinage de \mathfrak{p} dans $\text{Cf}(S)$ tel qu'on ait $\tilde{d}(\mathbf{x}, \mathcal{R}\mathbf{x}) \leq \epsilon$ et $\mathcal{R}\mathbf{x} \stackrel{K+L}{\cong} \mathcal{R}\mathbf{y}$ pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Enfin notons $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction topocale, de portée au plus L , définie par $f(\mathbf{x}) = (\alpha'\mathbf{x}, \beta'\mathbf{x})$.

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, on a $\mathbf{x}' \stackrel{K+L}{\cong} \mathbf{y}'$, où $\mathbf{x}' = \mathcal{R}\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}' = \mathcal{R}\mathbf{y}$, et donc $\tilde{f}(\mathbf{x}') \stackrel{K}{\cong} \tilde{f}(\mathbf{y}')$, autrement dit, $(\beta' - \alpha')(\mathbf{x}') \stackrel{2K}{\approx} (\beta' - \alpha')(\mathbf{y}')$. En particulier

$$|\text{th}(\beta' - \alpha')(\mathbf{y}') - \text{th}(\beta' - \alpha')(\mathbf{x}')| \leq 1 - \text{th} 2K \leq \epsilon \quad (4.6)$$

Les inégalités $\tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq \epsilon$, $\tilde{d}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \leq \epsilon$, $d(\alpha, \alpha') \leq \epsilon$, $d(\beta, \beta') \leq \epsilon$ nous donnent

$$\begin{aligned} |(\beta' - \alpha')(\mathbf{x}') - (\beta - \alpha)(\mathbf{x})| &\leq 4\epsilon \\ |(\beta' - \alpha')(\mathbf{y}') - (\beta - \alpha)(\mathbf{y})| &\leq 4\epsilon \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |\text{th}(\beta' - \alpha')(\mathbf{x}') - \text{th}(\beta - \alpha)(\mathbf{x})| &\leq 2 \text{th} 2\epsilon \leq 4\epsilon \\ |\text{th}(\beta' - \alpha')(\mathbf{y}') - \text{th}(\beta - \alpha)(\mathbf{y})| &\leq 2 \text{th} 2\epsilon \leq 4\epsilon \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec (4.6), donne

$$|\text{th}(\beta - \alpha)(\mathbf{y}) - \text{th}(\beta - \alpha)(\mathbf{x})| \leq 9\epsilon$$

pour tous \mathbf{x}, \mathbf{y} suffisamment proches de \mathfrak{p} . Ainsi $0 \leq \text{th} \ell_2 - \text{th} \ell_1 \leq 9\epsilon$, et ce pour tout $\epsilon > 0$, donc $\ell_1 = \ell_2$. \square

La proposition précédente donne un sens à l'expression $(\beta - \alpha)(\mathfrak{p})$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{p} \in \text{Cf}(S)$; c'est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, qui dépend continûment de α, β et \mathfrak{p} .

Plus généralement: pour $f, g \in \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ quelconques, la différence $g - f : \mathbb{R}^A/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^B$ admet un prolongement continu $\text{Cf}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^B}$, qui sera aussi noté $g - f$, justifiant la notation $(g - f)(\mathfrak{p})$ où $\mathfrak{p} \in \text{Cf}(A)$.

Corollaire 4.4. *Soit $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ uniformément topocale. La fonction quotient $\tilde{f} : \mathbb{R}^A/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^B/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ admet un (unique) prolongement continu $\text{Cf}(A) \rightarrow \text{Cf}(B)$.*

En effet, les différences $f_{ij} = f_i - f_j : \mathbb{R}^A/\mathbb{R}\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $i, j \in B$) vérifient $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ et admettent des prolongements continus $\text{Cf}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, par la proposition précédente, définissant ainsi une fonction continue $\text{Cf}(A) \rightarrow \text{Cf}(B)$ qui prolonge \tilde{f} , et que nous noterons encore \tilde{f} par abus de notation.

Donnons une autre preuve du corollaire ci-dessus, avec l'hypothèse supplémentaire que f est de portée finie (au plus L). Il existe pour tout $K \geq 0$ une fonction quotient \tilde{f}_K de $(\mathbb{R}^A/\stackrel{K+L}{\cong})$ dans $(\mathbb{R}^B/\stackrel{K}{\cong})$. Prenant la limite projective pour $K \rightarrow \infty$, dans la catégorie des espaces topologiques, on obtient une fonction continue

$$\dot{f} : \varprojlim_K (\mathbb{R}^A/\stackrel{K}{\cong}) \longrightarrow \varprojlim_K (\mathbb{R}^B/\stackrel{K}{\cong})$$

Il n'est pas très difficile de voir que les espaces limites s'identifient à $\text{Cf}(A)$ et $\text{Cf}(B)$, et que \dot{f} est un prolongement de \tilde{f} (pour cette identification).

5 Existence et propriétés du vecteur spectral

On dit qu'une endofonction topocale $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ admet un vecteur spectral si $(f^n(\mathbf{p}) - \mathbf{p})/n$ admet une limite quand $n \rightarrow \infty$, où \mathbf{p} est un point quelconque de \mathbb{R}^S ; l'existence de cette limite, et sa valeur, ne dépendent manifestement pas du choix de \mathbf{p} . La limite, quand elle existe, est le *vecteur spectral* de f , noté $\vec{\chi}(f)$.

On dit que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S$ est un *point glissant* (en anglais *gliding point*) pour f si la suite $f^{n+1}(\mathbf{p}) - f^n(\mathbf{p})$ est constante ($n \geq 0$). Dans ce cas, f a pour vecteur spectral $\vec{\chi}(f) = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$, et $f^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + n\vec{\chi}(f)$ pour tout $n \geq 0$.

L'objectif de cette section est de prouver que $\vec{\chi}(f)$ existe si f est uniformément topocale, et d'en donner une interprétation à l'aide de certains points fixes de \tilde{f} dans l'espace configurationnel $\text{Cf}(S)$.

5.1 Un théorème de points fixes

Lemme 5.1. *Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topocale, $\tilde{f} : \text{Cf}(S) \rightarrow \text{Cf}(S)$ la fonction quotient (prolongée par continuité), $\mathbf{p} = (p_{ij}) \in \text{Cf}(S)$ un point fixe de \tilde{f} , et $\vec{v} = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$. Alors \vec{v} est fini, en fait $\|\vec{v}\| \leq d(f, \hat{f})$, et on a $v_i = v_j$ pour tous $i, j \in S$ tels que $|p_{ij}| < \infty$.*

Démonstration. Observons d'abord que si $i, j \in S$ sont deux indices tels que la quantité $p_{ij} = (\gamma_i - \gamma_j)(\mathbf{p}) = (f_i - f_j)(\mathbf{p})$ est finie, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} v_i &= (f_i - \gamma_i)(\mathbf{p}) = (f_i - f_j)(\mathbf{p}) + (f_j - \gamma_j)(\mathbf{p}) - (\gamma_i - \gamma_j)(\mathbf{p}) \\ &= (f_j - \gamma_j)(\mathbf{p}) = v_j. \end{aligned}$$

Numérotons $1, \dots, N$ les éléments de S de manière à ce que $p_{ij} \leq 0$ lorsque $i \leq j$. Ainsi \mathbf{p} est dans l'adhérence de $\mathbb{R}_{\text{inc}}^N / \mathbb{R}\vec{\mathbf{u}}$, où $\mathbb{R}_{\text{inc}}^N$ est l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tels que $x_1 \leq \dots \leq x_N$.

Chaque coordonnée de $f(\mathbf{x})$ est à distance au plus $K = d(f, \hat{f})$ de l'ensemble des coordonnées de \mathbf{x} ; si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\text{inc}}^N$, cela donne en particulier (i) $f_1(\mathbf{x}) \geq x_1 - K$, et (ii) $f_s(\mathbf{x}) \geq x_s - K$ ou $f_s(\mathbf{x}) \leq x_{s-1} + K$ pour tout $s > 1$.

On veut démontrer $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{p}) \geq -K$ pour tout $s \in S$. Cette inégalité est vraie pour $s = 1$, comme on le voit en passant à la limite dans (i). Démontrons maintenant que pour $s > 1$ quelconque, on ne peut pas avoir simultanément $(f_{s-1} - \gamma_{s-1})(\mathbf{p}) \geq -K$ et $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{p}) < -K$. L'inégalité $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{p}) < -K$ implique que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\text{inc}}^N$ avec $\tilde{\mathbf{x}}$ suffisamment proche de \mathbf{p} , on a $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{x}) < -K$, et donc $(f_s - \gamma_{s-1})(\mathbf{x}) \leq K$ d'après (ii). Ceci montre que $(f_s - \gamma_{s-1})(\mathbf{p}) \leq K$, et en combinant avec $(f_{s-1} - \gamma_{s-1})(\mathbf{p}) \geq -K$, il vient $p_{s,s-1} = (f_s - f_{s-1})(\mathbf{p}) \leq 2K$. Ainsi $p_{s,s-1}$ est fini, et cela implique $v_s = v_{s-1}$ d'après la remarque du début, une contradiction.

Nous avons ainsi démontré $v_s \geq -K$ pour tout $s \in S$; les inégalités $v_s \leq K$ se démontrent de même. \square

Avec les notations du lemme, on dit que \mathbf{p} est point fixe *stable* de \tilde{f} si on a $v_i \leq v_j$ pour tous $i, j \in S$ tels que $p_{ij} < \infty$. (Notons que cette condition demeure inchangée si on remplace f par $\lambda + f$; c'est donc bien une condition sur \tilde{f} plutôt que sur f .) Intuitivement, la condition de stabilité traduit une "répulsion" entre les différents paquets de coordonnées de \mathbf{p} .

Lemme 5.2. *Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topocale, et $\mathbf{p} \in \text{Cf}(S)$. Si et seulement si \mathbf{p} est point fixe stable de \tilde{f} , il existe une suite $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ de points de \mathbb{R}^S telle que $\tilde{\mathbf{x}}_n \rightarrow \mathbf{p}$ dans $\text{Cf}(S)$ et $d(f\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \rightarrow 0$. Dans ce cas, $(f - \text{Id})(\mathbf{p})$ est le vecteur spectral de f .*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{p} = \lim \tilde{\mathbf{x}}_n$, où (\mathbf{x}_n) est une suite de points de \mathbb{R}^S vérifiant $d(f(\mathbf{x}_n), \mathbf{x}_{n+1}) \rightarrow 0$. Alors $\tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_n), \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}) \rightarrow 0$, si bien que les suites $(\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_n))$ et $(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1})$ ont les mêmes valeurs d'adhérence dans $\text{Cf}(S)$, ce qui nous donne $\tilde{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Puisque \mathbf{p} est fixe par \tilde{f} , le vecteur $\vec{\mathbf{v}} = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$ est à coordonnées finies. Ainsi $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = (f - \text{Id})(\mathbf{x}_n) + o(1) = \vec{\mathbf{v}} + o(1)$, et par conséquent $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 = n\vec{\mathbf{v}} + o(n)$. Mais l'hypothèse $f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_{n+1} + o(1)$ implique également $f^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_n + o(n)$, d'où $(f^n - \text{Id})(\mathbf{x}_0) = n\vec{\mathbf{v}} + o(n)$, c'est-à-dire que $\vec{\mathbf{v}}$ est le vecteur spectral de f . Si $i, j \in S$ sont deux indices quelconques, on a

$$(\gamma_i - \gamma_j)(\mathbf{x}_n) = n(v_i - v_j) + o(n)$$

et le membre de gauche tend vers p_{ij} quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi $p_{ij} < \infty$ implique $v_i \leq v_j$, et \mathbf{p} est bien un point fixe stable de \tilde{f} .

Réciproquement, supposons \mathbf{p} point fixe stable de \tilde{f} , et soit $\vec{\mathbf{v}} = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$. Soit $c : S \rightarrow \{1, \dots, k\}$ la partition ordonnée associée au point \mathbf{p} , et $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow S$ une section de c . Soit \mathbf{x}_0 le point défini par $(\gamma_i - \gamma_j)(\mathbf{x}_0) = p_{ij}$ si $c(i) = c(j)$, et $\gamma_{\sigma(r)}(\mathbf{x}_0) = 0$ pour tout $r \in \{1, \dots, k\}$. Soit $\vec{\mathbf{c}}$ le vecteur dont les composantes sont les $c(i)$. On vérifie facilement que la suite $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + n^{1/2}\vec{\mathbf{c}} + n\vec{\mathbf{v}}$ vérifie $\tilde{\mathbf{x}}_n \rightarrow \mathbf{p}$. Par ailleurs, on a $f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_{n+1} = (f - \text{Id})(\mathbf{x}_n) - (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)$, qui tend vers $(f - \text{Id})(\mathbf{p}) - \vec{\mathbf{v}} = 0$. \square

Théorème 5.3. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topocale, la fonction quotient $\tilde{f} : \text{Cf}(S) \rightarrow \text{Cf}(S)$ admet au moins un point fixe stable. Si \mathbf{p} est l'un quelconque d'entre eux, $(f - \text{Id})(\mathbf{p})$ est le vecteur spectral de f .*

Démonstration. Pour tout $s \in [0, 1[$, la fonction $\mathbf{x} \mapsto f(s\mathbf{x})$ de \mathbb{R}^S dans lui-même est contractante et admet donc un unique point fixe, que nous notons $\mathbf{x}(s)$. Puisque $\text{Cf}(S)$ est compact, le filet $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\text{Cf}(S)$ lorsque $s \rightarrow 1^-$. Soit \mathbf{p} l'une d'entre elles, limite d'une suite $\tilde{\mathbf{x}}(s_n)$ où $s_n \rightarrow 1^-$.

On vérifie facilement que $(s_n \mathbf{x}(s_n))^\sim \rightarrow \mathbf{p}$ dans $\text{Cf}(S)$, et par conséquent $\tilde{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Notons $\vec{\mathbf{v}} = (f - \text{Id})(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^S$. La formule $(f - \text{Id})(s\mathbf{x}(s)) = (1 - s)\mathbf{x}(s)$ entraîne $(1 - s_n)\mathbf{x}(s_n) \rightarrow \vec{\mathbf{v}}$ et donc $(1 - s_n)x_{ij}(s_n) \rightarrow v_i - v_j$, quels que soient les indices $i, j \in S$. Or $x_{ij}(s_n) \rightarrow p_{ij}$, d'où l'on déduit $p_{ij} < \infty \implies v_i \leq v_j$. Ainsi \mathbf{p} est bien un point fixe stable de \tilde{f} , et $\vec{\mathbf{v}}$ est le vecteur spectral de f . \square

On obtient ainsi une nouvelle démonstration de l'existence du vecteur spectral pour les fonctions min-max-plus (cf. l'introduction). Inversement, si on suppose connue l'existence du vecteur spectral pour les fonctions min-max-plus, alors on en déduit immédiatement qu'il en est de même pour les fonctions uniformément topocales, car l'existence de $\vec{\chi}(f)$ est une propriété fermée en f pour la topologie de la convergence uniforme — ce fait (observé indépendamment par Gaubert & Gunawardena) ne nous est pas utile dans le cas déterministe, mais nous aurons besoin de façon essentielle de son analogue stochastique, la proposition 6.3. Aussi l'existence de $\vec{\chi}(f)$ n'est pas vraiment un nouveau résultat; l'intérêt du théorème précédent est surtout de faire le lien entre $\vec{\chi}(f)$ et les points fixes de \tilde{f} .

Lemme 5.4. *Si $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ est topocale de portée au plus L , et si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S / \mathbb{R}\vec{\mathbf{u}}$ est tel que $\mathbf{x} \stackrel{L}{\cong} \tilde{f}(\mathbf{x})$, alors $\|(f - \text{Id})(\mathbf{x})\| \leq L$.*

Démonstration. La démonstration est très analogue à celle du lemme 5.1. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ tel que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \stackrel{L}{\cong} \mathbf{x}$, et numérotions $1, \dots, N$ les éléments de S de manière à ce que $x_1 \leq \dots \leq x_N$. D'après le lemme 2.2, on a (i) $y_1 \geq x_1 - L$ et (ii) $y_s \geq x_s - L$ ou $y_s \leq x_{s-1} + L$ pour tout $s > 1$. Enfin, la condition $\mathbf{y} \stackrel{L}{\cong} \mathbf{x}$ nous donne (iii) $y_s - y_{s-1} \stackrel{2L}{\approx} x_s - x_{s-1}$ pour tout $s > 1$.

On veut démontrer $y_s \geq x_s - L$ pour tout $s \in S$. C'est vrai pour $s = 1$, d'après (i). Prouvons maintenant l'inégalité pour $s > 1$ quelconque, en la supposant vraie pour $s - 1$.

Distinguons deux cas. Si $x_s - x_{s-1} \leq 2L$, alors $y_s - y_{s-1} = x_s - x_{s-1}$ d'après (iii) et donc $y_s - x_s = y_{s-1} - x_{s-1} \geq -L$. Si au contraire $x_s - x_{s-1} > 2L$, alors $y_s - y_{s-1} > 2L$ d'après (iii), d'où $y_s > 2L + y_{s-1} \geq x_{s-1} + L$ et donc $y_s \geq x_s - L$ d'après (ii).

On a ainsi démontré $\mathbf{y} \geq -L + \mathbf{x}$; l'inégalité $\mathbf{y} \leq L + \mathbf{x}$ se démontre de même. \square

Lemme 5.5. Soient $\alpha, \gamma : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ topicales, de portée au plus L et de portée nulle, respectivement. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S / \mathbb{R}\tilde{\mathbf{u}}$ sont tels que $\mathbf{x} \stackrel{L}{\approx} \mathbf{y}$, alors $(\alpha - \gamma)(\mathbf{x}) \stackrel{L}{\approx} (\alpha - \gamma)(\mathbf{y})$.

Démonstration. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ tels que $\mathbf{x} \stackrel{L}{\approx} \mathbf{y}$. Pour tout $\lambda \in [-L, L]$, la fonction topicale $f_\lambda : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_\lambda(\mathbf{x}) = (\alpha\mathbf{x}, -\lambda + \gamma\mathbf{x})$ est de portée au plus L , si bien que $f_\lambda(\mathbf{x}) \stackrel{0}{\approx} f_\lambda(\mathbf{y})$. Cela signifie que $\lambda + (\alpha - \gamma)(\mathbf{x}) \stackrel{0}{\approx} \lambda + (\alpha - \gamma)(\mathbf{y})$ pour tout $\lambda \in [-L, L]$, autrement dit, $(\alpha - \gamma)(\mathbf{x}) \stackrel{L}{\approx} (\alpha - \gamma)(\mathbf{y})$. \square

Théorème 5.6. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ topicale de portée au plus L , il existe dans $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\tilde{\mathbf{u}}$ au moins une classe d'équivalence de $\stackrel{L}{\approx}$ stable par \tilde{f} , et si C est l'une quelconque d'entre elles, on a $(f - \text{Id})(\mathbf{x}) = \tilde{\chi}(f)$ pour tout $\mathbf{x} \in C$.

En particulier, f admet des points glissants, c'est-à-dire des points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ tels que $f^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + n\tilde{\chi}(f)$ pour tout $n \geq 0$; en effet, chaque classe stable de $\stackrel{L}{\approx}$, vue comme classe d'équivalence dans \mathbb{R}^S , est constituée entièrement de points glissants.

Démonstration. Supposons que C soit une classe d'équivalence de $\stackrel{L}{\approx}$ dans $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\tilde{\mathbf{u}}$ telle que $\tilde{f}(C) \subseteq C$. Si \mathbf{x} est un élément quelconque de C , on a $\|(f - \text{Id})(\mathbf{x})\| \leq L$ d'après le lemme 5.4. Si \mathbf{y} est un autre élément de C , on a $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{x}) \stackrel{L}{\approx} (f_s - \gamma_s)(\mathbf{y})$ pour tous $s \in S$ d'après le lemme 5.5, ce qui, combiné avec les inégalités $|(f_s - \gamma_s)(\mathbf{x})| \leq L$, nous donne $(f - \text{Id})(\mathbf{x}) = (f - \text{Id})(\mathbf{y})$. Donc $f - \text{Id}$ est constante sur C ; notons $\tilde{\mathbf{v}}$ sa valeur.

L'ensemble $\tilde{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S : \tilde{\mathbf{x}} \in C\}$ vérifie $f(\tilde{C}) \subseteq \tilde{C}$ et $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \tilde{C}$, ce qui montre bien que $\tilde{\mathbf{v}}$ est le vecteur spectral de f et que tous les points de \tilde{C} sont glissants.

Existence d'une classe stable. Soit $\mathbf{p} \in \text{Cf}(S)$ un point fixe stable de \tilde{f} , et $\tilde{\mathbf{v}} = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$ le vecteur spectral, qui vérifie $\|\tilde{\mathbf{v}}\| \leq L$ d'après le lemme 5.1. Choisissons $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S / \mathbb{R}\tilde{\mathbf{u}}$ tel que $x_i - x_j \stackrel{2(L+1)}{\approx} p_{ij}$ pour tous $i, j \in S$ (ce qu'on pourrait écrire $\mathbf{x} \stackrel{L+1}{\approx} \mathbf{p}$, avec un abus de notation évident).

Remarquons que pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, la classe de \mathbf{x} pour la relation $\stackrel{L+\epsilon}{\approx}$ contient \mathbf{p} dans son adhérence; on peut donc trouver un \mathbf{y} tel que $\mathbf{y} \stackrel{L+\epsilon}{\approx} \mathbf{x}$ et suffisamment proche de \mathbf{p} pour que $\|(f - \text{Id})(\mathbf{y})\| \leq L + \epsilon$. Combinant cette inégalité avec les relations $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{x}) \stackrel{L+\epsilon}{\approx} (f_s - \gamma_s)(\mathbf{y})$ données par le lemme 5.5, il vient $\|(f - \text{Id})(\mathbf{x})\| \leq L + \epsilon$, et ceci est valable pour des ϵ arbitrairement petits, donc $\|(f - \text{Id})(\mathbf{x})\| \leq L$.

Soit C la classe de \mathbf{x} pour la relation $\stackrel{L}{\approx}$. Quel que soit $\mathbf{y} \in C$, on a $(f_s - \gamma_s)(\mathbf{x}) \stackrel{L}{\approx} (f_s - \gamma_s)(\mathbf{y})$ pour tout $s \in S$, ce qui implique $(f - \text{Id})(\mathbf{x}) = (f - \text{Id})(\mathbf{y})$ puisque $\|(f - \text{Id})(\mathbf{x})\| \leq L$. Ainsi $f - \text{Id}$ est constante sur C , et comme C contient \mathbf{p} dans son adhérence, la valeur de cette constante n'est autre que $\tilde{\mathbf{v}} = (f - \text{Id})(\mathbf{p})$; autrement dit, f coïncide sur \tilde{C} avec la translation de vecteur $\tilde{\mathbf{v}}$. Finalement, les conditions de stabilité $p_{ij} < \infty \implies v_i \leq v_j$ entraînent, comme on le voit facilement, $\tilde{f}(C) \subseteq C$. \square

5.2 Diverses propriétés du vecteur spectral

Proposition 5.7. *Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale, avec S non vide. Pour tout $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S$ on a*

$$[\mathbf{p}, f\mathbf{p}] \leq \lfloor \vec{\chi}(f) \rfloor \leq \lceil \vec{\chi}(f) \rceil \leq \lceil \mathbf{p}, f\mathbf{p} \rceil. \quad (5.1)$$

Plus précisément,

$$\lfloor \vec{\chi}(f) \rfloor = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S} [\mathbf{p}, f\mathbf{p}], \quad \lceil \vec{\chi}(f) \rceil = \inf_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S} \lceil \mathbf{p}, f\mathbf{p} \rceil, \quad (5.2)$$

et ces bornes sont atteintes si f est à portée finie.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a $n[\mathbf{p}, f\mathbf{p}] \leq \sum_{k=0}^{n-1} [f^k \mathbf{p}, f^{k+1} \mathbf{p}] \leq [\mathbf{p}, f^n \mathbf{p}]$ et de même $n[\mathbf{p}, f\mathbf{p}] \geq [\mathbf{p}, f^n \mathbf{p}]$. Faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans

$$[\mathbf{p}, f\mathbf{p}] \leq n^{-1}[\mathbf{p}, f^n \mathbf{p}] \leq n^{-1} \lceil \mathbf{p}, f^n \mathbf{p} \rceil \leq \lceil \mathbf{p}, f\mathbf{p} \rceil,$$

on obtient l'inégalité (5.1). D'autre part, $(f - \text{Id})(\mathbf{p})$ tend vers $\vec{\chi}(f)$ lorsque $\tilde{\mathbf{p}}$ tend vers un point fixe stable de $\tilde{f} : \text{Cf}(S) \rightarrow \text{Cf}(S)$, ce qui prouve (5.2); et la limite est atteinte si \mathbf{p} est un point glissant de f . \square

Lemme 5.8. *Soient $f, g : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicales. Si \tilde{f} et \tilde{g} ont un point fixe stable commun $\mathbf{p} \in \text{Cf}(S)$, alors $\vec{\chi}(f \vee g) = \vec{\chi}(f) \vee \vec{\chi}(g)$ et $\vec{\chi}(f \wedge g) = \vec{\chi}(f) \wedge \vec{\chi}(g)$.*

Démonstration. Les formules $(f \vee g - \text{Id})(\mathbf{p}) = (f - \text{Id})(\mathbf{p}) \vee (g - \text{Id})(\mathbf{p})$ et $(f \wedge g - \text{Id})(\mathbf{p}) = (f - \text{Id})(\mathbf{p}) \wedge (g - \text{Id})(\mathbf{p})$ montrent que \mathbf{p} est un point fixe stable pour $(f \vee g)^\sim$ et $(f \wedge g)^\sim$, et que les vecteurs spectraux de $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont bien ceux indiqués. \square

Corollaire 5.9. *Soit f une fonction uniformément topicale de \mathbb{R}^S dans lui-même, et T la translation ayant même vecteur spectral. Alors*

$$\begin{aligned} \vec{\chi}(f \vee \text{Id}) &= \vec{\chi}(f) \vee 0, & \vec{\chi}(f \wedge \text{Id}) &= \vec{\chi}(f) \wedge 0, \\ \vec{\chi}(f \vee T) &= \vec{\chi}(f \wedge T) = \vec{\chi}(f) = \vec{\chi}(T). \end{aligned}$$

Lemme 5.10. *Soit $g : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ topicale à portée finie, avec $Z = \{i \in S : \chi_i(g) = 0\}$ non vide et $g \geq \text{Id}$. Il existe une forme max-plus $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha g = \alpha$ et $\hat{\alpha} = \bigvee_{i \in Z} \gamma_i$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{p} = (p_i)$ un point glissant de g , et $\mathbf{p}^n = g^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + n\vec{\chi}(g)$ ses itérées ($n \geq 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha_n : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ la forme max-plus définie par $\alpha_n(\mathbf{x}) = \lceil \mathbf{p}^n, \mathbf{x} \rceil$. Les inégalités $\lceil \mathbf{p}^{n+1}, g\mathbf{x} \rceil \leq \lceil \mathbf{p}^n, \mathbf{x} \rceil$ montrent que $\alpha_{n+1} g \leq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne à la limite $\alpha g \leq \alpha$, où $\alpha(\mathbf{x}) = \max_{i \in Z} (x_i - p_i)$ est la limite simple des α_n . Il est d'autre part évident que $\alpha g \geq \alpha$, puisque $g \geq \text{Id}$. \square

Proposition 5.11. *Soient $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ topicale à portée finie, $\pi : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément topicale, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] \leq \lambda \iff \exists \alpha \in W(\pi) \quad \alpha f \leq \alpha + \lambda \quad (5.3)$$

où $W(\pi)$ est l'ensemble des majorants max-plus de π .

Démonstration. On peut supposer $\lambda = 0$, quitte à remplacer f par $f - \lambda$.

S'il existe $\alpha \in W(\pi)$ tel que $\alpha f \leq \alpha$, alors $\pi f^n(\mathbf{o}) \leq \alpha f^n(\mathbf{o}) \leq \alpha(\mathbf{o})$ pour tout $n \geq 0$, et comme $\pi f^n(\mathbf{o}) = n\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] + o(n)$ pour n grand, cela entraîne $\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] \leq 0$.

Réciproquement, supposons $\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] \leq 0$, et soit $g = f \vee \text{Id}$. La suite d'équivalences

$$\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] \leq 0 \iff \hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] \vee 0 = 0 \iff \hat{\pi}[\vec{\chi}(f) \vee 0] = 0 \iff \hat{\pi}[\vec{\chi}(g)] = 0$$

(cf. §2.4, et le corollaire 5.9) montre que g vérifie les conditions du lemme 5.10. Soit donc $Z = \{i \in S : \chi_i(g) = 0\}$, et α la forme max-plus telle que $\alpha g = \alpha$ et $\hat{\alpha} = \bigvee_{i \in Z} \gamma_i$. Écrivons $\hat{\pi}$ comme infimum de formes max-plus de portée nulle: l'une d'elles, disons $\beta = \bigvee_{i \in T} \gamma_i$, doit s'annuler en $\vec{\chi}(g)$. Ceci requiert $T \subseteq Z$, et donc $\hat{\pi} \leq \beta \leq \hat{\alpha}$. Quitte à ajouter à α une constante convenable, on a bien $\alpha \geq \pi$, et d'autre part $\alpha = \alpha(f \vee \text{Id}) = \alpha f \vee \alpha$ (puisque α est max-plus) c'est-à-dire $\alpha f \leq \alpha$. \square

Corollaire 5.12. Soient $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ et $\pi : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément topicales. On a

$$\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] = \inf_{\alpha \in W(\pi)} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S} \alpha f(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

En effet, la formule (5.4) est une conséquence immédiate de (5.3) si f est à portée finie; par densité, la formule est vraie pour toute fonction f uniformément topicale.

Semi-conjugaisons. Soient f, g, π des fonctions uniformément topicales faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^A & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^A \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathbb{R}^B & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^B \end{array}$$

i.e. $\pi f = g\pi$. Alors $\pi f^n = g^n \pi$ pour tout $n \geq 0$; évaluant cette identité à l'origine (de \mathbb{R}^A), il vient $n\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] + o(n) = n\vec{\chi}(g) + o(n)$ pour n grand, d'où

$$\hat{\pi}[\vec{\chi}(f)] = \vec{\chi}(g) \quad (5.5)$$

à la limite. En particulier:

Proposition 5.13. Pour toute fonction uniformément topicale $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$, le vecteur spectral $\vec{\chi}(f)$ est un point fixe de \hat{f} :

$$\hat{f}[\vec{\chi}(f)] = \vec{\chi}(f). \quad (5.6)$$

Réciproquement, si $h : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ est une fonction topicale à portée nulle et $\vec{v} \in \mathbb{R}^S$ un point fixe de h , alors on peut trouver une fonction uniformément topicale $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ telle que $\hat{f} = h$ et $\vec{\chi}(f) = \vec{v}$.

En d'autres termes, la relation (5.6) est l'unique contrainte liant \hat{f} et $\vec{\chi}(f)$.

Démonstration. La formule (5.6) s'obtient en faisant $f = g = \pi$ dans (5.5). Pour la réciproque, remarquons que la fonction $f : \mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}) + \vec{v}$ vérifie $f^n(\mathbf{o}) = \mathbf{o} + n\vec{v}$ pour tout $n \geq 0$ et répond ainsi au problème posé. \square

5.3 Le principe de sélection

Proposition 5.14 (Principe de sélection). *Soient $f_1, \dots, f_n, g : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ des fonctions uniformément topicales telles que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $f_i(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Alors il existe $i \in [1, n]$ tel que $\bar{\chi}(f_i) = \bar{\chi}(g)$.*

Démonstration. L'ensemble $\bigcup_{i=1}^n \{\mathbf{p} \in \text{Cf}(S) : (f_i - g)(\mathbf{p}) = 0\}$ est fermé dans $\text{Cf}(S)$, comme union finie de fermés; il contient $\mathbb{R}^S / \mathbb{R}\bar{\mathbf{u}}$ par hypothèse, et donc coïncide avec l'espace $\text{Cf}(S)$ tout entier.

En particulier, pour \mathbf{p} point fixe stable de \tilde{g} , il existe $i \in [1, n]$ tel que $(f_i - g)(\mathbf{p}) = 0$. Ceci entraîne $(f_i - \text{Id})(\mathbf{p}) = (g - \text{Id})(\mathbf{p})$, donc \mathbf{p} est point fixe stable de \tilde{f}_i , avec $\bar{\chi}(f_i) = \bar{\chi}(g)$. \square

Corollaire 5.15. *Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ deux fonctions uniformément topicales telles que $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$ soient comparables pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$. Alors $\bar{\chi}(f_1)$ et $\bar{\chi}(f_2)$ sont comparables, et*

$$\bar{\chi}(f_1 \vee f_2) = \bar{\chi}(f_1) \vee \bar{\chi}(f_2), \quad \bar{\chi}(f_1 \wedge f_2) = \bar{\chi}(f_1) \wedge \bar{\chi}(f_2).$$

Démonstration. Appliquant le principe de sélection avec f_1, f_2 et $g = f_1 \vee f_2$, on voit que $\bar{\chi}(g)$ est égal à $\bar{\chi}(f_1)$ ou $\bar{\chi}(f_2)$. Par ailleurs on a évidemment $\bar{\chi}(g) \geq \bar{\chi}(f_1)$ et $\bar{\chi}(g) \geq \bar{\chi}(f_2)$, donc les vecteurs spectraux $\bar{\chi}(f_1)$ et $\bar{\chi}(f_2)$ sont comparables, et $\bar{\chi}(g)$ est le plus grand des deux. Ceci démontre la première formule; l'autre se traite de même. \square

Corollaire 5.16. *Soit G une partie de $\mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S$ telle que $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^S : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G\}$ soit totalement ordonné pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$, et soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions uniformément topicales $\mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ dont le graphe est contenu dans G . L'ensemble \mathcal{F} est un treillis, et la fonction $\bar{\chi} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^S$ un morphisme de treillis, dont l'image $\bar{\chi}(\mathcal{F})$ est totalement ordonnée.*

Ce résultat s'utilise typiquement dans la situation suivante. Soit $g : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale, $s \in S$ un indice distingué, et G l'ensemble des (\mathbf{x}, \mathbf{y}) tels que $\gamma_i(\mathbf{y}) = g_i(\mathbf{x})$ pour tout $i \neq s$. Alors \mathcal{F} est constitué des fonctions uniformément topicales $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ telles que $f_i = g_i$ pour tout $i \neq s$, tandis que la composante f_s peut être quelconque (ainsi \mathcal{F} est isomorphe à $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ comme ensemble ordonné). Le corollaire affirme alors que la fonction $f_s \mapsto \bar{\chi}(f)$ est un morphisme de treillis de $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^S . Cet énoncé est en substance équivalent au "théorème de dualité" de Gaubert et Gunawardena sur les familles "rectangulaires" de fonctions min-max-plus [Gu2, Gu3, GG2].

6 Théorèmes ergodiques multiplicatifs

6.1 Enoncé du problème

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{J}, \mu)$ et $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ une endofonction \mathcal{J} -mesurable et préservant la mesure μ .

Considérons une fonction $u : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ telle que $u_\omega : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ soit uniformément topicale pour tout $\omega \in \Omega$. On peut la représenter, de façon équivalente, par une fonction $\bar{u} : \Omega \times \bar{\mathbb{R}}^A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^B$ (puisque chacune des fonctions u_ω admet un prolongement continu $\bar{u}_\omega : \bar{\mathbb{R}}^A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^B$) ou par une fonction $\dot{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$.

On observe, en premier lieu, que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) la fonction $u : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est mesurable;
- (ii) les fonctions $\omega \mapsto u_\omega(\mathbf{x})$ sont mesurables pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$;

- (iii) la fonction $\bar{u} : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^B$ est mesurable;
- (iv) les fonctions $\omega \mapsto \bar{u}_\omega(\mathbf{x})$ sont mesurables pour tout $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^A$;
- (v) la fonction $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est mesurable, où $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est muni de la tribu borélienne associée à la topologie de la convergence uniforme.

Les équivalences (i) \iff (ii) et (iii) \iff (iv) \iff (v) résultent des propriétés générales des fonctions de Carathéodory, voir [AB], §4.10. Il est évident que (iv) \implies (ii), et l'implication réciproque (ii) \implies (iv) s'obtient en remarquant que, pour tout $\mathbf{p} \in \overline{\mathbb{R}}^A$, la fonction $\omega \mapsto \bar{u}_\omega(\mathbf{p})$ est la limite simple des fonctions $\omega \mapsto u_\omega(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ tend vers \mathbf{p} .

Si u vérifie l'une quelconque des conditions de mesurabilité ci-dessus, on dira que u est une *fonction uniformément topicale stochastique*.

Ecart. Soit $p \in [1, \infty]$. Si $u, v : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ sont deux fonctions uniformément topicales stochastiques, on définit $D_p(u, v)$ comme la norme L^p de la distance uniforme $d(u_\omega, v_\omega)$ vue comme fonction de ω , i.e.

$$D_p(u, v) = \begin{cases} \left[\int_{\Omega} d(u_\omega, v_\omega)^p \mu \right]^{1/p} & \text{si } p < \infty, \\ \sup_{\omega \in \Omega} \text{ess } d(u_\omega, v_\omega) & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les D_p sont évidemment des écarts, c.à.d. $D_p(u, u) = 0$, $D_p(u, v) = D_p(v, u)$ et $D_p(u, w) \leq D_p(u, v) + D_p(v, w)$. Ce sont “presque” des distances, dans le sens que $D_p(u, v) = 0$ si et seulement si $u_\omega = v_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Produits ergodiques. Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ une fonction uniformément topicale stochastique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $u_\omega^n : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ comme la composée

$$u_\omega^n = u_\omega \circ u_{\tau\omega} \circ \cdots \circ u_{\tau^{n-1}\omega}$$

si bien que $u_\omega^0 = \text{Id}$ et $u_\omega^{m+n} = u_\omega^m \circ u_{\tau^m\omega}^n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Comme dans le cas déterministe, on cherche à savoir si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $u_\omega^n(\mathbf{o})/n$ converge dans \mathbb{R}^S quand $n \rightarrow \infty$. Si c'est le cas, nous dirons que u admet un *vecteur spectral stochastique*, qui est la fonction $\vec{\chi}_u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^S$ presque partout définie par

$$\vec{\chi}_u(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_\omega^n(\mathbf{p}) - \mathbf{p}}{n} \tag{6.1}$$

où \mathbf{p} est un point quelconque de \mathbb{R}^S . (Ici encore, l'existence de la limite, et la valeur de celle-ci, ne dépendent pas du point \mathbf{p} choisi.) Cette fonction, comme limite p.p. de fonctions mesurables, est automatiquement mesurable (plus précisément, est la restriction d'une fonction mesurable à un sous-ensemble de mesure pleine de Ω).

De la formule $u_\omega^{n+1} = u_\omega \circ u_{\tau\omega}^n$ on déduit que, si le vecteur spectral stochastique $\vec{\chi}_u$ existe, il doit vérifier

$$\vec{\chi}_u(\omega) = \hat{u}_\omega[\vec{\chi}_u(\tau\omega)] \tag{6.2}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$, ce qu'on peut considérer comme l'analogue stochastique de la formule (5.6).

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique. Si la quantité $D_1(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} d(u_\omega, \hat{u}_\omega) \mu$ est finie, alors u admet un vecteur spectral stochastique, c'est-à-dire que la limite (6.1) existe (dans \mathbb{R}^S) pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

Rappelons ce résultat bien connu (voir [Par], §1.2, exercice 16, p. 27).

Lemme 6.2. Si $f \in L^1(\Omega)$ alors $f(\tau^n \omega)/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n \subseteq \Omega$ l'ensemble des ω tels que $n\epsilon \leq |f(\omega)| < (n+1)\epsilon$. Définissons également $F_n = \bigsqcup_{m \geq n} E_m = \{\omega : |f(\omega)| \geq n\epsilon\}$ et $G_n = \{\omega : \tau^n \omega \in F_n\}$. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\Omega} |f| \mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} |f| \mu \\ &\geq \epsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mu(E_n) = \epsilon \sum_{n \geq 1} \mu(F_n) = \epsilon \sum_{n \geq 1} \mu(G_n), \end{aligned}$$

ce qui montre, par Borel-Cantelli, que presque tout $\omega \in \Omega$ appartient à un nombre fini de G_n , i.e. vérifie $|f(\tau^n \omega)| < n\epsilon$ pour tout n assez grand.

Ainsi $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} |f(\tau^n \omega)| \leq \epsilon$ presque partout, et ce pour tout $\epsilon > 0$, d'où le résultat. \square

Proposition 6.3. Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $v : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique avec $D_1(u, v) \leq \epsilon$ et admettant un vecteur spectral stochastique. Alors u admet un vecteur spectral stochastique.

Démonstration. Posons $\vec{\chi}_-(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\omega}^n(\mathbf{o})/n$ et $\vec{\chi}_+(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\omega}^n(\mathbf{o})/n$, les limites inférieure et supérieure étant calculées coordonnée par coordonnée. Définissons aussi $\vec{\chi}_v(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{\omega}^n(\mathbf{o})/n$ et $\eta(\omega) = d(u_{\omega}, v_{\omega})$. De la formule

$$\begin{aligned} d(u_{\omega}^{n+1}, v_{\omega}^{n+1}) &= d(u_{\omega} u_{\tau \omega}^n, v_{\omega} v_{\tau \omega}^n) \\ &\leq d(u_{\omega}, v_{\omega}) + d(u_{\tau \omega}^n, v_{\tau \omega}^n) \end{aligned}$$

on déduit $d(u_{\omega}^n, v_{\omega}^n) \leq S_n \eta(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \eta(\tau^k \omega)$ pour tous $n \geq 0$ et $\omega \in \Omega$, et donc

$$\frac{v_{\omega}^n(\mathbf{o})}{n} - \frac{S_n \eta(\omega)}{n} \leq \frac{u_{\omega}^n(\mathbf{o})}{n} \leq \frac{v_{\omega}^n(\mathbf{o})}{n} + \frac{S_n \eta(\omega)}{n}$$

Par le théorème de Birkhoff, $S_n \eta(\omega)/n$ converge presque partout vers $\eta'(\omega) = \mathbb{E}(\eta | \mathcal{T}')$, où \mathcal{T}' est la sous-tribu τ -invariante de \mathcal{T} . La fonction η' est L^1 et en particulier presque partout finie. Prenant les limites inférieure et supérieure dans les inégalités ci-dessus, il vient

$$\vec{\chi}_v(\omega) - \eta'(\omega) \leq \vec{\chi}_-(\omega) \leq \vec{\chi}_+(\omega) \leq \vec{\chi}_v(\omega) + \eta'(\omega)$$

presque partout. Ceci montre que $\vec{\chi}_-$ et $\vec{\chi}_+$ sont presque partout finies. En outre $\|\vec{\chi}_+ - \vec{\chi}_-\|_1 \leq 2\mathbb{E}(\eta') \leq 2\epsilon$, et ce pour tout $\epsilon > 0$, donc $\vec{\chi}_+ = \vec{\chi}_-$ p.p. \square

Proposition 6.4. Soient $u, v : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicales stochastiques, ayant des vecteurs spectraux $\vec{\chi}_u$ et $\vec{\chi}_v$. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|\vec{\chi}_v - \vec{\chi}_u\|_p \leq D_p(u, v). \quad (6.3)$$

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration précédente. On a

$\|v_\omega^n(\mathbf{o})/n - u_\omega^n(\mathbf{o})/n\| \leq S_n \eta(\omega)/n$ et donc, à la limite, $\|\vec{\chi}_v(\omega) - \vec{\chi}_u(\omega)\| \leq \eta'(\omega)$ p.p. Comme $\|\eta'\|_p \leq \|\eta\|_p = D_p(u, v)$, le résultat en découle. \square

Proposition 6.5. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique, ayant un vecteur spectral stochastique $\vec{\chi}_u$, et soit $\zeta(\omega) = \|u_\omega(\mathbf{o})\| = d(u_\omega(\mathbf{o}), \mathbf{o})$. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\|\vec{\chi}_u\|_p \leq \|\zeta\|_p \leq D_p(u, \hat{u}). \quad (6.4)$$

Si de plus $p < \infty$ et $\|\zeta\|_p < \infty$, alors les fonctions $u_\omega^n(\mathbf{o})/n$ convergent vers $\vec{\chi}_u$ en norme L^p .

Démonstration. Les inégalités $d(u_\omega^n(\mathbf{o}), \mathbf{o}) \leq S_n \zeta(\omega)$ donnent $\|u_\omega^n(\mathbf{o})/n\|_p \leq \|\zeta\|_p$ et donc $\|\vec{\chi}_u\|_p \leq \|\zeta\|_p$ d'après le lemme de Fatou.

Supposons maintenant $1 \leq p < \infty$, et démontrons que la norme $\|u_\omega^n(\mathbf{o})/n - \vec{\chi}_u\|_p$ tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. On peut trouver $L \geq 0$ tel que $\int_{\zeta(\omega) > L} \zeta(\omega)^p \leq \epsilon^p$. Posons alors

$$v_\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_\omega(\mathbf{x}) & \text{si } \zeta(\omega) \leq L, \\ u_\omega(\mathbf{x}) - u_\omega(\mathbf{o}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

si bien que

$$d(u_\omega, v_\omega) = \xi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta(\omega) \leq L, \\ \zeta(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\|v_\omega(\mathbf{o})\| \leq L$ pour tout ω , et par conséquent $\|v_\omega^n(\mathbf{o})\| \leq nL$ pour tous n, ω . Posons

$$\vec{\chi}_-(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_\omega^n(\mathbf{o})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\chi}_-^n(\omega), \quad \vec{\chi}_+(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_\omega^n(\mathbf{o})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\chi}_+^n(\omega),$$

où $\vec{\chi}_-^n(\omega) = \inf_{m \geq n} v_\omega^m(\mathbf{o})/m$ et $\vec{\chi}_+^n(\omega) = \sup_{m \geq n} v_\omega^m(\mathbf{o})/m$. Posons également $\vec{\chi}_{\text{av}} = (\vec{\chi}_+ + \vec{\chi}_-)/2$ et $\vec{\chi}_{\text{av}}^n = (\vec{\chi}_+^n + \vec{\chi}_-^n)/2$. Les inégalités $d(u_\omega^n, v_\omega^n) \leq S_n \xi(\omega)$ donnent

$$\frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} - \frac{S_n \xi(\omega)}{n} \leq \frac{v_\omega^n(\mathbf{o})}{n} \leq \frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} + \frac{S_n \xi(\omega)}{n}$$

et à la limite

$$\vec{\chi}_u(\omega) - \xi'(\omega) \leq \vec{\chi}_-(\omega) \leq \vec{\chi}_+(\omega) \leq \vec{\chi}_u(\omega) + \xi'(\omega)$$

presque partout, avec $\xi' = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{J}')$. On a en particulier $\|\vec{\chi}_{\text{av}} - \vec{\chi}_u\|_p \leq \|\xi'\|_p \leq \|\xi\|_p \leq \epsilon$, et $\|\vec{\chi}_+ - \vec{\chi}_-\|_p \leq 2\|\xi'\|_p \leq 2\epsilon$.

Les fonctions $\vec{\chi}_\pm^n$ sont uniformément bornées et convergent p.p. vers $\vec{\chi}_\pm$, donc aussi en norme L^p . Soit $R \geq 1$ tel que $\|\vec{\chi}_-^R - \vec{\chi}_-\|_p \leq \epsilon$ et $\|\vec{\chi}_+^R - \vec{\chi}_+\|_p \leq \epsilon$. Ceci donne $\|\vec{\chi}_+^R - \vec{\chi}_-^R\|_p \leq 4\epsilon$ et $\|\vec{\chi}_{\text{av}}^R - \vec{\chi}_u\|_p \leq 2\epsilon$.

Pour tout $n \geq R$, on a $\vec{\chi}_-^R(\omega) \leq v_\omega^n(\mathbf{o})/n \leq \vec{\chi}_+^R(\omega)$ et par conséquent

$$\vec{\chi}_-^R(\omega) - \frac{S_n \xi(\omega)}{n} \leq \frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} \leq \vec{\chi}_+^R(\omega) + \frac{S_n \xi(\omega)}{n}$$

d'où

$$\left\| \frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} - \vec{\chi}_{\text{av}}^R(\omega) \right\| \leq \left\| \frac{\vec{\chi}_+^R(\omega) - \vec{\chi}_-^R(\omega)}{2} \right\| + \frac{S_n \xi(\omega)}{n}$$

ce qui entraîne $\|u_\omega^n(\mathbf{o})/n - \vec{\chi}_{\text{av}}^R\|_p \leq 3\epsilon$. En combinant avec $\|\vec{\chi}_{\text{av}}^R - \vec{\chi}_u\|_p \leq 2\epsilon$, nous obtenons $\|u_\omega^n(\mathbf{o})/n - \vec{\chi}_u\|_p \leq 5\epsilon$, pour tout $n \geq R$. Et cela montre bien que les $u_\omega^n(\mathbf{o})/n$ convergent en norme L^p vers le vecteur spectral. \square

Proposition 6.6. Soient $v : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^A$, $u : \Omega \times \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^B$ et $h : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ des fonctions uniformément topicales stochastiques telles que $h_\omega v_\omega = u_\omega h_{\tau\omega}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. On suppose en outre que $\int \|h_\omega(\mathbf{o})\| \mu < \infty$ et que v admet un vecteur spectral $\vec{\chi}_v$. Alors u admet un vecteur spectral, donné par $\vec{\chi}_u(\omega) = \hat{h}_\omega[\vec{\chi}_v(\omega)]$.

Démonstration. Un calcul simple donne $h_\omega v_\omega^n = u_\omega^n h_{\tau^n \omega}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $\omega \in \Omega$, et en particulier

$$h_\omega[v_\omega^n(\mathbf{o})] = u_\omega^n[h_{\tau^n \omega}(\mathbf{o})]. \quad (6.5)$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a $v_\omega^n(\mathbf{o}) = n\vec{\chi}_v(\omega) + o(n)$, et $h_{\tau^n \omega}(\mathbf{o}) = \mathbf{o} + o(n)$ d'après le lemme 6.2 appliqué à la fonction $f(\omega) = d[\mathbf{o}, h_\omega(\mathbf{o})]$. En substituant ces estimations dans (6.5), on obtient $u_\omega^n(\mathbf{o}) = n\hat{h}_\omega[\vec{\chi}_v(\omega)] + o(n)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$, ce qu'il fallait démontrer. \square

6.2 Produits stochastiques d'applications max-plus

Théorème 6.7. Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique. On suppose que les $u_\omega : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ sont toutes max-plus, et que $\int \|u_\omega(\mathbf{o})\| \mu < \infty$. Alors u admet un vecteur spectral stochastique.

Il faut noter que la condition d'intégrabilité apparaissant ici est un peu plus faible que celle requise dans le cas général; ce résultat est donc davantage qu'un cas particulier du théorème 6.1. Il est aussi intéressant parce que sa démonstration est très simple.

Démonstration. Soient $u_{ij}(\omega) \in [-\infty, +\infty[$ les éléments de matrice max-plus de la fonction u_ω (aucune ligne n'étant identiquement égale à $-\infty$), si bien que celle-ci s'écrit $u_\omega : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, avec $y_i = \max_{j \in S} (u_{ij}(\omega) + x_j)$ pour tous $i, j \in S$. La mesurabilité de u revient à dire que les fonctions $u_{ij} : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ sont mesurables. Posons $\zeta(\omega) = \|u_\omega(\mathbf{o})\| = \max_i \left| \max_j u_{ij}(\omega) \right|$.

Pour $\kappa > 0$ quelconque, soit $v : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ la fonction uniformément topicale stochastique définie par $v_\omega : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ avec

$$\exp \kappa y_i = \sum_{j \in S} \exp \kappa (u_{ij}(\omega) + x_j)$$

Notons que $u_\omega \leq v_\omega \leq \kappa^{-1} \log(N) + u_\omega$. Le point $v_\omega^n(\mathbf{o}) = \mathbf{x}^n(\omega) = (x_1^n(\omega), \dots, x_N^n(\omega))$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \exp \kappa x_1^n(\omega) \\ \vdots \\ \exp \kappa x_N^n(\omega) \end{pmatrix} = A(\omega) A(\tau\omega) \cdots A(\tau^{n-1}\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $A(\omega)$ est la matrice de coefficients $A_{ij}(\omega) = \exp \kappa u_{ij}(\omega)$. Et donc, pour tout $s \in S$, on a

$$\begin{aligned} \exp \kappa x_s^n(\omega) &= \langle \vec{\mathbf{e}}_s^*, A(\omega) A(\tau\omega) \cdots A(\tau^{n-1}\omega) \vec{\mathbf{u}} \rangle \\ &= \langle \vec{\mathbf{u}}^*, A^*(\tau^{n-1}\omega) \cdots A^*(\tau\omega) A^*(\omega) \vec{\mathbf{e}}_s \rangle \\ &= \mathcal{N}[A^*(\tau^{n-1}\omega) \cdots A^*(\tau\omega) A^*(\omega) \vec{\mathbf{e}}_s] \end{aligned}$$

pour la norme $\mathcal{N}(\vec{\mathbf{v}}) = \sum |v_i|$. D'autre part on a

$$\|A^*(\omega)\| = \max_{i,j \in S} |A_{ij}(\omega)| = \exp \kappa \max_{i,j \in S} u_{ij}(\omega) = \exp \kappa [\mathbf{o}, u_\omega(\mathbf{o})] \leq \exp \kappa \zeta(\omega)$$

donc $\log^+ \|A^*(\omega)\|$ est sommable, et cela entraîne, par le théorème d'Oseledets-Ragunathan [Ose, Rag], que la suite $x_s^n(\omega)/n$ admet une limite dans $[-\infty, +\infty[$ pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$. En fait, cette limite est p.p. finie, car $v_\omega \geq u_\omega$ et donc

$$\left[\mathbf{o}, \frac{v_\omega^n(\mathbf{o})}{n} \right] \geq \left[\mathbf{o}, \frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} \right] \geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{o}, u_{\tau^i \omega}(\mathbf{o})] \geq -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta(\tau^i \omega)$$

et cette dernière expression converge p.p. vers $\mathbb{E}(-\zeta \mid \mathcal{F}')$ qui est p.p. finie.

Ainsi v admet un vecteur spectral stochastique, quel que soit $\kappa > 0$. Lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, l'écart $D_1(u, v) \leq D_\infty(u, v) \leq \kappa^{-1} \log N$ tend vers zéro, et cela montre, par la proposition 6.3, que u admet un vecteur spectral stochastique. \square

6.3 Démonstration du théorème 6.1

6.3.1 Les normes \mathcal{N}_K

Rappelons qu'on appelle matrice *stochastique* une matrice à éléments positifs, dont la somme dans chaque ligne est égale à 1. Nous appellerons *co-stochastique* une matrice dont la transposée est stochastique.

Lemme 6.8. *Soit $K \geq 1$ et $A = (a_{ij})$ une matrice $N \times N$ co-stochastique vérifiant $a_{ii} \geq 1/K$ et $a_{ij} \leq K a_{ji}$ pour tous $i, j \in [1, N]$. Notons $\mathcal{P}_N(K)$ l'enveloppe convexe des $N!$ points dont les coordonnées valent $(1/Z, K/Z, \dots, K^{N-1}/Z)$ à permutation près, où $Z = 1 + K + \dots + K^{N-1}$. L'ensemble $\mathcal{P}_N(K)$ est stable par A , i.e. $A\mathbf{x} \in \mathcal{P}_N(K)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_N(K)$.*

Le permutaèdre $\mathcal{P}_N(K)$ est manifestement contenu, et relativement compact, dans le simplexe défini par $x_i > 0, \sum x_i = 1$. La figure 8 illustre cette situation, pour $N = 3$ et $K = 2$.

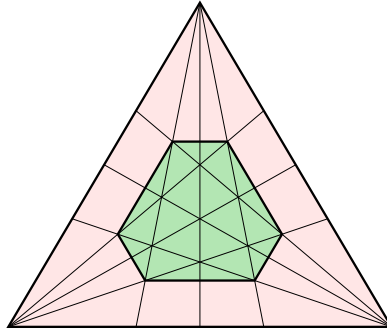


Figure 8: L'ensemble $\mathcal{P}_3(2)$ et le simplexe unité

Démonstration. Soit \mathbf{x} le point de coordonnées $x_i = K^{i-1}/Z$, pour $1 \leq i \leq N$. Vu les symétries du problème, il suffit de démontrer que le point $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ est dans $\mathcal{P}_N(K)$. Remarquons d'abord qu'on a

$$y_1 + \dots + y_N = x_1 + \dots + x_N \tag{6.6}$$

puisque A est co-stochastique. J'affirme par ailleurs que

$$y_1 + \dots + y_s \geq x_1 + \dots + x_s \tag{6.7}$$

pour tout $0 \leq s \leq N$. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq s} y_i &= \sum_{i \leq s} \sum_j a_{ij} x_j = \sum_j x_j \left(\sum_{i \leq s} a_{ij} \right) \\ &= \sum_{j \leq s} x_j \left(1 - \sum_{i > s} a_{ij} \right) + \sum_{j > s} x_j \left(\sum_{i \leq s} a_{ij} \right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq s} y_i - \sum_{i \leq s} x_i &= \sum_{i \leq s} \sum_{j > s} a_{ij} x_j - \sum_{j \leq s} \sum_{i > s} a_{ij} x_j \\ &= \sum_{i \leq s} \sum_{j > s} a_{ij} x_j - \sum_{i \leq s} \sum_{j > s} a_{ji} x_i \\ &= \sum_{i \leq s} \sum_{j > s} x_i (a_{ij} K^{j-i} - a_{ji}) \end{aligned}$$

cette dernière quantité étant manifestement positive puisque $a_{ij} \geq a_{ji}/K$; ceci démontre l'inégalité (6.7).

Soient maintenant $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq N$ une famille quelconque de s indices distincts, rangés par ordre croissant. La suite $i_k - k$ étant croissante, il existe un $t \in [0, s]$ tel que $i_k = k$ pour $k \leq t$ et $i_k \geq k + 1$ pour $k > t$. Remarquons qu'on a toujours $y_i \geq a_{ii} x_i \geq x_i/K$. Ceci, et l'inégalité (6.7), permettent d'écrire

$$\begin{aligned} y_{i_1} + \dots + y_{i_s} &= (y_1 + \dots + y_t) + (y_{i_{t+1}} + \dots + y_{i_s}) \\ &\geq (x_1 + \dots + x_t) + K^{-1}(x_{i_{t+1}} + \dots + x_{i_s}) \\ &\geq (x_1 + \dots + x_t) + K^{-1}(x_{(t+1)+1} + \dots + x_{s+1}) \\ &= (x_1 + \dots + x_t) + (x_{t+1} + \dots + x_s) \\ &= x_1 + \dots + x_s \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Hardy-Littlewood-Polya, ces inégalités, combinées avec (6.6), montrent que le point \mathbf{y} est bien dans $\mathcal{P}_N(K)$. \square

Soit $K \geq 1$ fixé, et $Z = 1 + K + \dots + K^{N-1}$. A tout vecteur \vec{v} , associons le nombre

$$\mathcal{N}_K(\vec{v}) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} Z^{-1} \sum_{i=1}^N K^{\sigma(i)-1} |v_i| \quad (6.8)$$

La fonction $\mathcal{N}_K : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est manifestement une norme sur \mathbb{R}^N ; le facteur Z^{-1} a été inséré afin que $\vec{\mathbf{u}} = (1, \dots, 1)$ soit de norme 1, mais ce n'est pas essentiel.

Par construction, cette norme est invariante par permutation des coordonnées. En supposant les coordonnées numérotées de sorte que $|v_1| \leq |v_2| \leq \dots \leq |v_N|$, on obtient la formule suivante pour la norme:

$$\mathcal{N}_K(\vec{v}) = \frac{|v_1| + K|v_2| + \dots + K^{N-1}|v_N|}{Z} \quad (6.9)$$

C'est de plus une norme d'espace de Riesz, i.e. $|\vec{v}| \leq |\vec{w}|$ entraîne $\mathcal{N}_K(\vec{v}) \leq \mathcal{N}_K(\vec{w})$. En particulier, \vec{v} et $|\vec{v}|$ ont même norme; voir [AB], §8.1.

Lemme 6.9. *Soit A une matrice stochastique telle que $a_{ii} \geq 1/K$ et $a_{ij} \leq K a_{ji}$ pour tous i, j . Alors A diminue la norme \mathcal{N}_K , i.e. $\mathcal{N}_K(A\vec{v}) \leq \mathcal{N}_K(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas $\vec{\nu} \geq 0$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$, soit $\ell(\sigma)$ la forme linéaire de coordonnées $\ell(\sigma)_i = K^{\sigma(i)-1}/Z$. On peut écrire

$$\mathcal{N}_K(\vec{\nu}) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \langle \ell(\sigma), \vec{\nu} \rangle = \sup_{\ell \in \mathcal{P}_N(K)} \langle \ell, \vec{\nu} \rangle$$

pour tout $\vec{\nu} \geq 0$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_K(A\vec{\nu}) &= \sup_{\ell \in \mathcal{P}_N(K)} \langle \ell, A\vec{\nu} \rangle = \sup_{\ell \in \mathcal{P}_N(K)} \langle A^*\ell, \vec{\nu} \rangle = \sup_{\ell \in A^*[\mathcal{P}_N(K)]} \langle \ell, \vec{\nu} \rangle \\ &\leq \sup_{\ell \in \mathcal{P}_N(K)} \langle \ell, \vec{\nu} \rangle = \mathcal{N}_K(\vec{\nu}) \end{aligned}$$

puisque $A^*[\mathcal{P}_N(K)] \subseteq \mathcal{P}_N(K)$ selon le lemme 6.8.

Si $\vec{\nu}$ n'est plus supposé positif, on procède comme suit. L'opérateur A étant positif, on a $|A\vec{\nu}| \leq A|\vec{\nu}|$, ce qui entraîne $\mathcal{N}_K(A\vec{\nu}) \leq \mathcal{N}_K(A|\vec{\nu}|)$ puisque \mathcal{N}_K est une norme d'espace de Riesz. En combinant avec $\mathcal{N}_K(A|\vec{\nu}|) \leq \mathcal{N}_K(|\vec{\nu}|) = \mathcal{N}_K(\vec{\nu})$, on obtient l'inégalité cherchée. \square

Lemme 6.10. *Soient $K_1, \dots, K_N \geq 1$ et $r_1, \dots, r_N \geq 0$, les K_i étant tous distincts. Le système d'équations $\mathcal{N}_{K_1}(\vec{\mathbf{x}}) = r_1, \dots, \mathcal{N}_{K_N}(\vec{\mathbf{x}}) = r_N$ admet un nombre fini de solutions, n'excédant pas $2^N N!$.*

Démonstration. Vu les symétries du problème, il suffit de rechercher les $\vec{\mathbf{x}}$ positifs et tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$; les autres solutions s'obtiendront en permutant les coordonnées ou en changeant les signes. Dans ces conditions, on a $\mathcal{N}_K(\vec{\mathbf{x}}) = Z^{-1}(x_1 + Kx_2 + \dots + K^{N-1}x_N)$. On doit donc résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & K_1 & K_1^2 & \dots & K_1^{N-1} \\ 1 & K_2 & K_2^2 & \dots & K_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & K_N & K_N^2 & \dots & K_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 r_1 \\ Z_2 r_2 \\ \vdots \\ Z_N r_N \end{pmatrix}$$

Son déterminant est un Vandermonde non nul, et le système ne peut donc avoir qu'une seule solution dans la région considérée. En permutant les coordonnées et en changeant les signes, on peut obtenir au plus $2^N N!$ solutions dans l'espace entier. \square

Lemme 6.11. *Soit $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de \mathbb{R}^N dont les différences $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ sont bornées. On suppose qu'il existe au moins N valeurs différentes de K pour lesquelles la suite $\mathcal{N}_K(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)/n$ converge. Alors la suite $(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)/n$ converge.*

Démonstration. Posons $\vec{\nu}_n = (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)/n$ pour $n \geq 1$. Cette suite est bornée, d'après les hypothèses; nous devons donc démontrer que l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence est un singleton.

La suite $\vec{\nu}_n$ vérifie en outre $\vec{\nu}_{n+1} - \vec{\nu}_n \rightarrow 0$ ce qui entraîne, par un résultat bien connu, que A est connexe.

Soient K_1, \dots, K_N des valeurs toutes différentes de K telles que les suites $\mathcal{N}_{K_i}(\vec{\nu}_n)$ convergent; notons r_1, \dots, r_N leurs limites. Pour tout $\vec{\mathbf{x}} \in A$, on doit avoir simultanément $\mathcal{N}_{K_i}(\vec{\mathbf{x}}) = r_i$ pour $i = 1, \dots, N$. En vertu du lemme précédent, A doit être fini. Comme il doit par ailleurs être connexe, c'est bien un singleton. \square

6.3.2 Le cas des \hat{u}_ω permutations

Une fonction topocale $f : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ est lipschitzienne et donc ses dérivées partielles $\partial f_i / \partial x_j$, au sens des distributions, sont des fonctions L^∞ ; en outre, f est presque partout différentiable, et sa dérivée au sens usuel coïncide avec sa dérivée au sens des distributions. On a les relations

$$0 \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 1, \quad \sum_{j \in S} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 1,$$

exprimant le fait que f est croissante et additivement homogène. Autrement dit, la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial x_j)_{ij}$ est p.p. une matrice stochastique.

Les fonctions topocales à portée finie vérifient des contraintes supplémentaires. Ainsi, si $\alpha : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme topocale de portée au plus L , on a

$$|\alpha(\mathbf{x}) - x_j| > L \implies \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = 0. \quad (6.10)$$

En effet, pour $\alpha(\mathbf{x}) = 0$ c'est une conséquence immédiate de la définition, et sinon, on se ramène à cette situation en translatant \mathbf{x} convenablement.

Soit $E : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ la fonction uniformément topocale donnée par

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{x}) &= x_i - \frac{1}{N} \sum_{j \in S} \frac{e^{x_i}}{e^{x_i} + e^{x_j}} \\ &= x_i - \frac{1}{N} \sum_{j \in S} (1 + e^{x_j - x_i})^{-1} \end{aligned}$$

Ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \begin{cases} N^{-1} \kappa_{ij}^{-2} & \text{si } i \neq j, \\ 1 - N^{-1} \sum_{s \neq i} \kappa_{is}^{-2} & \text{si } i = j, \end{cases}$$

où $\kappa_{ij} = 2 \operatorname{ch} \frac{x_i - x_j}{2} = \exp \frac{x_i - x_j}{2} + \exp \frac{x_j - x_i}{2}$. On note que la matrice jacobienne est symétrique, et que $\partial E_i / \partial x_i \geq 3/4$. D'autre part $\mathbf{x} - 1 \leq E(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$, d'où $\hat{E} = \operatorname{Id}$ et $d(E, \operatorname{Id}) \leq 1$.

Lemme 6.12. *Soit $f : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ topocale de portée au plus 1, dont l'asymptote est l'identité, et soit $0 < \lambda \leq 1$. La fonction (uniformément topocale) $g = \lambda E + (1 - \lambda)f$ est 1-lipschitz pour la distance associée à la norme \mathcal{N}_K dès que*

$$K \geq \frac{4N \operatorname{ch}^2 1}{\lambda}. \quad (6.11)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'en presque tout point \mathbf{x} , l'application linéaire tangente $Df_{\mathbf{x}}$ diminue la norme \mathcal{N}_K . Soit \mathbf{x} un point de différentiabilité de f (et donc de g), et posons

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + (1 - \lambda) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

les dérivées partielles étant évaluées en \mathbf{x} . Par le lemme 6.9, il suffit de vérifier les inégalités $a_{ii} \geq 1/K$ et $a_{ij} \leq K a_{ji}$, pour tous $i, j \in S$.

En premier lieu, on a $a_{ii} \geq \lambda (\partial E_i / \partial x_i) \geq 3\lambda/4$, qui est plus grand que $1/K$ pourvu que $K \geq 4/(3\lambda)$, une condition plus faible que (6.11).

Pour la deuxième inégalité, on distingue deux cas, selon la valeur de $|x_i - x_j|$. Si $|x_i - x_j| > 2$, alors $|f_i(\mathbf{x}) - x_j| \geq |x_i - x_j| - |f_i(\mathbf{x}) - x_i| > 1$ et donc $\partial f_i / \partial x_j = 0$ d'après (6.10). On a $\partial f_j / \partial x_i = 0$ pour la même raison, et comme par ailleurs $\partial E_i / \partial x_j = \partial E_j / \partial x_i$, il vient $a_{ij} = a_{ji}$ dans ce cas. Si au contraire $|x_i - x_j| \leq 2$, alors $a_{ij} \leq 1$ et

$$a_{ji} \geq \lambda \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \frac{\lambda}{N \kappa_{ij}^2} \geq \frac{\lambda}{4N \text{ch}^2 1}$$

ce qui donne bien $a_{ij} \leq K a_{ji}$ pourvu que K vérifie l'inégalité (6.11). \square

Fonctions topicales linéaires, permutations. A toute fonction $\varphi : B \rightarrow A$, on peut associer une fonction "induite" $\varphi^* : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ de la manière évidente; cette fonction est topicale à portée nulle, et linéaire (Gaubert et Gunawardena [GG2] appellent une telle fonction une "substitution"). Inversement, il n'est pas difficile de voir que toute fonction topicale linéaire à portée nulle s'obtient ainsi. Le passage de φ à φ^* est contravariant, i.e. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ et $(\text{Id})^* = \text{Id}$.

Si $A = B$ et φ est une permutation (i.e. une bijection), alors φ^* est un élément inversible de $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^A)$, qu'on appellera aussi "permutation" (des coordonnées) par abus de langage. On vérifie facilement que ce sont les seuls éléments inversibles de $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^A)$.

Proposition 6.13. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique. On suppose que les fonctions u_ω sont de portée au plus L , pour une constante $L \geq 0$ indépendante de ω , et que leurs asymptotes \hat{u}_ω sont des permutations. Alors u admet un vecteur spectral stochastique.*

Démonstration. On peut supposer $L = 1$ sans perte de généralité.

Soit $0 < \lambda \leq 1$, et considérons les fonctions uniformément topicales stochastiques $u', v, v' : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ définies par $u'_\omega = \hat{u}_\omega^{-1} u_\omega$ (ainsi $\hat{u}'_\omega = \text{Id}$), $v'_\omega = \lambda E + (1 - \lambda)u'_\omega$, et $v_\omega = \hat{u}_\omega v'_\omega = \lambda(\hat{u}_\omega E) + (1 - \lambda)u_\omega$. On a en particulier $\hat{u}_\omega = \hat{v}_\omega$ et $d(u_\omega, v_\omega) = d(u'_\omega, v'_\omega) = \lambda d(u'_\omega, E) \leq 2\lambda$.

On veut démontrer que la suite $\mathbf{x}^n(\omega)/n$, où $\mathbf{x}^n(\omega) = v_\omega^n(\mathbf{o})$, est convergente pour presque tout $\omega \in \Omega$. Notons d'abord que

$$d(\mathbf{x}^n(\omega), \mathbf{x}^{n+1}(\omega)) = d[v_\omega^n(\mathbf{o}), v_\omega^n(v_{\tau^n \omega}(\mathbf{o}))] \leq d(\mathbf{o}, v_{\tau^n \omega}(\mathbf{o})) \leq 1$$

et il nous suffit, d'après le lemme 6.11, de trouver N valeurs différentes de K pour lesquelles $h_n(\omega)/n$ converge, où $h_n(\omega) = \mathcal{N}_K(\mathbf{x}^n(\omega))$. Nous prendrons $K_1 = (4N \text{ch}^2 1)/\lambda$ et $K_t = tK_1$ pour $1 \leq t \leq N$. Pour chacune de ces valeurs de K , les fonctions v'_ω sont 1-lipschitz pour la norme \mathcal{N}_K , d'après le lemme 6.12, et il en est de même pour les fonctions v_ω , puisque les \hat{u}_ω sont isométriques. Ceci a pour conséquence que la suite de fonctions h_n est (ergodiquement) sous-additive: pour tous $n, p \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} h_{n+p}(\omega) &= \mathcal{N}_K(v_\omega^{n+p}(\mathbf{o})) = \mathcal{N}_K(v_\omega^n v_{\tau^n \omega}^p(\mathbf{o})) \\ &\leq \mathcal{N}_K(v_\omega^n(\mathbf{o})) + \mathcal{N}_K(v_\omega^n v_{\tau^n \omega}^p(\mathbf{o}) - v_\omega^n(\mathbf{o})) \\ &\leq \mathcal{N}_K(v_\omega^n(\mathbf{o})) + \mathcal{N}_K(v_{\tau^n \omega}^p(\mathbf{o}) - \mathbf{o}) \\ &= h_n(\omega) + h_p(\tau^n \omega) \end{aligned}$$

et donc $h_n(\omega)/n$ converge pour presque tout $\omega \in \Omega$, d'après le théorème de Kingman [Kin, Der]. Ainsi v admet un vecteur spectral stochastique. Mais $D_1(u, v) \leq 2\lambda$, avec λ arbitrairement petit, et cela implique, par la proposition 6.3, que u admet un vecteur spectral stochastique. \square

6.3.3 Le cas des \hat{u}_ω linéaires

On suppose dans la présente section que $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ est une fonction topocale stochastique dont les asymptotes \hat{u}_ω sont linéaires; on écrira $\hat{u}_\omega = \phi_\omega^*$, avec $\phi : \Omega \rightarrow S^S$ mesurable. On a alors $\hat{u}_\omega^n = [\phi_\omega^{(n)}]^*$, où

$$\phi_\omega^{(n)} = \phi_{\tau^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ \phi_{\tau\omega} \circ \phi_\omega$$

Notons $\text{Eqr}(S)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur S , ordonné par l'inclusion des graphes ($r \leq r'$ signifie que r est plus fine que r'), et Δ_S son plus petit élément, la relation d'égalité, dont le graphe se réduit à la diagonale de $S \times S$. Posons $R_\omega^0 = \Delta_S$ et $R_\omega^n = \phi_\omega^{-1} R_{\tau^{n-1}\omega}^{n-1}$, si bien que

$$R_\omega^n = \phi_\omega^{-1} \phi_{\tau\omega}^{-1} \cdots \phi_{\tau^{n-1}\omega}^{-1} \Delta_S = [\phi_\omega^{(n)}]^{-1} \Delta_S \quad (6.12)$$

autrement dit, $(i, j) \in R_\omega^n$ ssi $\phi_\omega^{(n)}(i) = \phi_\omega^{(n)}(j)$. On voit que $R_\omega^n \geq R_\omega^{n-1}$, parce que $\phi_{\tau^{n-1}\omega}^{-1} \Delta_S \geq \Delta_S$. On a donc, pour tout ω , une suite croissante $\Delta_S = R_\omega^0 \leq R_\omega^1 \leq R_\omega^2 \leq \cdots$ et donc stationnaire, de relations d'équivalence sur S ; soit $R_\omega = \lim_n R_\omega^n = \sup_n R_\omega^n$ sa limite. Il est évident que $R_\omega = \phi_\omega^{-1} R_{\tau\omega}$.

Proposition 6.14. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topocale stochastique. On suppose que les u_ω sont de portée au plus L , pour une constante $L \geq 0$ indépendante de ω , et que leurs asymptotes \hat{u}_ω sont linéaires. On suppose que la fonction $\omega \mapsto R_\omega$ est constante, et que sa valeur R est une relation d'équivalence dont toutes les classes ont même cardinal. Alors u admet un vecteur spectral stochastique.*

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$, notons $s_R(\mathbf{x}) = \max_{iRj} |x_i - x_j|$, et soit $P_R(K)$ l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ vérifiant $s_R(\mathbf{x}) \leq K$.

Nous allons dans un premier temps démontrer la proposition sous l'hypothèse additionnelle qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que $u_\omega^n(\mathbf{o}) \in P_R(K)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$.

Le fait que toutes les classes de R aient même cardinal permet d'écrire $S = C \times H$, où $C = S/R$ est l'ensemble des classes, H est équipotent à chacune des classes, et la relation R est donnée par $iRj \iff p(i) = p(j)$, où $p : S \rightarrow C$ est la projection naturelle.

L'hypothèse $\phi_\omega^{-1} R = R$ montre que les fonctions $\phi_\omega : S \rightarrow S$ passent au quotient (par p) en des bijections $\kappa_\omega : C \rightarrow C$. Les fonctions $\psi_\omega : S \rightarrow S$ définies par $\psi_\omega = \kappa_\omega \times \text{Id}_H$ sont des bijections de S , vérifiant $\psi_\omega(s) R \phi_\omega(s)$ pour tous $s \in S$, $\omega \in \Omega$. Posons alors

$$v_\omega = \text{med}(\psi_\omega^* - (K + L), u_\omega, \psi_\omega^* + (K + L))$$

Comme $d(u_\omega, \phi_\omega^*) \leq L$ et $d(\phi_\omega^* \mathbf{x}, \psi_\omega^* \mathbf{x}) \leq s_R(\mathbf{x})$, on voit que $v_\omega(\mathbf{x}) = u_\omega(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in P_R(K)$. Par récurrence sur n , on en déduit $v_\omega^n(\mathbf{o}) = u_\omega^n(\mathbf{o})$. Or v vérifie les conditions de la proposition 6.13 (car $\hat{v}_\omega = \psi_\omega^*$) et admet donc un vecteur spectral stochastique, qui sera aussi un vecteur spectral stochastique pour u .

Traitons maintenant le cas général, sans supposer les $s_R(u_\omega^n \mathbf{o})$ bornés. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. On peut trouver un entier $N \geq 0$ tel que $\mu\{\omega : R_\omega^N \neq R\} \leq \epsilon$. Posons alors

$$v_\omega = \begin{cases} u_\omega & \text{si } R_\omega^N = R, \\ \rho \circ u_\omega & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\rho : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ est la fonction topocale de portée L définie par

$$\rho_i(\mathbf{x}) = (x_i - L) \vee (L + \min_{jRi} x_j)$$

Notons que $\hat{\rho} = \text{Id}$ et $s_R(\rho\mathbf{x}) = (s_R(\mathbf{x}) - 2L)^+ \leq s_R(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ quelconque; on a d'autre part $s_R(\phi_\omega^*\mathbf{x}) \leq s_R(\mathbf{x})$, car $\phi_\omega^{-1}R = R$, ce qui entraîne $s_R(u_\omega\mathbf{x}) \leq s_R(\mathbf{x}) + 2L$ car $d(u_\omega, \phi_\omega^*) \leq L$. Nous affirmons qu'on a

$$v_\omega^n(\mathbf{o}) \in P_R(4NL) \quad (6.13)$$

pour tous $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Cette propriété est évidente pour $n \leq 2N$, car $s_R(v_\omega\mathbf{x}) \leq s_R(u_\omega\mathbf{x}) \leq s_R(\mathbf{x}) + 2L$ pour tout \mathbf{x} , d'où l'on déduit $s_R(v_\omega^n\mathbf{o}) \leq 2nL \leq 4NL$.

Soit maintenant $n > 2N$ fixé; on veut démontrer (6.13) pour tout ω , en supposant la propriété vraie pour $n - 1$. Distinguons deux cas. Si $R_\omega^N \neq R$, alors $v_\omega = \rho u_\omega$ et $v_\omega^n(\mathbf{o}) = \rho u_\omega(\mathbf{y})$ où $\mathbf{y} = v_\omega^{n-1}(\mathbf{o})$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $s_R(\mathbf{y}) \leq 4NL$, d'où $s_R(u_\omega\mathbf{y}) \leq 2L + s_R(\mathbf{y}) \leq (4N + 2)L$ et $s_R(v_\omega^n\mathbf{o}) = (s_R(u_\omega\mathbf{y}) - 2L)^+ \leq 4NL$. Si au contraire $R_\omega^N = R$, alors on écrit $v_\omega^n(\mathbf{o}) = v_\omega^N(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} = v_{\tau^N\omega}^{n-N}(\mathbf{o})$. Comme les v_ω sont de portée au plus $2L$, on a $d(v_\omega^N, \hat{v}_\omega^N) \leq 2NL$. Mais $s_R(\hat{v}_\omega^N\mathbf{y}) = s_R([\phi_\omega^{(N)}]^*\mathbf{y}) = 0$ car $[\phi_\omega^{(N)}]^{-1}\Delta_S = R$, et donc $s_R(v_\omega^N\mathbf{y}) \leq 4NL$.

Ainsi v , qui a les mêmes asymptotes que u , vérifie en outre la condition (6.13), et admet donc un vecteur spectral stochastique, d'après la première partie de cette démonstration. D'autre part $D_1(u, v) \leq \epsilon L$, avec ϵ arbitrairement petit, ce qui prouve, par la proposition 6.3, que u admet un vecteur spectral stochastique. \square

Proposition 6.15. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topicale stochastique. On suppose que les u_ω sont de portée au plus L , pour une constante $L \geq 0$ indépendante de ω , et que leurs asymptotes \hat{u}_ω sont linéaires. Alors u admet un vecteur spectral stochastique.*

Démonstration. Soit $r(\omega)$ le nombre de classes de R_ω . Il ressort de la formule $R_\omega = \phi_\omega^{-1}R_{\tau\omega}$ qu'on a $r(\tau\omega) \geq r(\omega)$ partout, ce qui entraîne $r(\tau\omega) = r(\omega)$ presque partout, par un argument standard. Quitte à découper notre espace Ω en un nombre fini de morceaux totalement invariants par τ , à un ensemble négligeable près, on peut supposer que la fonction r est constante.

Dans ce cas, la fonction R_ω prend ses valeurs dans $\text{Eqr}(r, S)$, l'ensemble des relations d'équivalence ayant r classes. Posons alors $S' = C \times H$, avec $\sharp C = r$ et $\sharp H = N - r + 1$; soit $p' : S' \rightarrow C$ la projection naturelle et R' la relation d'équivalence sur S' définie par $iR'j \iff p'(i) = p'(j)$.

Pour tout $R \in \text{Eqr}(r, S)$, on peut trouver deux fonctions $S \xrightarrow{j} S' \xrightarrow{p} S$ telles que $pj = \text{Id}_S$ et $p^{-1}R = R'$. Ceci nous permet de construire deux fonctions mesurables $j : \Omega \rightarrow (S')^S$ et $p : \Omega \rightarrow S^{S'}$ vérifiant $p_\omega j_\omega = \text{Id}_S$ et $p_\omega^{-1}R_\omega = R'$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Soit $v : \Omega \times \mathbb{R}^{S'} \rightarrow \mathbb{R}^{S'}$ la fonction uniformément topicale stochastique définie par $v_\omega = p_\omega^* u_\omega j_{\tau\omega}^*$. Si $\hat{u}_\omega = \phi_\omega^*$, alors $\hat{v}_\omega = \psi_\omega^*$, où $\psi_\omega = j_{\tau\omega} \phi_\omega p_\omega$, et un calcul facile donne $\psi_\omega^{(n)} = j_{\tau^n\omega} \phi_\omega^{(n)} p_\omega$. Les relations $R_\omega'^n = (\psi_\omega^{(n)})^{-1} \Delta_{S'}$ sont données par

$$\begin{aligned} (\psi_\omega^{(n)})^{-1} \Delta_{S'} &= p_\omega^{-1} (\phi_\omega^{(n)})^{-1} j_{\tau^n\omega}^{-1} \Delta_{S'} \\ &= p_\omega^{-1} (\phi_\omega^{(n)})^{-1} \Delta_S \quad (\text{injectivité de } j_{\tau^n\omega}) \\ &= p_\omega^{-1} R_\omega^n \end{aligned}$$

d'où $R_\omega' = p_\omega^{-1} R_\omega = R'$. Ainsi v vérifie les hypothèses de la proposition 6.14, et admet donc un vecteur spectral stochastique. Finalement, la relation de semi-conjugaison $j_\omega^* v_\omega = u_\omega j_{\tau\omega}^*$ entraîne, par la proposition 6.6, que u admet également un vecteur spectral stochastique. \square

6.3.4 Le cas général — fin de la démonstration

Notons $\mathfrak{D}(S) = \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R})$. Il existe une injection canonique $I_S : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(S)}$, définie par $\mathbf{x} \mapsto [\alpha \mapsto \alpha\mathbf{x}]$; en fait, I_S établit une bijection entre les points de \mathbb{R}^S et les morphismes de

treillis $\mathfrak{D}(S) \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction I_S est topocale à portée nulle, et non linéaire dès que $\sharp S \geq 2$. Tout $f \in \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ induit une fonction $f^* : \mathfrak{D}(B) \rightarrow \mathfrak{D}(A)$, définie par $f^*\beta = \beta \circ f$, qui elle-même induit une fonction linéaire topocale $(f^*)^* = \mathfrak{D}f : \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(A)} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(B)}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^A & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^B \\ I_A \downarrow & & I_B \downarrow \\ \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(A)} & \xrightarrow{\mathfrak{D}f} & \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(B)} \end{array}$$

L'élément de matrice de $\mathfrak{D}f$ situé en ligne $\beta \in \mathfrak{D}(B)$ et en colonne $\alpha \in \mathfrak{D}(A)$ vaut 1 si $\alpha = \beta f$, et 0 dans le cas contraire.

D'autre part, l'injection canonique $\gamma : S \rightarrow \mathfrak{D}(S)$, qui à chaque $s \in S$ associe la forme coordonnée γ_s , induit une fonction (topocale, linéaire, à portée nulle) $\gamma^* : \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(S)} \rightarrow \mathbb{R}^S$ qui est une rétraction de I_S , i.e. $\gamma^* \circ I_S = \text{Id}_{\mathbb{R}^S}$.

Proposition 6.16. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ uniformément topocale stochastique. Si les u_ω sont de portée au plus L , pour une constante $L \geq 0$ indépendante de ω , alors u admet un vecteur spectral stochastique.*

Démonstration. Soit $v : \Omega \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(S)} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}(S)}$ la fonction uniformément topocale stochastique définie par

$$v_\omega = \text{med}(\mathfrak{D}\hat{u}_\omega - L, I_S u_\omega \gamma^*, \mathfrak{D}\hat{u}_\omega + L)$$

Les v_ω sont de portée au plus L , avec $\hat{v}_\omega = \mathfrak{D}\hat{u}_\omega$. En particulier, v admet un vecteur spectral stochastique, d'après la proposition 6.15. D'autre part,

$$\begin{aligned} v_\omega I_S &= \text{med}[(\mathfrak{D}\hat{u}_\omega)I_S - L, (I_S u_\omega)(\gamma^* I_S), (\mathfrak{D}\hat{u}_\omega)I_S + L] \\ &= \text{med}[I_S \hat{u}_\omega - L, I_S u_\omega, I_S \hat{u}_\omega + L] \\ &= I_S u_\omega \end{aligned}$$

puisque $\hat{u}_\omega - L \leq u_\omega \leq \hat{u}_\omega + L$. On en déduit $v_\omega^n I_S = I_S u_\omega^n$ et en particulier $v_\omega^n(\mathbf{o}) = I_S[u_\omega^n(\mathbf{o})]$, d'où

$$\frac{u_\omega^n(\mathbf{o})}{n} = \gamma^* \left[\frac{v_\omega^n(\mathbf{o})}{n} \right] \longrightarrow \gamma^*[\vec{\chi}_v(\omega)]$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, pour presque tout $\omega \in \Omega$. □

Proposition 6.17. *Soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ uniformément topocale stochastique, et $1 \leq p < \infty$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) $D_p(u, \hat{u}) < \infty$;
- (ii) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $L \geq 0$ et $v : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ uniformément topocale stochastique, où les v_ω sont de portée au plus L , et $D_p(u, v) \leq \epsilon$.*

Démonstration. (ii) \implies (i): si $D_p(u, v) < \infty$, alors $\hat{u}_\omega = \hat{v}_\omega$ pour presque tout ω , et donc $D_p(u, \hat{u}) = D_p(u, \hat{v}) \leq D_p(u, v) + D_p(v, \hat{v}) \leq \epsilon + L$.

(i) \implies (ii): supposons $D_p(u, \hat{u}) < \infty$, et soit $\epsilon > 0$. Soit g_0, g_1, g_2, \dots une suite de fonctions $\mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ topocales à portée finie, dense dans $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$. Pour tout $f \in \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, notons $\kappa(f)$ le plus petit entier k tel que $d(f, g_k) \leq \epsilon/2$.

Soient $v, v^0, v^1, v^2, \dots : \Omega \times \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^B$ les fonctions uniformément topocales stochastiques définies comme suit: $v_\omega = g_{\kappa(u_\omega)}$, si bien que $D_p(u, v) \leq \epsilon/2$ et donc $D_p(v, \hat{v}) < \infty$, et

$$v_\omega^n = \begin{cases} g_{\kappa(u_\omega)} & \text{si } \kappa(u_\omega) < n, \\ \hat{u}_\omega & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. La suite de fonctions $h_n : \omega \mapsto d(v_\omega^n, v_\omega)^p$ est décroissante et tend simplement vers zéro, et comme h_0 est sommable, on a $D_p(v^n, v)^p = \mathbb{E}(h_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ par le théorème de convergence dominée. On choisit n tel que $D_p(v^n, v) \leq \epsilon/2$, si bien que $D_p(v^n, u) \leq \epsilon$, et les v_ω^n sont à portée bornée. \square

En combinant les propositions 6.16 et 6.17 via la proposition 6.3, on obtient finalement le théorème 6.1.

6.4 Un théorème ergodique inverse

Théorème 6.18. *On reprend les hypothèses et notations du théorème 6.1. On suppose en outre que τ admet un inverse mesurable $\theta = \tau^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$. Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a*

$$u_{\theta^{n-1}\omega} u_{\theta^{n-2}\omega} \cdots u_{\theta\omega} u_\omega(\mathbf{o}) = n \vec{\chi}(\theta^{n-1}\omega) + o(n) \quad (6.14)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarques. Si $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ n'est pas inversible, le passage à l'extension naturelle donnera un $\tau' : \Omega' \rightarrow \Omega'$ inversible, sur un espace probabilisé différent.

Le théorème 6.18 prend une forme un peu plus simple si on sait que $\vec{\chi} \circ \tau = \vec{\chi}$; le second membre de (6.14) se réduit alors à $n \vec{\chi}(\omega) + o(n)$. C'est notamment le cas pour les dynamiques "augmentantes", c'est-à-dire quand on a $u_\omega(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$ pour tous ω et \mathbf{x} . En effet, on a dans ce cas $\vec{\chi}(\tau\omega) \leq \hat{u}_\omega \vec{\chi}(\tau\omega) = \vec{\chi}(\omega)$, d'où l'on déduit $\vec{\chi} \circ \tau = \vec{\chi}$ par un argument standard.

Démonstration. Posons $\mathbf{x}_\omega^n = u_{\theta^{n-1}\omega}^n(\mathbf{o})$. On doit démontrer que la fonction

$$G(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\mathbf{x}_\omega^n}{n} - \vec{\chi}(\theta^{n-1}\omega) \right\|$$

est presque partout nulle. Posons $\eta(\omega) = d(u_\omega, \hat{u}_\omega)$ et $\eta'(\omega) = \mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{T}')$. L'inégalité $\|u_\omega^n(\mathbf{o})\| \leq S_n \eta(\omega)$ entraîne $\|\vec{\chi}(\omega)\| \leq \eta'(\omega)$ presque partout.

Soit $0 < \epsilon < 1$ arbitraire. D'après le théorème d'Egorov, il existe $F_1 \subseteq \Omega$ mesurable avec $\mu(F_1) \leq \epsilon^2$ et tel que la convergence de $u_\omega^n(\mathbf{o})/n$ vers $\vec{\chi}$ soit uniforme sur $\Omega - F_1$. Soit donc $n_0 > 0$ tel que

$$d[u_\omega^s(\mathbf{o}), s\vec{\chi}(\omega)] \leq \epsilon s$$

pour tous $s \geq n_0$ et $\omega \notin F_1$.

Soit h la fonction caractéristique de F_1 , et $h' = \mathbb{E}(h \mid \mathcal{T}')$. L'ensemble $F_2 = \{\omega : h'(\omega) \geq \epsilon\}$ vérifie $\mu(F_2) \leq \epsilon$, car $\epsilon^2 \geq \mu(F_1) = \mathbb{E}(h) = \mathbb{E}(h') \geq \epsilon \mu(F_2)$.

Posons $v_\omega(\mathbf{x}) = \hat{u}_\omega(\mathbf{x}) + \vec{\chi}(\omega)$, ainsi $d(u_\omega, v_\omega) \leq (\eta + \eta')(\omega)$. D'autre part, un calcul simple donne $v_\omega[s\vec{\chi}(\tau\omega)] = (s+1)\vec{\chi}(\omega)$ et par suite $v_\omega^k[s\vec{\chi}(\tau^k\omega)] = (s+k)\vec{\chi}(\omega)$ pour tous $s, k \geq 0$.

Maintenant, pour tous $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq s \leq n$ quelconque,

$$\begin{aligned} d[\mathbf{x}_\omega^n, n\vec{\chi}(\theta^{n-1}\omega)] &= d[u_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}(\mathbf{x}_\omega^s), v_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}(s\vec{\chi}(\theta^{s-1}\omega))] \\ &\leq d[u_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}(\mathbf{x}_\omega^s), u_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}(s\vec{\chi}(\theta^{s-1}\omega))] + d(u_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}, v_{\theta^{n-1}\omega}^{n-s}) \\ &\leq d[\mathbf{x}_\omega^s, s\vec{\chi}(\theta^{s-1}\omega)] + \sum_{k=s}^{n-1} (\eta + \eta')(\theta^k\omega) \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\omega \notin F_2$. On a presque sûrement $h(\omega) + \dots + h(\theta^{n-1}\omega) = nh'(\omega) + o(n)$ et donc $h(\omega) + \dots + h(\theta^{n-1}\omega) \leq \epsilon n$ pour tout n assez grand, puisque $h'(\omega) < \epsilon$. Dans ce cas, il existe s vérifiant $(1 - \epsilon)n \leq s \leq n$ et $\theta^{s-1}\omega \notin F_1$, si bien que

$$\begin{aligned} d[\mathbf{x}_\omega^n, n\bar{\chi}(\theta^{n-1}\omega)] &\leq \epsilon n + \sum_{k=\lceil(1-\epsilon)n\rceil}^{n-1} (\eta + \eta')(\theta^k\omega) \\ &= \epsilon n [1 + 2\eta'(\omega)] + o(n) \end{aligned}$$

pour n grand. Ainsi $G(\omega) \leq \epsilon [1 + 2\eta'(\omega)]$ pour presque tout $\omega \notin F_2$. Par conséquent

$$\mu\left\{\omega : G(\omega) > \epsilon [1 + 2\eta'(\omega)]\right\} \leq \epsilon$$

et ce avec ϵ arbitrairement petit, donc $G = 0$ p.p. \square

En comparant avec le théorème 6.7, on pourrait être tenté de croire que si les fonctions u_ω sont max-plus, la convergence p.p. (6.14) reste vraie sous la condition d'intégrabilité plus faible $\int \|u_\omega(\mathbf{o})\| \mu < \infty$. Il n'en est rien, et nous invitons le lecteur à chercher lui-même des contre-exemples.

Références

- [AB] C. D. ALIPRANTIS & K. C. BORDER, *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*, deuxième édition, Springer (1999)
- [Ba] F. BACCELLI, G. COHEN, G. J. OLSDER & J. P. QUADRAT, *Synchronization and linearity*, Wiley (1992)
- [BK] T. BEWLEY & E. KOHLBERG, *The asymptotic theory of stochastic games*, Math. Oper. Res. **1** (1976), pp. 197–208
- [Bir] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, troisième édition, AMS (1967)
- [Bou] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, livre III: Topologie générale*, quatrième édition, Hermann (1965)
- [BM] T. BOUSCH & J. MAIRESSE, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), pp. 77–111
- [BS] A. D. BURBANKS & C. T. SPARROW, *All monotone homogeneous functions (on the positive cone) admit continuous extension*, préprint 1999-13, Statistical Laboratory, Université de Cambridge (1999)
- [CT] M. CRANDALL & L. TARTAR, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), pp. 385–390
- [Ded] R. DEDEKIND, *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*, Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte (1897), pp. 1–40
- [Der] Y. DERIENNIC, *Sur le théorème ergodique sous-additif*, CRAS Paris A **281** (1975), pp. 985–988
- [GG] P. GAIHA & S. K. GUPTA, *Adjacent vertices on a permutohedron*, Siam J. Appl. Math. **32** (1977), pp. 323–327

- [GG1] S. GAUBERT & J. GUNAWARDENA, *A nonlinear hierarchy for discrete event dynamical systems*, paru dans A. GIUA, R. SMEDINGA & M. SPATHOPOULOS (dir.), *Proceedings of WODES 98*, IEE (1998)
- [GG2] S. GAUBERT & J. GUNAWARDENA, *The duality theorem for min-max functions*, CRAS Paris A **326** (1998), pp. 43–48
- [GY] P. GLASSERMAN & D. D. YAO, *Monotone structure in discrete-event systems*, Wiley (1994)
- [Gu1] J. GUNAWARDENA (dir.), *Idempotency*, Cambridge University Press (1998)
- [Gu2] J. GUNAWARDENA, *Cycle times and fixed points of min-max functions*, paru dans G. COHEN & J.-P. QUADRAT (dir.), *11th international conference on analysis and optimization of systems*, LNCIS **199**, Springer (1994), pp. 266–272
- [Gu3] J. GUNAWARDENA, *A dynamic approach to timed behaviour*, paru dans B. JONSSON & J. PARROW (dir.), *CONCUR'94: Concurrency theory*, LNCS **836**, Springer (1994), pp. 178–193
- [GK] J. GUNAWARDENA & M. KEANE, *On the existence of cycle times for some non-expansive maps*, préprint HPL-BRIMS-95-003, Hewlett-Packard (1995)
- [Joh] P. T. JOHNSTONE, *Stone spaces*, Cambridge University Press (1982)
- [Kin] J. F. C. KINGMAN, *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*, J. Roy. Statist. Soc. B **30** (1968), pp. 499–510
- [Koh] E. KOHLBERG, *Invariant half-lines of nonexpansive piecewise-linear transformations*, Math. Oper. Res. **5** (1980), pp. 366–372
- [Mcl] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, deuxième édition, Springer (1997)
- [Mir] L. MIRSKY, *Results and problems in the theory of doubly-stochastic matrices*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **1** (1963), pp. 319–334
- [Ose] V. I. OSELEDETS, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trudy Moskov. Math. Obsc. **19** (1968), pp. 179–210, traduction anglaise dans Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), pp. 197–231
- [Par] W. PARRY, *Topics in ergodic theory*, Cambridge University Press (1981)
- [Rag] M. S. RAGHUNATHAN, *A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem*, Isr. J. Math. **32** (1979), pp. 356–362
- [Sch] P. H. SCHOUTE, *Analytical treatment of the polytopes regularly derived from regular polytopes*, Johannes Müller, Amsterdam (1911)
- [ST] U. SCHWIEGELSHOHN & L. THIELE, *Dynamic min-max problems*, Discrete Event Dynamic Systems **9** (1999), pp. 111–134
- [Sko] T. SKOLEM, *Om konstitutionen av den identiske kalkuls grupper*, Proc. Third Scand. Math. Congr., Almqvist & Wiskell, Uppsala (1913), pp. 149–163
- [Zie] G. M. ZIEGLER, *Lectures on polytopes*, Graduate texts in Math. **152**, Springer (1995)
- [ZP] U. ZWICK & M. PATERSON, *The complexity of mean payoff games on graphs*, Theoret. Comp. Sci. **158** (1996), pp. 343–359