

# Chapitre 1

## **DYNAMIQUE NON DETERMINISTE**



# PREMIER CHAPITRE : DYNAMIQUE NON DETERMINISTE

Il s'agit, dans ce chapitre, d'étudier la dynamique simultanée de plusieurs fonctions ou, ce qui revient presque au même, la dynamique d'une fonction multivoque. L'itération d'une seule fonction étant déjà assez compliquée, on voit qu'il va falloir ajouter des hypothèses de convergence. Ces hypothèses seront différentes selon qu'on suppose que l'espace est complet ou compact.

## I. DEFINITIONS

### 1) Systèmes itérés de fonctions

Un système itéré de fonctions (en anglais IFS, *iterated function system*), est la donnée d'un espace métrique  $(E, d)$  et d'une famille  $(f_i)_{i \in I}$  d'applications continues de  $E$  dans lui-même. Dans toute la suite, on supposera que  $I$  est métrique compact (en général, il sera même fini) et que l'application

$$\begin{aligned} f. : \quad I \times E &\longrightarrow E \\ (i, x) &\longmapsto f_i(x) \end{aligned}$$

est continue.

On peut rajouter différentes hypothèses de convergence selon que  $E$  est complet ou compact.

**Définition.** On dira que l'IFS  $(E, (f_i)_{i \in I})$  est hyperbolique<sup>1</sup> si  $(E, d)$  est complet et si les applications  $f_i$  sont toutes  $k$ -lipschitziennes pour une même constante  $k < 1$ .

Ceci est une généralisation naturelle de la définition de Barnsley et Demko (voir [Ba,De]). On dira que  $(E, f_i)$  est un HIFS (*hyperbolic iterated function system*).

**Définition.** On dira que l'IFS  $(E, f_i)$  est convergent si  $(E, d)$  est compact et si les  $f_i$  diminuent strictement les distances, i.e.

$$\forall i \in I \quad \forall x, y \in E \quad x \neq y \implies d[f_i(x), f_i(y)] < d[x, y].$$

On parlera ici de CIFS (*convergent IFS*).

**Définition.** L'IFS  $(E, f_i)$  sera dit asymptotiquement convergent (ACIFS) si  $(E, d)$  est compact, et si pour toute suite  $(i_k)_{k \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ , l'intersection décroissante

$$\bigcap_{n \geq 0} (f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_{n-1}})(E)$$

est réduite à un point.

Contrairement à la définition précédente, le fait d'être un ACIFS ne dépend pas de la distance dont est muni  $E$ .

En fait, ces deux notions sont plus ou moins équivalentes. Plus précisément :

---

<sup>1</sup> Il s'agit de la terminologie utilisée par Barnsley ; Douady propose "fortement contractant".

**Proposition.** *Tout CIFS est un ACIFS, et inversement tout ACIFS est un CIFS pour une certaine distance de  $E$  compatible avec sa topologie.*

*Preuve.* Soit  $(E, f_i)$  un CIFS, et soit

$$a_n = \sup_{i_0, \dots, i_{n-1} \in I} \text{Diam}(f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E).$$

Pour montrer que  $(E, f_i)$  est un ACIFS, il suffit de prouver que  $a_n \rightarrow 0$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$  ; l'ensemble

$$F = \{(i, x, y) \in I \times E^2 : d(x, y) \geq \varepsilon\}$$

est un compact sur lequel est définie et continue la fonction

$$u(i, x, y) = \frac{d[f_i(x), f_i(y)]}{d[x, y]}$$

qui ne prend que des valeurs inférieures à 1. Désignant par  $k$  son maximum, on voit que

$$\forall x, y \in E \quad \forall i \in I \quad d[f_i(x), f_i(y)] \leq \max[\varepsilon, k d(x, y)]$$

avec  $k < 1$ . Par conséquent,  $a_n \leq \max(\varepsilon, k^n \text{Diam}(E))$ , et donc  $a_n \leq \varepsilon$  pour  $n$  assez grand. Ce qui montre que  $a_n \rightarrow 0$ .

Réciproquement, soit  $(E, f_i)$  un ACIFS. On veut construire une distance  $d_1$  qui soit diminuée strictement par toutes les  $f_i$ .

**Lemme.** *Soit  $(a_n)$  la suite définie plus haut. Alors  $a_n \rightarrow 0$ .*

*Preuve du lemme.* Notons d'abord que la suite  $a_n$  est décroissante. Supposons qu'elle ne tende pas vers 0, et soit  $\ell > 0$  sa limite. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble

$$K_n = \{(i_0, i_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}} : \text{Diam}(f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E) \geq \ell\}$$

est un compact non vide de  $I^{\mathbb{N}}$ . Par ailleurs

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

donc l'intersection  $K = \bigcap K_n$  est non vide. Si  $(i_0, i_1, \dots) \in K$ , alors  $\bigcap (f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E)$  n'est pas réduit à un point, ce qui contredit l'hypothèse que l'IFS est asymptotiquement convergent.

Le lemme est prouvé. Donc  $a_n \rightarrow 0$ . Par conséquent, on peut trouver une suite réelle  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (a)  $\theta_0 = 1$ ,
- (b)  $(\theta_n)$  est strictement croissante,
- (c)  $\theta_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,
- (d)  $\theta_n a_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Il suffit alors de prendre

$$d_1(x, y) = \max_{n \in \mathbb{N}} \max_{i_0, \dots, i_{n-1} \in I} \theta_n d \left[ (f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(x), (f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(y) \right].$$

Muni de la distance  $d_1$ ,  $(E, f_i)$  est un CIFS. Ceci achève la preuve de la proposition.

Etudier la dynamique d'un IFS  $(E, f_i)$  signifie la chose suivante : partant d'un point  $x \in E$ , on choisit une fonction  $f_i$ , et on obtient  $f_i(x) \in E$ . Selon le  $i$  choisi, on obtiendra des valeurs différentes. Si maintenant je considère seulement l'ensemble des valeurs possibles, c'est-à-dire l'ensemble  $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ , je perds de l'information par rapport au  $I$ -uplet  $(f_i(x))_{i \in I}$ , car je ne sais plus à quelle fonction correspond une image donnée de  $x$ . Ceci nous amène à la notion de *pinceau*.

## 2) Pinceaux

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $\text{Com } E$  l'ensemble des compacts non vides de  $E$ , muni de la distance de Hausdorff : pour  $K, L \in \text{Com } E$ , on pose  $d_H(K, L) = \max(\partial(K, L), \partial(L, K))$ , où

$$\partial(K, L) = \max_{k \in K} d(k, L).$$

Si  $E$  est complet (resp. compact), alors  $\text{Com } E$  aussi.

On appellera *pinceau* sur  $E$  une application continue  $p : E \rightarrow \text{Com } E$ . Si on considère  $E$  comme une partie de  $\text{Com } E$ , alors on voit que  $p$  se prolonge de manière unique en une application continue de  $\text{Com } E$  dans lui-même (que nous noterons encore  $p$ ) vérifiant  $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ . On a  $p(K) = \bigcup_{x \in K} p(x)$ .

**Définition.** On dira qu'un pinceau  $(E, p)$  est hyperbolique si  $(E, d)$  est complet et si  $p : E \rightarrow \text{Com } E$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ .

Enoncé équivalent :  $E$  est complet, et  $p : \text{Com } E \rightarrow \text{Com } E$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ .

**Définition.** Le pinceau  $(E, p)$  sera dit convergent si  $E$  est compact et si  $p : E \rightarrow \text{Com } E$  diminue strictement les distances (ou, ce qui revient au même,  $p : \text{Com } E \rightarrow \text{Com } E$  diminue strictement les distances).

Heuristiquement, on peut donc considérer un pinceau comme une fonction prenant plusieurs valeurs — éventuellement une infinité — chacune de ces valeurs se déplaçant moins vite que la variable. Dans le cas où  $E$  est un intervalle, on peut dessiner le *graphe* du pinceau :

$$\{(x, y) \in E \times E : y \in p(x)\}.$$

Il ne faudrait pas être tenté de croire que tout pinceau provient d'un IFS. Le contre-exemple le plus simple est le suivant :  $E = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $p(x) = \{y \in \mathbb{T}^1 : 2y = x\}$ . Les deux “branches” de  $x \mapsto x/2$  s'échangent, si bien que le pinceau n'admet aucune section continue. Un exemple moins trivial est le suivant : soit  $P_c : z \mapsto z^2 + c$  un polynôme hyperbolique, et soit  $E$  un voisinage de l'ensemble de Julia  $J_c$  tel que  $P_c^{-1}(E) \subset\subset E$ . On prend<sup>2</sup>  $p(K) = P_c^{-1}(K)$ . Si on munit  $E$  de la distance de Poincaré, alors  $(E, p)$  est un pinceau hyperbolique, dont l'unique compact invariant (qu'on appelle l'attracteur du pinceau) est précisément l'ensemble de Julia  $J_c$ .

Enfin — et c'est la dernière notion que nous introduirons — on peut imaginer que les différentes images possibles d'un point  $x$  ne soient pas équiprobables ; on aurait donc besoin d'une mesure portée par  $p(x)$ . Tel est l'objet du paragraphe suivant.

<sup>2</sup> Ici,  $K$  ne désigne pas l'ensemble de Julia rempli !

### 3) Pinceaux mesurés

Etant donné un espace métrique  $E$ , soit  $C(E)$  l'ensemble des fonctions continues de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme uniforme si  $E$  est compact, et sinon muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. La fonction  $\mathbf{1}$  est la fonction constante égale à 1. On note  $C^+(E)$  les fonctions positives de  $C(E)$ . On écrira  $\phi \leq \psi$  si  $\forall x \in E \phi(x) \leq \psi(x)$ . Enfin, pour  $\phi, \psi \in C(E)$ , on dira que  $\phi$  est  $\varepsilon$ -dominée par  $\psi$ , et on notera  $\phi \stackrel{\varepsilon}{\leq} \psi$ , si

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \varepsilon \implies \phi(x) \leq \psi(y).$$

**Définition.** On appelle pinceau mesuré un élément  $\dot{p} \in L(C(E))$  tel que  $\dot{p}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , et tel que  $\phi \geq 0 \implies \dot{p}(\phi) \geq 0$ . Le pinceau mesuré sera dit hyperbolique si  $E$  est complet et s'il existe  $k < 1$  tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \forall \phi, \psi \in C(E) \quad 0 \leq \phi \stackrel{k\eta}{\leq} \psi \leq \mathbf{1} \implies \dot{p}(\phi) \stackrel{\eta}{\leq} \dot{p}(\psi).$$

Il sera dit convergent si  $E$  est compact et si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \forall \phi, \psi \in C(E) \quad 0 \leq \phi \stackrel{\max(\varepsilon, k\eta)}{\leq} \psi \leq \mathbf{1} \implies \dot{p}(\phi) \stackrel{\eta}{\leq} \dot{p}(\psi).$$

Pour fabriquer un pinceau mesuré à partir d'un IFS, rien de plus simple ! Tout ce dont vous avez besoin est une probabilité  $\nu$  sur  $I$ . Le pinceau mesuré sera alors donné par :

$$\dot{p}(\phi) = \int_I (\phi \circ f_i) d\nu(i)$$

et sera hyperbolique ou convergent si l'IFS l'est.

Quelques remarques s'imposent à propos de cette définition. En particulier, où sont les mesures ? En fait, au lieu de considérer le pinceau mesuré comme une application<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \dot{p} : E &\longrightarrow \text{Psc } E \\ x &\longmapsto \dot{p}_x, \end{aligned}$$

on considère plutôt l'application

$$\begin{aligned} \dot{p} : E \times C(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \phi) &\longmapsto \langle \dot{p}_x, \phi \rangle \end{aligned}$$

qu'on peut encore transformer en

$$\begin{aligned} \dot{p} : C(E) &\longrightarrow C(E) \\ \phi &\longmapsto \left[ x \mapsto \langle \dot{p}_x, \phi \rangle \right]. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> La définition de  $\text{Psc } E$  sera donné quelques lignes plus bas ; en gros, il s'agit de l'ensemble des probabilités à support compact de  $E$ .

Voilà pourquoi on peut considérer un pinceau mesuré comme un endomorphisme de  $C(E)$ . Il est à noter que ce qui apparaît naturellement, c'est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues positives sur  $C(E)$  ; cet ensemble, nous l'appellerons — bien que ce soit inexact — ensemble des *mesures à support compact de  $E$* , et nous le noterons  $\text{Msc } E$ . De même, par abus de langage, on appellera *probabilité à support compact* un élément de l'ensemble

$$\text{Psc } E = \{\mu \in \text{Msc } E : \langle \mu, \mathbf{1} \rangle = 1\}.$$

Par dualité,  $\dot{p}$  agit sur  $\text{Msc } E$  et  $\text{Psc } E$  :

$$\langle {}^t\dot{p}\mu, \phi \rangle = \langle \mu, \dot{p}\phi \rangle,$$

et c'est plutôt la dynamique de  ${}^t\dot{p}$  que nous étudierons.

La notion de pinceau mesuré est à rapprocher de celle de *noyau* en probabilités, comme elle est décrite dans [De,Me] au début du chapitre IX :

*La notion de noyau est la généralisation probabiliste de la notion de fonction de  $E$  dans  $F$  : au lieu d'associer à tout  $x \in E$  une valeur déterminée  $n(x) \in F$ , on tire au hasard un point de  $F$  suivant la loi  $N(x, \cdot)$  (...). La notion de fonction correspond au cas où  $N(x, \cdot) = \varepsilon_n(x)$  est dégénérée pour tout  $x \in E$ .*

Ces trois types de systèmes dynamiques (IFS, pinceaux et pinceaux mesurés) admettent chacun, aussi bien dans le cas hyperbolique que dans le cas convergent, un certain type d'objet invariant : ce peut être une fonction, un compact ou une probabilité. On appellera *attracteur* cet objet.

## II. LES ATTRACTEURS

### 1) Définitions

Commençons par la structure la plus pauvre, celle de pinceau.

**Proposition - Définition.** *Un pinceau  $(E, p)$  hyperbolique ou convergent admet un unique compact non vide  $A$ , appelé attracteur, tel que  $p(A) = A$ . De plus, si  $K$  est un compact quelconque non vide, alors  $p^n(K) \rightarrow A$  dans  $\text{Com } E$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

*Preuve.* Si  $E$  est complet et  $p$  contractant sur  $\text{Com } E$ , alors  $p$  admet un point fixe unique parce que  $\text{Com } E$  est complet, et ce point fixe attire  $\text{Com } E$  tout entier. Si  $E$  est compact et  $p$  convergent, alors  $\text{Com } E$  est compact, et ici encore  $p$  admet un unique point fixe qui attire  $\text{Com } E$  tout entier.

Pour les IFS, on a la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit  $(E, (f_i)_{i \in I})$  un IFS hyperbolique, convergent ou asymptotiquement convergent. Alors il existe une et une seule fonction  $\varphi \in C(I^{\mathbb{N}}, E)$  telle que*

$$\forall i \in I \quad \forall s \in I^{\mathbb{N}} \quad \varphi(is) = f_i(\varphi(s)).$$

Pour  $i \in I$  et  $s = (i_0, i_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}}$ , on note  $is$  ou  $\sigma_i(s)$  le mot de  $I^{\mathbb{N}}$  obtenu par concaténation de  $i$  et  $s$ , c'est-à-dire

$$\sigma_i(s) = is = (i, i_0, i_1, \dots).$$

Avec ces notations, la proposition ci-dessus affirme l'existence et l'unicité d'une fonction continue  $\varphi$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma_i} & I^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ E & \xrightarrow{f_i} & E. \end{array}$$

*Preuve.* Munissons  $C(I^{\mathbb{N}}, E)$  de la distance uniforme, et sur cet espace considérons l'opérateur  $\mathcal{F}$  défini par

$$\mathcal{F} : \psi \mapsto (\mathcal{F}\psi : is \mapsto f_i[\psi(s)]).$$

Si  $E$  est complet et que l'IFS est  $k$ -lipschitzien, alors  $\mathcal{F}$  est  $k$ -lipschitzien sur  $C(I^{\mathbb{N}}, E)$ , qui est complet, donc  $\mathcal{F}$  admet un unique point fixe  $\varphi$ , vérifiant  $\varphi(is) = f_i(\varphi(s))$  pour tous  $i, s$ .

Supposons maintenant que  $E$  soit compact et que l'IFS soit asymptotiquement convergent. Si  $s = (i_0, i_1, \dots, i_n, \dots) \in I^{\mathbb{N}}$ , il est clair qu'on doit avoir  $\varphi(s) \in (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E)$  pour tout  $n$ . Donc

$$\varphi(s) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E)$$

nécessairement. Comme cet ensemble est un singleton, on voit que si  $\varphi$  existe, alors elle est unique. Il reste à prouver que si on définit  $\varphi$  par la formule ci-dessus, alors  $\varphi$  est continue. Pour cela, choisissons  $x_0 \in E$ , et considérons la suite  $(\varphi_n)$  de fonctions de  $I^{\mathbb{N}}$  dans  $E$  définies par

$$\varphi_n(i_0, i_1, \dots) = f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}}(x_0).$$

Manifestement les  $\varphi_n$  sont toutes continues et convergent uniformément vers  $\varphi$ , donc  $\varphi$  est continue.

Si  $(E, f_i)$  est un HIFS ou un CIFS, on peut lui associer un pinceau  $p$ ; je dis que l'attracteur de ce pinceau est  $\varphi(I^{\mathbb{N}}) = \text{Im } \varphi$ . En effet, de la formule  $\varphi(is) = f_i(\varphi(s))$  on déduit

$$\text{Im } \varphi = \bigcup_{i \in I} f_i[\text{Im } \varphi],$$

donc  $\text{Im } \varphi$  est l'attracteur de  $p$ .

Ainsi, partant d'une structure plus riche que celle de pinceau, on trouve une structure invariante plus riche : l'attracteur apparaît comme une image continue de  $I^{\mathbb{N}}$  par une application parfaitement définie.

Si  $A$  est l'attracteur, on a  $A = \bigcup_{i \in I} f_i(A)$ , donc pour tout  $n \geq 0$  on a

$$A = \bigcup_{(i_0 \dots i_{n-1}) \in I^{\mathbb{N}}} (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(A).$$

Les ensembles  $(f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(A)$  seront appelés *pièces d'ordre  $n$* . Par convention, on dira que  $A$  est l'unique pièce d'ordre 0.

Enfin, un pinceau mesuré devrait, en toute logique, nous donner un compact invariant portant une mesure invariante :



**Proposition.** Soit  $(E, \dot{p})$  un pinceau mesuré hyperbolique ou convergent. Alors il existe une et une seule proba  $\mu \in \text{Psc } E$  telle que  ${}^t\dot{p}(\mu) = \mu$ .

La démonstration de ce point est plus délicate et nous oblige à rappeler tout d'abord la définition du *support* d'un élément de  $\text{Psc } E$ .

**Définition.** Soit  $\mu \in \text{Msc } E$ . On dira que  $x \notin \text{supp } \mu$  si  $x$  admet un voisinage  $V$  tel que

$$\forall \phi \in C(E) \quad \text{supp } \phi \subset V \implies \langle \mu, \phi \rangle = 0.$$

Il découle immédiatement de la définition que  $\text{supp } \mu$  est fermé. Pour prouver qu'il est compact, notons que  $\mu \in L(C(E), \mathbb{R})$  est continue, donc il existe  $K$  compact et  $c \geq 0$  tels que

$$\forall \phi \in C(E) \quad |\langle \mu, \phi \rangle| \leq c \cdot \sup_K |\phi|$$

ce qui entraîne  $\text{supp } \mu \subset K$ , donc  $\text{supp } \mu$  est compact. Enfin, le support ne peut être vide que si  $\mu = 0$ . On en déduit le

**Lemme a.** Il existe  $c \geq 0$  telle que  $|\langle \mu, \phi \rangle| \leq c \cdot \sup_{\text{supp } \mu} |\phi|$ , et on peut prendre  $c = 1$  si  $\mu$  est une proba.

Revenons à la démonstration de la proposition. On va d'abord appauvrir la structure de  $\dot{p}$  en fabriquant un pinceau  $p$  de la manière suivante :

$$\forall x \in E \quad p(x) = \text{supp } \dot{p}_x,$$

où  $\dot{p}_x$  est la proba définie par  $\langle \dot{p}_x, \phi \rangle = [\dot{p}(\phi)](x)$ .

**Lemme b.** Si  $\dot{p}$  est un pinceau mesuré hyperbolique (resp. convergent), alors  $p$  est un pinceau hyperbolique (resp. convergent).

*Preuve.* Supposons d'abord  $\dot{p}$  hyperbolique, de constante de Lipschitz  $k$ . Soient  $x, y \in E$ , avec  $d(x, y) = \eta$ . On pose  $K_x = \text{supp } \dot{p}_x$ ,  $K_y = \text{supp } \dot{p}_y$ , et on veut prouver que  $d_H(K_x, K_y) \leq k\eta$ . Montrons par exemple que  $K_y$  est contenu dans  $K_x$  à  $k\eta$  près.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point  $\zeta \in K_y$  tel que  $d(\zeta, K_x) = \delta > k\eta$ . Posons  $\alpha = \frac{1}{4}(\delta - k\eta)$ . Comme  $\zeta$  est dans le support de  $\dot{p}_y$ , si on prend  $V = B(\zeta, \alpha)$ , alors il existe  $\phi \in C(E)$  telle que  $\text{supp } \phi \subset V$  et  $\langle \dot{p}_y, \phi \rangle \neq 0$ . Quitte à poser  $\phi = \phi_+ - \phi_-$ , on peut également supposer que  $\phi \in C^+(E)$ . Par ailleurs, quitte à poser  $\phi_n = \min(n \cdot \mathbf{1}, \phi)$ , on peut toujours supposer que  $\phi$  est bornée (les  $\langle \dot{p}_y, \phi_n \rangle$  ne peuvent pas être tous nuls, car  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformément sur tout compact, et donc  $\langle \dot{p}_y, \phi_n \rangle \rightarrow \langle \dot{p}_y, \phi \rangle \neq 0$ ), et même bornée par 1. Maintenant, construisons une fonction  $\psi$ , comprise entre 0 et 1, telle que :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 1 \text{ si } d(\zeta, t) \leq k\eta + \alpha, \\ \psi(t) &= 0 \text{ si } d(\zeta, t) \geq k\eta + 2\alpha. \end{aligned}$$

Alors on a clairement  $\phi \stackrel{k\eta}{\leq} \psi$ , et donc  $\langle \dot{p}_y, \phi \rangle \leq \langle \dot{p}_x, \psi \rangle$ . Mais  $\psi$  est nulle sur  $E - B(\zeta, \delta)$ , donc sur  $K_x$ , et donc  $\langle \dot{p}_x, \psi \rangle = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\langle \dot{p}_y, \phi \rangle > 0$ . Ce qui prouve le lemme dans le cas hyperbolique (la démonstration est analogue dans le cas convergent).

On sait donc maintenant que  $p$  est un pinceau, hyperbolique ou convergent. Soit  $A$  son attracteur : il est compact. Soit  $\mu_0 \in \text{Psc } E$  ; on pose  $\mu_{n+1} = {}^t\dot{p}(\mu_n)$ . Pour tout  $\phi \in C(E)$ , on a  $\langle \mu_n, \phi \rangle = \langle \mu_0, \dot{p}^n(\phi) \rangle$ . On va en fait prouver le

**Lemme c.** Pour tout  $\phi_0 \in C(E)$ , il existe une (et une seule) constante  $k(\phi_0)$  telle que  $\dot{p}^n(\phi_0) \rightarrow k(\phi_0)\mathbf{1}$  uniformément sur tout compact. Et l'application  $k : C(E) \rightarrow \mathbb{R}$  est un élément de  $\text{Psc } E$  qui vérifie  ${}^t\dot{p}(k) = k$ .

**Corollaire.** On a  $\mu_n \rightarrow k$  pour la topologie  $*$ -faible sur  $\text{Psc } E$ .

En particulier, il n'y a pas d'autre probabilité invariante que  $k$ .

*Preuve du lemme c.* Posant  $\phi_n = \dot{p}^n(\phi_0)$ , on veut prouver que pour tout compact  $K$  de  $E$ , il existe une constante  $k_K(\phi_0)$  telle que  $\phi_n \rightarrow k_K(\phi_0)$  uniformément sur  $K$ . Il est clair que, si c'est le cas, la constante  $k_K(\phi_0)$  ne dépendra pas de  $K$ , et qu'on pourra donc écrire simplement  $k(\phi_0)$ . Il est également clair que la fonctionnelle  $\phi_0 \mapsto k(\phi_0)$  sera linéaire, que  $k(\phi_0) \geq 0$  si  $\phi_0 \geq 0$ , et que  $k(\mathbf{1}) = 1$ . Pour la continuité, on prouvera que

$$\forall \phi \in C(E) \quad |k(\phi)| \leq \sup_A |\phi|,$$

où  $A$  est l'attracteur de  $p$ . Mais prouvons d'abord l'existence de  $k_K(\phi_0)$ . Posons

$$\hat{K} = K \cup p(K) \cup p^2(K) \cup \dots \cup A.$$

Nous laissons au lecteur le soin de montrer que  $\hat{K}$  est un compact vérifiant  $p(\hat{K}) \subset \hat{K}$ . J'affirme que

$$\forall \phi \in C(E) \quad \sup_{\hat{K}} |\dot{p}(\phi)| \leq \sup_{\hat{K}} |\phi|.$$

En effet, pour tout  $x \in \hat{K}$ , on a  $(\dot{p}(\phi))(x) = \langle \dot{p}_x, \phi \rangle$ , donc

$$|\dot{p}_x(\phi)(x)| \leq \sup_{p(x)} |\phi| \leq \sup_{p(\hat{K})} |\phi| \leq \sup_{\hat{K}} |\phi|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par conséquent, l'application  $\dot{p} \in L(C(E))$  passe au quotient en une application  $\dot{p}_{\hat{K}}$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C(E) & \xrightarrow{\dot{p}} & C(E) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ C(\hat{K}) & \xrightarrow{\dot{p}_{\hat{K}}} & C(\hat{K}). \end{array}$$

On vérifie que  $\dot{p}_{\hat{K}}$  est un pinceau mesuré sur  $\hat{K}$  et qu'il est convergent.<sup>4</sup>

Pour simplifier les notations, on posera maintenant  $E = \hat{K}$ , donc  $E$  sera compact et  $\dot{p} = \dot{p}_{\hat{K}}$  sera un pinceau mesuré convergent sur  $E$ . On prend  $\phi_0 \in C(E)$  et on pose  $\phi_n = \dot{p}^n(\phi_0)$ .

<sup>4</sup> Ce point, assez technique, est laissé au lecteur.

**Lemme d.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \forall \phi \in C(E) \quad \text{Osc}(\dot{p}(\phi), \eta) \leq \text{Osc}(\phi, \max(\varepsilon, k\eta)).$$

*Preuve du lemme d.* Donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que<sup>5</sup>

$$\forall \eta > 0 \quad \forall \phi, \psi \in C(E) \quad \phi \stackrel{\max(\varepsilon, k\eta)}{\leq} \psi \implies \dot{p}(\phi) \leq \dot{p}(\psi).$$

Donnons-nous maintenant  $\phi \in C(E)$ . Si on pose  $\alpha = \max(\varepsilon, k\eta)$ , on voit que  $\phi \stackrel{\alpha}{\leq} \phi + \text{Osc}(\phi, \alpha)$ , donc  $\dot{p}(\phi) \stackrel{\eta}{\leq} \dot{p}(\phi) + \text{Osc}(\phi, \alpha)$ , ce qui exprime que  $\text{Osc}(\dot{p}(\phi), \eta) \leq \text{Osc}(\phi, \alpha)$ .

Un corollaire immédiat de ce lemme est que la suite  $\beta_n = \text{Osc} \phi_n$  tend vers zéro. Ceci entraîne que la suite  $(\phi_n)$  est de Cauchy dans  $C(E)$ . En effet, si on pose  $\gamma_n = \min \phi_n$ , alors  $\|\phi_n - \gamma_n \mathbf{1}\| = \beta_n$  pour tout  $n$ . Donc  $\|\phi_{n+k} - \gamma_n \mathbf{1}\| = \|\dot{p}^k(\phi_n - \gamma_n \mathbf{1})\| \leq \|\phi_n - \gamma_n \mathbf{1}\| = \beta_n$ . Par ailleurs  $\|\phi_{n+k} - \gamma_{n+k} \mathbf{1}\| = \beta_{n+k}$ , donc  $|\gamma_n - \gamma_{n+k}| \leq \beta_n + \beta_{n+k}$ , ce qui montre que  $(\gamma_n)$ , et par suite  $(\phi_n)$ , sont de Cauchy.

Donc la suite  $(\phi_n)$  tend vers une fonction constante  $k(\phi) \mathbf{1}$ , ce qu'il fallait démontrer. Et on a clairement

$$|k(\phi)| \leq \sup_E |\phi|.$$

Terminons la démonstration du lemme c. On a prouvé l'existence d'une fonctionnelle linéaire  $k$ , telle que  $k(\phi_0) \geq 0$  quand  $\phi_0 \geq 0$ , et  $k(\mathbf{1}) = 1$ . Il résulte de l'étude faite plus haut que, pour tout compact  $K$ ,

$$|k(\phi)| \leq \sup_{\hat{K}} |\phi|.$$

En particulier, on peut prendre  $K = A$ , dans ce cas  $\hat{K} = A$  et donc  $|k(\phi)| \leq \sup_A |\phi|$ , ce qui prouve que  $k$  est une probabilité à support compact inclus dans  $A$ . Enfin, on a trivialement  ${}^t \dot{p}(k) = k$  ; en effet,

$$\langle {}^t \dot{p}(k), \phi \rangle = \langle k, \dot{p}(\phi) \rangle = k[\dot{p}(\phi)] = k(\phi) = \langle k, \phi \rangle$$

et la proposition est prouvée.

**Proposition.** On a  $\text{supp } k = A$ .

En effet,  $\text{supp } k$  est un compact non vide et invariant par  $p$ , donc  $\text{supp } K$  est l'attracteur de  $p$ .

## 2) Dépendance continue en fonction des paramètres

Si un IFS ou un pinceau dépend continûment d'un paramètre, alors en général l'attracteur en dépendra aussi de manière continue. Nous donnons juste les énoncés et laissons les démonstrations au lecteur.

<sup>5</sup> Comme  $E$  est compact, on peut se débarrasser, quitte à composer par une application affine, des conditions  $0 \leq \phi$  et  $\psi \leq \mathbf{1}$  qui apparaissent dans la définition de la convergence.

**Théorème.** Soit  $\Lambda$  un espace topologique,  $I$  un compact métrique,  $(E, d)$  un espace métrique complet, et

$$\begin{aligned} f_{\cdot}^{(\cdot)} : \Lambda \times I \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, i, x) &\mapsto f_i^{(\lambda)}(x) \end{aligned}$$

une application continue pour laquelle il existe  $k < 1$  tel que les applications  $f_i^{(\lambda)}$  soient  $k$ -lipschitziennes pour tous  $\lambda \in \Lambda$  et  $i \in I$ . Alors il existe un et un seul élément  $\phi \in C(\Lambda \times I^{\mathbb{N}}, E)$  tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall i \in I \quad \forall s \in I^{\mathbb{N}} \quad \phi^{(\lambda)}(is) = f_i^{(\lambda)}[\phi^{(\lambda)}(s)].$$

Si on remplace dans cet énoncé l'hypothèse “ $E$  complet” par “ $E$  compact” et la condition de Lipschitz par

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad (E, (f_i^{(\lambda)})_{i \in I}) \text{ est un ACIFS,}$$

alors le résultat est faux ; il faut ajouter une hypothèse d'uniformité sur l'ACIFS. Par exemple, on peut supposer que  $\Lambda$  est localement compact, et dans ce cas ça marche.

**Théorème.** Soit  $\Lambda$  un espace topologique,  $(E, d)$  un espace métrique complet, et

$$\begin{aligned} p^{(\cdot)} : \Lambda \times E &\longrightarrow \text{Com } E \\ (\lambda, x) &\mapsto p^{(\lambda)}(x) \end{aligned}$$

une famille continue de pincesaux  $k$ -lipschitziens,  $k$  ne dépendant pas de  $\lambda$ . Alors  $\lambda \mapsto A^{(\lambda)}$  est continue.

Ici encore, on peut remplacer “ $E$  complet” par “ $E$  compact”, supposer que pour tout  $\lambda$ , le pinceau  $p^{(\lambda)}$  est asymptotiquement convergent, et que  $\Lambda$  est localement compact ; alors l'application  $\lambda \mapsto A^{(\lambda)}$  est continue.

**Théorème.** Soit  $\Lambda$  un espace topologique,  $(E, d)$  un espace métrique complet,  $k \in ]0, 1[$ , et

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(\cdot)} : \Lambda \times C(E) &\longrightarrow C(E) \\ (\lambda, \phi) &\mapsto \dot{p}^{(\lambda)}(\phi) \end{aligned}$$

une famille continue de pincesaux mesurés  $k$ -lipschitziens. Si  $\mu^{(\lambda)}$  est l'unique proba invariante de  $p^{(\lambda)}$ , alors l'application  $\lambda \mapsto \mu^{(\lambda)}$  est continue.

L'analogie dans le cas compact est le suivant :

**Théorème.** Soit  $\Lambda$  un espace topologique,  $(E, d)$  un espace métrique compact, et

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(\cdot)} : \Lambda \times C(E) &\longrightarrow C(E) \\ (\lambda, \phi) &\mapsto \dot{p}^{(\lambda)}(\phi) \end{aligned}$$

une famille continue de pincesaux mesurés telle que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in ]0, 1[ \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \forall \eta > 0$$

$$\forall \phi, \psi \in C(E) \quad 0 \leq \phi \stackrel{\max(\varepsilon, k\eta)}{\leq} \psi \leq \mathbf{1} \implies \dot{p}^{(\lambda)}(\phi) \stackrel{\eta}{\leq} \dot{p}^{(\lambda)}(\psi).$$

Alors  $\lambda \mapsto \mu^{(\lambda)}$  est continue.

On peut vérifier que, si  $\Lambda$  est localement compact, on peut permuter les quantificateurs  $\exists k$  et  $\forall \lambda$ .

### III. TOPOLOGIE DE L'ATTRACTEUR

#### 1) Connexité

##### a) pour les CIFS

**Théorème.** Soit  $(E, (f_i)_{i \in I})$  un CIFS d'attracteur  $E$ . Alors  $E$  est non connexe si et seulement s'il existe une décomposition  $I = I_1 \sqcup I_2$  en deux compacts non vides tels que

$$\left( \bigcup_{i \in I_1} f_i(E) \right) \cap \left( \bigcup_{i \in I_2} f_i(E) \right) = ?.$$

Ce critère peut être simplifié si  $I$  est fini. Dans ce cas, toute partie de  $I$  est compacte, si bien qu'une condition nécessaire et suffisante de connexité est que le graphe  $G$  sur  $I$  défini par

$$(i, j) \in G \iff f_i(E) \cap f_j(E) \neq \emptyset$$

(*graphe de recouvrement*) soit connexe. En particulier, si  $I = \{1, 2\}$ , alors  $E$  est connexe si et seulement si  $f_1(E) \cap f_2(E) \neq \emptyset$ .

Il est important de remarquer que le graphe de recouvrement peut s'exprimer simplement à l'aide de la fonction  $\varphi$  :

$$(i, j) \in G \iff \exists k, l \in I^{\mathbb{N}} \quad \varphi(ik) = \varphi(jl).$$

Ceci sera utilisé en particulier dans la section **V.2**.

Le théorème implique en particulier que si  $I$  est connexe, alors  $E$  aussi ; ce résultat est évident par ailleurs parce que  $E = \varphi(I^{\mathbb{N}})$  et  $I^{\mathbb{N}}$  est connexe. Pour la même raison,  $E$  est connexe par arcs si  $I$  l'est.

*Preuve.* Il est clair que si on peut trouver  $I_1$  et  $I_2$  comme dans l'énoncé, alors

$$E = \left( \bigcup_{i \in I_1} f_i(E) \right) \sqcup \left( \bigcup_{i \in I_2} f_i(E) \right)$$

donne une partition de  $E$  en deux compacts non vides, donc  $E$  est non connexe. Réciproquement, supposons que  $E$  soit non connexe. Définissons la distance de deux compacts de la manière suivante :

$$d(K_1, K_2) = \inf_{(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2} d(x_1, x_2).$$

On a alors le

**Lemme.** Soit  $K$  un compact métrique non connexe. Alors il existe au moins une partition  $K = K_1 \sqcup K_2$  en deux compacts non vides réalisant le maximum de  $d(K_1, K_2)$ .

En effet, l'ensemble

$$\{(K_1, K_2) \in (\text{Com } K)^2 : K_1 \cup K_2 = K\}$$

étant un sous-compact de  $(\text{Com } K)^2$ , choisissons  $(K_1, K_2)$  réalisant le maximum de  $d(K_1, K_2)$  ; celui-ci étant strictement positif,  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ .

Appliquons le lemme à  $E$  : on obtient  $E = E_1 \sqcup E_2$  avec  $d(E_1, E_2) = \delta$  maximum. J'affirme que pour tout  $i \in I$ , l'ensemble  $f_i(E)$  est entièrement contenu dans  $E_1$ , ou bien dans  $E_2$  (Il suffit alors de définir  $I_{1,2} = \{i : f_i(E) \subset E_{1,2}\}$ ). S'il n'en était pas ainsi, on aurait, pour un certain  $i$ ,  $f_i(E) = J_1 \sqcup J_2$ , avec  $J_{1,2} = f_i(E) \cap E_{1,2} \neq \emptyset$ . Par conséquent,  $d(J_1, J_2) \geq \delta$ . D'autre part on peut écrire la décomposition  $E = f_i^{-1}(J_1) \sqcup f_i^{-1}(J_2)$ , donc  $d[f_i^{-1}(J_1), f_i^{-1}(J_2)] \leq \delta$ . Mais comme  $f_i$  diminue strictement les distances, on devrait avoir

$$d[f_i^{-1}(J_1), f_i^{-1}(J_2)] > d(J_1, J_2)$$

ce qui est absurde, et ceci termine la preuve du théorème.

*Exemple.* Pour  $s \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |s| < 1$ , considérons l'HIFS sur  $\mathbb{C}$  défini par  $f_1 : z \mapsto sz + 1$ ,  $f_{-1} : z \mapsto sz - 1$ . Si on désigne l'attracteur par  $A$  et qu'on pose  $A_{\pm 1} = f_{\pm 1}(A)$ , alors

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, a_n = \pm 1 \right\} \\ A_1 &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, a_n = \pm 1, a_0 = 1 \right\} \\ A_{-1} &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, a_n = \pm 1, a_0 = -1 \right\}. \end{aligned}$$

Certains de ces ensembles sont bien connus : pour  $s = \frac{1}{2}$ , on obtient un intervalle ; pour  $s = \frac{1}{3}$ , l'ensemble triadique de Cantor ; et pour  $s = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ , un rectangle dont le rapport longueur/largeur vaut  $\sqrt{2}$ . Enfin, pour  $s = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , on obtient le "dragon" de Davis et Knuth (voir [Da,Kn]).

Par conséquent,  $A$  est connexe si et seulement s'il existe une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , telle que  $b_0 = 1$ , et

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = 0.$$

## b) pour les pinceaux

Il serait intéressant d'avoir un critère de connexité pour les pinceaux qui se ramène au théorème ci-dessus dans le cas d'un IFS. Malheureusement, je n'en connais pas. Néanmoins, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $(E, p)$  un pinceau convergent d'attracteur  $A$ . On suppose que  $E$  est connexe. Alors  $A$  est connexe si et seulement si les  $p^n(E)$  sont tous connexes pour  $n \geq 1$ .

*Preuve.* Si tous les  $p^n(E)$  sont connexes, alors il en est de même de leur limite  $A = \bigcap_{n \geq 0} p^n(E)$ . Inversement, supposons que les  $p^n(E)$  ne soient pas tous connexes. Quitte à remplacer  $E$  par un certain  $p^k(E)$ , on peut supposer que  $p(E)$  est non connexe. Écrivons  $p(E) = K_1 \sqcup K_2$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux compacts non vides. Considérons les applications  $p_1, p_2$  de  $\text{Com } E$  dans lui-même définies par

$$p_1(L) = p(L) \cap K_1, \quad p_2(L) = p(L) \cap K_2.$$

En fait,  $p_1$  et  $p_2$  sont des pinceaux, mais je n'ai pas besoin de la continuité. Le point essentiel est que  $p_1$  et  $p_2$  envoient un compact non vide sur un compact *non vide*. En effet, si on pose  $E_1 = \{x \in E : p_1(x) \neq ?\}$ , alors  $E_1$  est à la fois ouvert, fermé, et non vide, donc  $E_1 = E$  puisque  $E$  est connexe. Même argument pour  $p_2$ .

Finalement, on a  $A = p(A) = p_1(A) \sqcup p_2(A)$ , donc  $A$  est non connexe, ce qu'il fallait démontrer.

## 2) Connexité par arcs, connexité locale

### a) Systèmes itérés de fonctions

Le résultat principal est le suivant.

**Théorème.** Soit  $(E, (f_i)_{i \in I})$  un CIFS d'attracteur  $E$  connexe. Si  $I$  est localement connexe, alors  $E$  aussi.

*Preuve.* Soit  $\varphi \in C(I^{\mathbb{N}}, E)$  comme au chapitre II.1. Soit  $x \in E$  un point quelconque et  $V$  un voisinage ouvert de  $x$ . Alors  $K = \varphi^{-1}(\{x\})$  est un sous-compact de  $I^{\mathbb{N}}$  et  $U = \varphi^{-1}(V)$  est un voisinage ouvert de  $K$  dans  $I^{\mathbb{N}}$ . Or, un système fondamental de voisinages de  $K$  est donné par les ouverts

$$K_{\varepsilon, n} = \left\{ (i_0, i_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}} : \exists (j_0, j_1, \dots) \in K \right. \\ \left. d(i_0, j_0) < \varepsilon, \dots, d(i_{n-1}, j_{n-1}) < \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}).$$

Donc il existe  $\varepsilon$  assez petit et  $n$  assez grand tels que  $U \supset K_{\varepsilon, n}$ . Maintenant, à tout point  $i \in I$  associons un voisinage connexe  $W_i$  contenu dans  $B(i, \varepsilon)$ , et considérons

$$K'_{\varepsilon, n} = \left\{ (i_0, i_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}} : \exists (j_0, j_1, \dots) \in K \quad i_0 \in W_{j_0}, \dots, i_{n-1} \in W_{j_{n-1}} \right\}.$$

Alors  $K'_{\varepsilon, n}$  est un voisinage de  $K$  inclus dans  $U$ .

J'affirme que  $S = \varphi(K'_{\varepsilon, n})$  est un voisinage connexe de  $x$  contenu dans  $V$ . Le seul point à démontrer est que  $S$  est connexe. Pour cela, notons qu'on peut écrire  $K'_{\varepsilon, n}$  comme une union :

$$K'_{\varepsilon, n} = \bigcup_{(j_0, \dots) \in I^{\mathbb{N}}} W_{j_0} \times \dots \times W_{j_{n-1}} \times I \times I \times \dots$$

et donc

$$\begin{aligned}
S &= \bigcup_{(j_0, \dots) \in I^{\mathbb{N}}} \varphi(W_{j_0} \times \dots \times W_{j_{n-1}} \times I \times I \times \dots) \\
&= \bigcup_{j = (j_0, \dots) \in I^{\mathbb{N}}} \underbrace{\bigcup_{\substack{i_0 \in W_{j_0} \\ \vdots \\ i_{n-1} \in W_{j_{n-1}}}}_{S_j} (f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E).
\end{aligned}$$

Or  $S_j$  est connexe et contient  $x$ . Comme tous les  $S_j$  ont un point commun, leur union  $S = \bigcup S_j$  est connexe. Le théorème est prouvé.

En particulier, si  $I$  est fini et  $E$  connexe, alors  $E$  est localement connexe et à fortiori connexe par arcs<sup>6</sup>. Mais on a mieux : il existe un “omnibus”, c’est-à-dire un chemin qui passe par tous les points de  $E$ . Mais ce résultat n’est pas propre aux attracteurs. De manière générale :

**Proposition.** *Tout espace métrique compact connexe et localement connexe est une image continue de l’intervalle  $[0, 1]$ .*

La preuve est laissée au lecteur.

## b) pour les pinceaux

Pour les pinceaux, il n’existe aucun théorème analogue à celui du paragraphe précédent. Voici un exemple de pinceau convergent, qui semble tout à fait raisonnable, dont l’attracteur est connexe mais non localement connexe. On prend<sup>7</sup> pour  $E$  le tore solide  $S^1 \times D_2$ , et le pinceau

$$p(t, z) = \left( t^{1/2}, \frac{z}{10} + t^{1/4} \right)$$

ou, plus précisément,  $p(t, z)$  est l’ensemble des  $(t', z') \in S^1 \times D_2$  tels que  $(t')^2 = t$  et  $(z' - \frac{z}{10})^2 = t'$ . Alors  $p(E)$  est un tore solide inclus dans  $E$ , qui fait deux fois le tour. Pourtant, quand un point fait le tour de  $E$ , chacune de ses images ne fait qu’un demi-tour, si bien qu’il faut faire quatre tours pour que les images reviennent à leur point de départ. On vérifie facilement que le pinceau est convergent, et que son attracteur est un solénoïde.

## 3) Classes de conjugaison des ACIFS

Soient  $\mathcal{F} = (A, (f_i)_{i \in I})$  et  $\mathcal{G} = (B, (g_i)_{i \in I})$  deux ACIFS d’attracteurs respectifs  $A$  et  $B$ .

**Définition.** *On dira que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont conjugués s’il existe un homéo  $h : A \rightarrow B$  faisant commuter les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f_i} & A \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
B & \xrightarrow{g_i} & B
\end{array}$$

<sup>6</sup> La connexité par arcs est prouvée, sous des hypothèses un peu plus fortes, dans l’article [VID] de J. P. Vidal.

<sup>7</sup> Cet exemple est inspiré d’un travail de J. H. Hubbard sur les applications de Hénon.



pour tout  $i \in I$ . Dans ce cas, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{Id}} & I^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \varphi(\mathcal{F}) & & \downarrow \varphi(\mathcal{G}) \\ A & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

*Preuve.* Soit  $\Phi = h \circ \varphi(\mathcal{F})$ . Pour prouver que  $\Phi = \varphi(\mathcal{G})$ , il suffit de voir que pour tout  $i$ , on a  $\Phi \circ \sigma_i = g_i \circ \Phi$ . Mais

$$\Phi \circ \sigma_i = h \circ \varphi(\mathcal{F}) \circ \sigma_i = h \circ f_i \circ \varphi(\mathcal{F}) = g_i \circ h \circ \varphi(\mathcal{F}) = g_i \circ \Phi,$$

d'où le résultat.

Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $I^{\mathbb{N}}$  définie par  $x\mathcal{R}y \iff \varphi(x) = \varphi(y)$ . J'affirme que  $\mathcal{R}$  est l'invariant de conjugaison de l'ACIFS, c'est-à-dire que deux ACIFS sont conjugués si et seulement si les relations sont les mêmes.

**Théorème.** *Les ACIFS  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont conjugués si et seulement si  $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{G})$ .*

*Preuve.* Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont conjugués par  $h$ , alors  $\varphi(\mathcal{G}) = h \circ \varphi(\mathcal{F})$ , avec  $h$  injective, donc  $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{G})$ . Réciproquement, supposons que  $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{G})$ . Alors l'application  $\text{Id}(I^{\mathbb{N}})$  passe au quotient en une application continue bijective  $h$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{Id}} & I^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \varphi(\mathcal{F}) & & \downarrow \varphi(\mathcal{G}) \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

puisque  $A \simeq I^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}(\mathcal{F}) = I^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}(\mathcal{G}) \simeq B$ . De la relation  $\varphi(\mathcal{G}) = h \circ \varphi(\mathcal{F})$  on déduit que, pour tout  $i \in I$ ,

$$g_i \circ h \circ \varphi(\mathcal{F}) = g_i \circ \varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}) \circ \sigma_i = h \circ \varphi(\mathcal{F}) \circ \sigma_i = h \circ f_i \circ \varphi(\mathcal{F}).$$

On peut simplifier par  $\varphi(\mathcal{F})$  puisque  $\varphi(\mathcal{F})$  est surjective, et il vient  $g_i \circ h = h \circ f_i$ , ce qui montre que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont conjugués.

On a donc prouvé que la classe de conjugaison d'un ACIFS était décrite par la relation  $\mathcal{R}$ . Maintenant, il faut se demander quel est l'ensemble décrit par  $\mathcal{R}$  quand on décrit toutes les classes de conjugaison. La relation  $\mathcal{R}$ , par sa définition même, n'est pas quelconque : elle vérifie au moins les deux propriétés suivantes :

- (i) son graphe  $\{(x, y) \in I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}} : x\mathcal{R}y\}$  est fermé
- (ii) la relation  $\mathcal{R}$  est compatible avec les décalages :  $x\mathcal{R}y \implies \forall i \in I \quad \sigma_i(x)\mathcal{R}\sigma_i(y)$ .

Réciproquement, nous allons démontrer que si  $\mathcal{R}$  vérifie ces deux propriétés, alors  $\mathcal{R}$  provient d'une classe de conjugaison d'ACIFS.

Supposons donc que  $\mathcal{R}$  vérifie (i) et (ii). D'après (i), le quotient  $E = I^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}$  est séparé, et c'est un compact métrisable puisque  $I^{\mathbb{N}}$  l'est. La condition (ii) signifie que les décalages  $\sigma_i$  passent au quotient en des applications continues  $t_i$  faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} I^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma_i} & I^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{t_i} & E. \end{array}$$

Reste à prouver que  $(E, (t_i)_{i \in I})$  est un ACIFS. Soit donc  $i = (i_0, i_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}}$ , et posons  $X_n = (t_{i_0} \circ \dots \circ t_{i_{n-1}})(E)$ . Alors

$$\begin{aligned} X_n &= (t_{i_0} \circ \dots \circ t_{i_{n-1}} \circ \pi)(I^{\mathbb{N}}) \\ &= (\pi \circ \sigma_{i_0} \circ \dots \circ \sigma_{i_{n-1}})(I^{\mathbb{N}}) \\ &= \pi(B_n) \end{aligned}$$

où  $B_n = \{i_0\} \times \dots \times \{i_{n-1}\} \times I \times I \dots$  est l'ensemble des éléments de  $I^{\mathbb{N}}$  dont les  $n$  premiers termes coïncident avec ceux de  $i$ . Le diamètre de  $B_n$  tend vers 0, donc  $\bigcap X_n$  est un singleton. Finalement :

**Théorème.** *Il y a bijection entre les classes de conjugaison d'ACIFS et les relations d'équivalence sur  $I^{\mathbb{N}}$  de graphe fermé et compatibles avec les décalages.*

*Exemple.* Classes de conjugaison des  $z \mapsto sz \pm 1$ .

Donnons-nous  $s \in D^*$ . L'invariant de conjugaison de l'HIFS  $(\mathbb{C}, sz+1, sz-1)$  est l'ensemble

$$\left\{ (a_n, a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left( \{-1, +1\}^{\mathbb{N}} \right)^2 : \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a'_n) s^n = 0 \right\},$$

ou, ce qui contient la même information,

$$\Xi_s = \left\{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}} : b_0 = 1, \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = 0 \right\}.$$

C'est-à-dire que  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont conjugués si et seulement si  $\Xi_s = \Xi_t$ . Si  $\mathcal{D}$  désigne le lieu des  $s$  pour lesquels l'attracteur est non connexe, alors  $\mathcal{D} = \{s \in D^* : \Xi_s = ?\}$  ; donc si  $s, t \in \mathcal{D}$ , alors  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont conjugués. Inversement, si  $M = D^* - \mathcal{D}$  désigne le lieu de connexité, on aimerait avoir un critère pour savoir si  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont conjugués. Le résultat auquel je m'attends est le suivant :

**Conjecture.** *Si  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont conjugués, alors  $s, t \in \mathcal{D}$ , ou  $s = t$ , ou  $\bar{s} = t$ .*

Ces conditions sont évidemment suffisantes. Cette conjecture est motivée par les deux résultats partiels que voici.

**Proposition 1.** *Si  $s \in M$ , alors  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont non conjugués pour tout  $t$  suffisamment proche de  $s$  et distinct de  $s$ .*

Cette proposition est une conséquence immédiate du principe des zéros isolés. Soit  $(b_n) \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , telle que  $b_0 = 1$ , et vérifiant  $\sum b_n s^n = 0$ . Alors  $s$  est un zéro isolé de la fonction  $t \mapsto \sum b_n t^n$ , donc il existe un voisinage  $V$  de  $s$  tel que  $\forall t \in V - \{s\} \quad \Xi_s \neq \Xi_t$ .

**Proposition 2.** *Si  $s, t \in M \cap \mathbb{R}$ , alors  $z \mapsto sz \pm 1$  et  $z \mapsto tz \pm 1$  sont conjugués si et seulement si  $s = t$ .*

Cette proposition sera prouvée plus loin, au paragraphe IV.3, à l'aide d'un autre invariant de conjugaison, plus facile à manipuler : l'entropie.

## 4) Chemins dans un attracteur

Nous considérons ici un HIFS  $(E, f_1, f_2)$  d'attracteur  $E$  connexe, et de constante de Lipschitz  $k < 1$ . Nous nous proposons de montrer que deux points quelconques de  $E$  peuvent être joints par un chemin hölderien. On pose  $\alpha = -\log_2 k$ , si bien que  $2^{-\alpha} = k$ . Et on désigne par  $J$  l'intervalle  $[0, 1]$ .

### a) Construction d'une distance sur l'intervalle

L'outil essentiel est le suivant :

**Théorème.** *Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Il existe sur  $J$  une et une seule distance  $d_\alpha$ , compatible avec la topologie usuelle, telle que*

$$d_\alpha(x, y) = \begin{cases} 2^{-\alpha} d_\alpha(2x, 2y) & \text{si } x, y \leq \frac{1}{2}, \\ 2^{-\alpha} d_\alpha(2x - 1, 2y - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x, y, \\ \min(1, d_\alpha(x, \frac{1}{2}) + d_\alpha(\frac{1}{2}, y)) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \leq y \text{ ou } y \leq \frac{1}{2} \leq x. \end{cases}$$

Pour cette distance, on a  $\text{Diam } J = 1$ . Cette distance est monotone, c'est-à-dire que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \implies d_\alpha(x_2, x_3) \leq d_\alpha(x_1, x_4),$$

et enfin, elle vérifie

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \{0, \dots, 2^s - 1\} \quad d_\alpha\left(\frac{p}{2^s}, \frac{p+1}{2^s}\right) = 2^{-s\alpha}.$$

On remarquera que la distance  $(x, y) \mapsto |y - x|^\alpha$  ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé, et donc la distance  $d_\alpha$  n'est pas celle que vous croyez.

*Preuve.* Commençons par l'unicité, soit  $d$  une distance vérifiant les propriétés annoncées. Posons  $k = 2^{-\alpha} \in ]\frac{1}{2}, 1[$ . On a

$$\begin{aligned} d(0, 1) &= \min\left(1, d\left(0, \frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) \\ &= \min(1, 2k d(0, 1)) \end{aligned}$$

donc  $d(0, 1) = 1$  puisque  $2k > 1$ . On en déduit sans peine un algorithme pour calculer  $d(x, y)$  dans le cas où  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cap [0, 1]$ . Par densité, on en déduit que  $d$  est uniquement déterminée sur  $J$ .

Maintenant, prouvons l'existence. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions continues  $D : J \times J \rightarrow J$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J & \quad |y - x|^\alpha \leq D(x, y) = D(y, x) \leq 1 \\ \forall x, y, z \in J & \quad D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z) \\ \forall x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \in J & \quad D(x_2, x_3) \leq D(x_1, x_4). \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est un fermé de  $C(J \times J, J)$ . Soit  $\mathcal{O}$  l'opérateur de  $\mathcal{E}$  dans lui-même défini par  $\mathcal{O} : D \mapsto D'$ , où  $D'$  est définie par

$$D'(x, y) = \begin{cases} k D(2x, 2y) & \text{si } x, y \leq \frac{1}{2}, \\ k D(2x - 1, 2y - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x, y, \\ \min(1, k \{D(2x, 1) + D(1, 2y - 1)\}) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \leq y, \\ \min(1, k \{D(2x - 1, 1) + D(1, 2y)\}) & \text{si } y \leq \frac{1}{2} \leq x. \end{cases}$$

On vérifie que  $D'$  est bien définie, continue, et dans  $\mathcal{E}$ . Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{O}$  est  $k$ -lipschitzien. Désignant par  $d_\alpha$  son point fixe, on voit que  $d_\alpha$  est une distance ; en effet,  $d_\alpha$  est symétrique, vérifie l'inégalité triangulaire, et l'inégalité  $|y - x|^\alpha \leq d_\alpha(x, y)$  montre que  $d_\alpha(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ . Enfin,  $d_\alpha$  est trivialement monotone puisque dans  $\mathcal{E}$ , et des propriétés d'auto-similitude de  $d_\alpha$  on déduit facilement (par récurrence sur  $s$ ) que

$$d_\alpha \left( \frac{p}{2^s}, \frac{p+1}{2^s} \right) = k^s = 2^{-s\alpha}.$$

Le théorème est démontré.

*Exemple.* Nous nous proposons de calculer  $t = d_\alpha(0, \frac{1}{3})$  en fonction de  $k = 2^{-\alpha}$ . On a

$$\begin{aligned} d_\alpha(0, \frac{1}{3}) &= k d_\alpha(0, \frac{2}{3}) \\ &= k \min \left[ 1, d_\alpha(0, \frac{1}{2}) + d_\alpha(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \right] \\ &= k \min \left[ 1, k + k d_\alpha(0, \frac{1}{3}) \right] \end{aligned}$$

donc  $t = \min(k, k^2(1+t))$ , si bien que  $t = \min(k, \frac{k^2}{1-k^2})$ , et donc

$$d_\alpha \left( 0, \frac{1}{3} \right) = \begin{cases} \frac{k^2}{1-k^2} & \text{si } k \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ k & \text{si } k \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$$

Par des arguments analogues, on peut calculer  $d_\alpha(x, y)$  si  $x$  et  $y$  sont des nombres rationnels quelconques.

**Proposition.** *Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\forall x \neq y \in J \quad 1 \leq \frac{d_\alpha(x, y)}{|y - x|^\alpha} \leq 4.$$

*Preuve.* Soient  $x, y$  deux éléments de  $J$ , avec  $x < y$ , et soit  $s$  le plus grand entier tel que  $2^s |y - x| \leq 1$ . On a donc  $2^{-s} < 2 |y - x|$ . L'intervalle  $[2^s x, 2^s y]$  est de longueur au plus 1, donc est contenu dans un intervalle de la forme  $[p - 1, p + 1]$ , où  $p$  est un entier. De l'inégalité

$$\frac{p-1}{2^s} \leq x \leq y \leq \frac{p+1}{2^s}$$

on déduit

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha \left( \frac{p-1}{2^s}, \frac{p+1}{2^s} \right) \leq 2 \cdot 2^{-s\alpha} < 2^{\alpha+1} |y-x|^\alpha,$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'intérêt de la distance  $d_\alpha$  et de la proposition ci-dessus deviendra clair dès le paragraphe suivant. Par convention, on posera  $d_1(x, y) = |y-x|$ . Tous les résultats énoncés dans cette section sont également valables<sup>8</sup> pour  $\alpha = 1$ .

## b) Existence de chemins lipschitziens

**Théorème.** Soit  $(E, f_1, f_2)$  un HIFS de constante de Lipschitz  $k = 2^{-\alpha} \in ]0, 1[$ , d'attracteur  $E$  connexe, avec  $\text{Diam } E \leq 1$ . Alors, quels que soient les points  $a, b \in E$ , il existe  $\gamma$  application 1-lipschitzienne de  $(J, d_\alpha)$  dans  $E$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

**Corollaire.** Un tel chemin  $\gamma$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in J \quad d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq 4 |y-x|^\alpha.$$

*Preuve du théorème.* Notons tout d'abord que  $k \geq \frac{1}{2}$ . En effet, on a  $E = f_1(E) \cup f_2(E)$ , et l'union est non disjointe, donc

$$\text{Diam } E \leq \text{Diam } f_1(E) + \text{Diam } f_2(E) \leq 2k \cdot \text{Diam } E,$$

d'où le résultat.<sup>9</sup> On a donc bien  $0 < \alpha \leq 1$  et la distance  $d_\alpha$  est bien définie.

Appelons *chaîne d'ordre s* entre deux points  $a$  et  $b$  de  $E$  une application

$$\gamma : \left\{ \frac{0}{2^s}, \frac{1}{2^s}, \dots, \frac{2^s}{2^s} \right\} \rightarrow E$$

telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$  et qui est 1-lipschitzienne si on munit l'ensemble de départ de la distance  $d_\alpha$ .

**Lemme.** S'il existe des chaînes d'ordre arbitrairement grand entre deux points  $a$  et  $b$ , alors il existe un chemin continu 1-lipschitzien (pour  $d_\alpha$ ) entre  $a$  et  $b$ .

*Preuve du lemme.* Soit  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de chaînes joignant  $a$  et  $b$ , dont les ordres tendent vers l'infini. Quitte à extraire une sous-suite par la méthode diagonale, on peut supposer que la suite converge simplement sur  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1}{2} \right] \cap [0, 1]$ . L'application limite  $\gamma_\infty$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1}{2} \right] \cap [0, 1]$ , donc uniformément continue, et donc prolongeable par continuité sur  $J$  en un chemin 1-lipschitzien. Enfin,  $\gamma_\infty(0) = a$  et  $\gamma_\infty(1) = b$ . Ce qui prouve le lemme.

<sup>8</sup> Sauf la partie "unicité" du théorème : on aurait aussi bien pu prendre  $d_1(x, y) = \beta |y-x|$ , avec  $\beta$  plus petit que un. Ou alors, il faut également imposer que  $\text{Diam } J = 1$ , cette hypothèse étant une conséquence des autres si  $\alpha < 1$ .

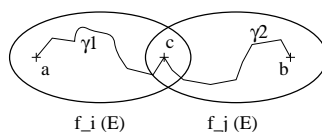
<sup>9</sup> Sauf dans le cas trivial où  $E$  est réduit à un point.

Montrons donc que deux points quelconques de  $E$  peuvent être joints par une chaîne d'ordre  $s$ . C'est évident pour  $s = 0$ , puisque  $\text{Diam } E \leq 1$ . Supposons que ce soit vrai pour  $s - 1$  (avec  $s \geq 1$ ) et montrons que c'est vrai pour  $s$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux points quelconques de  $E$ , et  $c \in f_1(E) \cap f_2(E)$ . Il existe  $i, j \in \{1, 2\}$  tels que  $a, c \in f_i(E)$  et  $c, b \in f_j(E)$ . Ecrivons donc  $a = f_i(u_1)$ ,  $c = f_i(u_2) = f_j(u_3)$  et  $b = f_j(u_4)$ . Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des chaînes d'ordre  $s - 1$  joignant  $u_1$  et  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  respectivement, et considérons l'application  $\gamma$  définie par

$$\gamma(x) = \begin{cases} f_i(\gamma_1(2x)) & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ f_j(\gamma_2(2x - 1)) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

J'affirme que  $\gamma$  est une chaîne d'ordre  $s$  joignant  $a$  et  $b$ .



En effet, soient  $x, y \in J$ . Supposons tout d'abord que  $x$  et  $y$  soient  $\leq \frac{1}{2}$ . Alors

$$d[\gamma(x), \gamma(y)] \leq k d[\gamma_1(2x), \gamma_1(2y)] \leq k d_\alpha(2x, 2y) = d_\alpha(x, y)$$

et on traite de même le cas  $x, y \geq \frac{1}{2}$ . Supposons maintenant que  $x \leq \frac{1}{2} \leq y$ . Alors  $d[\gamma(x), \gamma(y)] \leq 1$  de toute façon, puisque  $\text{Diam } E \leq 1$ , et d'autre part

$$\begin{aligned} d[\gamma(x), \gamma(y)] &\leq d[\gamma(x), \gamma(\frac{1}{2})] + d[\gamma(\frac{1}{2}), \gamma(y)] \\ &\leq d_\alpha(x, \frac{1}{2}) + d_\alpha(\frac{1}{2}, y) \end{aligned}$$

donc finalement

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq \min(1, d_\alpha(x, \frac{1}{2}) + d_\alpha(\frac{1}{2}, y)) = d_\alpha(x, y),$$

et  $\gamma$  est bien une chaîne d'ordre  $s$ . Le théorème est donc démontré. Quant au corollaire, c'est une conséquence immédiate de la proposition du paragraphe précédent.

### c) Applications

On reprend les notations des paragraphes précédents. Nous ne précisons plus que  $J$  est muni de la distance  $d_\alpha$ . Tout d'abord, un résultat de "connexité locale".

**Proposition.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que si  $a, b \in E$  avec  $d(a, b) \leq \eta$ , il existe un chemin  $\varepsilon$ -lipschitzien joignant  $a$  à  $b$ .*

*Preuve.* Par compacité, il suffit de prouver que pour tout  $a \in E$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , le point  $a$  admet un voisinage  $V$  tel que deux points quelconques de  $V$  puissent être joints par un chemin  $\varepsilon$ -lipschitzien. En fait, il suffit simplement qu'un point quelconque de  $V$  puisse être joint à  $a$  par un chemin  $\varepsilon/2$ -lipschitzien (puisqu'on peut rabouter deux chemins

$\varepsilon/2$ -lipschitziens pour obtenir un chemin  $\varepsilon$ -lipschitzien). Mais on a vu au chapitre III.2.a. qu'un système fondamental de voisinages de  $a$  était donné par les ensembles

$$V_n = \bigcup (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}})(E)$$

où l'union est prise sur toutes les pièces d'ordre  $n$  qui contiennent  $a$ . Et clairement, tout point de  $V_n$  peut être joint à  $a$  par un chemin  $k^n$ -lipschitzien. Il suffit donc de prendre  $n$  assez grand.

De même que, dans une variété différentiable, les chemins  $C^\infty$  sont denses dans l'ensemble des chemins continus, de même dans un attracteur, tout chemin peut être approché par des chemins lipschitziens<sup>10</sup>. Le résultat précis est le suivant :

**Théorème.** Soient  $x_1 < \dots < x_r$  des points de  $J$  et  $(a_1, \dots, a_r)$  un  $r$ -uplet de  $E$ , et

$$C[(x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)]$$

l'espace (non vide) des fonctions continues de  $J$  dans  $E$  dont le graphe passe par les points  $(x_k, a_k)$  ; alors les fonctions lipschitziennes sont denses dans cet espace.

*Preuve.* Soit  $f_0$  une fonction continue de  $J$  dans  $E$  telle que  $\forall i \in \{1 \dots r\} f_0(x_i) = a_i$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\eta_1$  tel que, si  $u$  et  $v$  sont deux points de  $E$  tels que  $d(u, v) \leq \eta_1$ ,  $u$  et  $v$  puissent être joints par un chemin  $\varepsilon$ -lipschitzien  $\gamma_{uv}$ . Ceci entraîne en particulier que l'image de ce chemin est de diamètre  $\leq \varepsilon$ . Choisissons maintenant  $\eta_2$  tel que, si  $x, y \in J$  avec  $|y - x| \leq \eta_2$ , alors  $d(f_0(x), f_0(y)) \leq \eta_1$ . Et soit

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_s = 1$$

une subdivision de pas  $\leq \eta_2$  raffinant  $(x_1, \dots, x_r)$ . Sur chaque segment  $[y_k, y_{k+1}]$ , remplaçons la fonction  $f_0$  par un chemin  $\varepsilon$ -lipschitzien joignant  $f_0(y_k)$  à  $f_0(y_{k+1})$ . En mettant bout à bout tous ces chemins lipschitziens, on obtient une fonction lipschitzienne  $f : J \rightarrow E$  telle que  $f(y_k) = f_0(y_k)$  pour tout  $k$ , donc à fortiori  $f(x_i) = a_i$  pour tout  $i$ , et d'autre part la distance uniforme entre  $f$  et  $f_0$  est  $\leq 2\varepsilon$ , ce qui prouve le théorème.

## IV. TROIS TYPES D'ENTROPIE

Dans ce chapitre on se donne un ACIFS constitué d'un nombre fini de fonctions  $(E, f_1, \dots, f_n)$  d'attracteur  $E$ .

### 1) Définitions

Rappelons que si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle sous-additive, c'est-à-dire  $\forall r, s \in \mathbb{N}^* a_{r+s} \leq a_r + a_s$ , alors

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \inf_m \frac{a_m}{m}.$$

A l'HIFS  $\mathcal{F} = (E, f_1, \dots, f_n)$  on va associer trois suites d'entiers,  $(b_m)$ ,  $(c_m)$  et  $(e_m)$ .

<sup>10</sup> C'est-à-dire hölderiens d'exposant  $\alpha$  pour la distance usuelle.

Définissons d'abord  $b_m$ . On sait que

$$E = \bigcup_{(i_0 \dots i_{m-1}) \in \{1 \dots n\}^m} (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E).$$

On prend pour  $b_m$  le cardinal minimum d'une partie  $J_m$  de  $\{1 \dots n\}^m$  telle que

$$E = \bigcup_{(i_0 \dots i_{m-1}) \in J_m} (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E).$$

**Proposition.** *La suite  $(b_m)$  est sous-multiplicative.*

*Preuve.* Soient  $r, s \geq 0$ ,  $J_r$  et  $J_s$  tels que  $\# J_r = b_r$  et  $\# J_s = b_s$ . Posons

$$J_{r+s} = J_r \times J_s = \left\{ (i_0, \dots, i_{r+s-1}) \in \{1 \dots n\}^{r+s} \mid \begin{array}{l} (i_0, \dots, i_{r-1}) \in J_r \\ (i_r, \dots, i_{r+s-1}) \in J_s \end{array} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\substack{(i_0 \dots i_{r-1} i_r \dots i_{r+s-1}) \\ \in J_{r+s}}} (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{r-1}} \circ f_{i_r} \circ \dots \circ f_{i_{r+s-1}})(E) \\ &= \bigcup_{\substack{(i_0 \dots i_{r-1}) \\ \in J_r}} f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{r-1}} \left[ \bigcup_{\substack{(i_r \dots i_{r+s-1}) \\ \in J_s}} f_{i_r} \circ \dots \circ f_{i_{r+s-1}}(E) \right] \\ &= \bigcup_{\substack{(i_0 \dots i_{r-1}) \\ \in J_r}} f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{r-1}}(E) \\ &= E. \end{aligned}$$

donc  $b_{r+s} \leq b_r b_s$ . On définit alors l'entropie de recouvrement par

$$S_B = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log b_m = \inf_m \frac{1}{m} \log b_m.$$

La suite  $(c_m)$ , elle, n'est définie que dans le cas où  $E$  est connexe. Considérons  $G_m$ , le graphe de recouvrement de

$$\mathcal{F}^m = \left( E, (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})_{i_0 \dots i_{m-1} \in \{1 \dots n\}} \right).$$

C'est un graphe connexe à  $n^m$  sommets. On pose alors  $c_m = \text{Diam } G_m + 1$ . En particulier, on a  $c_m \leq n^m$ .

**Proposition.** *La suite  $(c_m)$  est sous-multiplicative.*

*Preuve.* Soient  $r, s \geq 0$ . Donnons-nous deux sommets

$$\begin{aligned} A &= (i_0 \dots i_{r-1} i_r \dots i_{r+s-1}) \\ B &= (i'_0 \dots i'_{r-1} i'_r \dots i'_{r+s-1}) \end{aligned}$$



de  $G_{r+s}$ . Tout d'abord, notons que si  $i_0 = i'_0, \dots, i_{r-1} = i'_{r-1}$ , et si  $(i_r \dots i_{r+s-1})$  et  $(i'_r \dots i'_{r+s-1})$  sont joints par une arête dans  $G_s$ , alors  $A$  et  $B$  sont joints par une arête dans  $G_{r+s}$ . Ensuite, si  $(i_0 \dots i_{r-1})$  et  $(i'_0 \dots i'_{r-1})$  sont joints par une arête dans  $G_r$ , alors on peut trouver  $(i_r \dots i_{r+s-1})$  et  $(i'_r \dots i'_{r+s-1})$  tels que  $A$  et  $B$  soient joints par une arête dans  $G_{r+s}$ . On en déduit que deux points quelconques de  $G_{r+s}$  peuvent être joints par un chemin de longueur inférieure ou égale à  $(c_r - 1) + c_r(c_s - 1) = c_r c_s - 1$ . D'où le résultat. On peut donc définir — si  $E$  est connexe — l'entropie de connexité par

$$S_C = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log c_m = \inf_m \frac{1}{m} \log c_m.$$

Enfin, la suite  $(e_m)$  peut être définie à condition que les fonctions  $f_i$  soient injectives. Pour  $x \in E$ , notons  $E_m(x)$  le nombre de  $m$ -uplets  $(i_0 \dots i_{m-1}) \in \{1 \dots n\}^m$  tels que  $x \in (f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E)$ . On pose alors  $e_m = \max_{x \in E} E_m(x)$  (c'est l'épaisseur du recouvrement). Ici encore on a la

**Proposition.** *La suite  $(e_m)$  est sous-multiplicative.*

*Preuve.* On a manifestement  $E_{r+s}(x) \leq E_r(x)e_s$ , d'où le résultat.

Ceci nous permet de définir l'entropie d'empilement par la formule

$$S_E = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log e_m = \inf_m \frac{1}{m} \log e_m.$$

## 2) Propriétés

Commençons par comparer l'entropie de recouvrement et l'entropie de connexité (en supposant que celle-ci existe).

**Proposition.** *Si  $E$  est connexe, alors  $S_B \geq S_C$ . Si  $E$  est homéomorphe à un intervalle, alors  $S_B = S_C$ .*

*Preuve.* Commençons par le cas général (on ne suppose pas que  $E$  est un intervalle). Alors je dis que  $c_m \leq b_m + 2$  (ce qui, évidemment, entraîne  $S_C \leq S_B$ ). En effet, soit  $J_m$  tel que  $\# J_m = b_m$ . Comme les  $(f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E)$  recouvrent  $E$  quand  $(i_0 \dots i_{m-1})$  décrit  $J_m$ , on voit que la restriction  $G'_m$  de  $G_m$  à  $J_m$  est connexe, donc deux points quelconques de  $G'_m$  peuvent être joints par un chemin de longueur au plus  $b_m - 1$ . Et tout point de  $G_m$  peut être joint à un point de  $G'_m$  par une arête, donc deux points quelconques de  $G_m$  peuvent être reliés par un chemin de longueur au plus  $b_m + 1$ . D'où le résultat.

Supposons maintenant que  $E$  soit l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors j'affirme que  $b_m \leq c_m$  (et donc  $S_B \leq S_C$ ). En effet, soient  $I, I' \in \{1 \dots n\}^m$  tels que  $0 \in f_I(E)$  et  $1 \in f_{I'}(E)$ . Considérons un chemin  $I = I_0, \dots, I_{u-1} = I'$ , avec  $u \leq c_m$ , et  $\forall i f_{I_i}(E) \cap f_{I_{i+1}}(E) \neq \emptyset$ . On a alors un recouvrement de  $E = [0, 1]$  par  $u$  intervalles de la forme  $f_{I_i}(E)$ , et donc  $b_m \leq u \leq c_m$ . C.q.f.d.

L'inégalité  $S_C \leq S_B$  est, en général, stricte quand  $E$  n'est pas un intervalle. Ainsi, si on prend  $z \mapsto sz \pm 1$ , avec  $s = i/\sqrt{2}$ , l'attracteur  $E$  est un rectangle, et on a  $S_B = \log 2$  alors que  $S_C = \frac{1}{2} \log 2$ .

Par ailleurs, il résulte immédiatement des définitions ci-dessus que les trois entropies sont toujours comprises entre 0 et  $n$ . Et là, on se rend compte qu'il existe une différence essentielle entre  $S_B$  et  $S_C$  d'une part, et  $S_E$  d'autre part. Supposons que dans l'ACIFS, je répète une même fonction plusieurs fois, par exemple, je remplace  $(E, f_1, f_2)$  par  $(E, f_1, f_1, f_2)$ . Il est clair que, dans ce cas,  $S_B$  et  $S_C$  ne changeront pas, en revanche  $S_E$  augmentera, en général. L'exemple extrême est le cas où  $E$  est réduit à un point ; dans ce cas, on aura  $S_B = S_C = 0$  et  $S_E = n$ . De manière générale,  $S_E$  a tendance à monter quand  $S_B$  et  $S_C$  décroissent. Nous verrons quelques exemples dans le paragraphe suivant.

### 3) Exemples de calcul et applications

Nous nous bornerons ici au cas où  $E$  est l'intervalle  $[0, 1]$ , muni de sa distance usuelle.

**Proposition.** *Si l'IFS  $(E, f_1, \dots, f_n)$  est  $k$ -lipschitzien avec  $k < 1$ , alors  $S_B = S_C \geq -\log k$ .*

*Preuve.* Les intervalles  $(f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E)$  ont tous une longueur  $\leq k^m$ , il en faut donc au moins  $k^{-m}$  pour recouvrir  $E$ . Donc  $b_m \geq k^{-m}$ , d'où le résultat.

**Proposition.** *Si l'ACIFS  $(E, f_1, \dots, f_n)$  est  $k$ -antilipschitzien, i.e.*

$$\forall x, y \in [0, 1] \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad |f_i(y) - f_i(x)| \geq k|y - x|,$$

*alors  $S_B = S_C \leq -\log k$ .*

*Preuve.* Considérons un recouvrement de  $[0, 1]$  par des intervalles de la forme  $(f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{m-1}})(E)$ , de cardinal minimum  $b_m$ . Ecrivons  $E = E_1 \cup \dots \cup E_{b_m}$ , chacun des intervalles étant de longueur au moins  $k^m$ . Alors je dis que l'épaisseur de ce recouvrement (qui est minimal), c'est-à-dire le nombre maximum de  $E_k$  auxquels peut appartenir un point de  $E$ , est au plus égale à deux. Par conséquent  $b_m \leq 2k^{-m}$  d'où la conclusion. Reste à prouver le

**Lemme.** *Un recouvrement de l'intervalle unité par des sous-intervalles fermés, minimal pour l'inclusion, est d'épaisseur au plus deux.*

(On pourrait dire "exactement deux", pourvu que le recouvrement soit non trivial).

*Preuve.* Ecrivons

$$\underbrace{[0, 1]}_I = \underbrace{[g_1, d_1]}_{I_1} \cup \dots \cup \underbrace{[g_k, d_k]}_{I_k}.$$

Il est tout d'abord clair, si le recouvrement est minimal, qu'aucun des  $I_\ell$  n'est contenu dans un autre. Par conséquent, si  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont deux indices distincts, on aura

$$g_{\ell_1} < g_{\ell_2} \quad \text{et} \quad d_{\ell_1} < d_{\ell_2}$$

ou le contraire ; on a donc une relation de rangement entre les  $I_\ell$ . Nous supposons donc que les  $I_\ell$  sont triés de la gauche vers la droite.

Supposons maintenant que l'épaisseur soit au moins trois ; alors il existe  $x \in I$  et  $\ell \in [1, k-1]$  tels que

$$\begin{aligned} g_{\ell-1} &\leq x \leq d_{\ell-1} \\ g_{\ell} &\leq x \leq d_{\ell} \\ g_{\ell+1} &\leq x \leq d_{\ell+1} \end{aligned}$$

Manifestement, si on enlève l'intervalle  $I_{\ell}$ , les intervalles restants recouvrent encore  $I$  : en effet, les intervalles de  $I_1$  à  $I_{\ell-1}$  recouvrent  $[0, x]$  et les intervalles de  $I_{\ell+1}$  à  $I_k$  recouvrent  $[x, 1]$ . Ceci prouve le lemme.

En particulier, si on prend l'HIFS  $z \mapsto sz \pm 1$ , avec  $s$  réel et  $\frac{1}{2} \leq |s| < 1$ , l'entropie vaut  $S_B = S_C = -\log |s|$ . Ceci prouve en particulier que  $s$  est un invariant de conjugaison de l'HIFS, et résout la question posée au paragraphe III.3 dans le cas réel.

**Proposition.** *Si l'ACIFS  $(E, f_1, \dots, f_n)$  est  $k$ -antilipschitzien, alors  $S_E \geq \log kn$ .*

En effet, les pièces d'ordre  $m$  sont de longueur  $\geq k^m$ , et il y en a  $n^m$ , donc l'épaisseur du recouvrement est au moins égale à  $(kn)^m$ , d'où la proposition.

Ceci ne nous permet malheureusement pas de calculer l'entropie d'empilement même dans le cas le plus simple, celui de  $z \mapsto sz \pm 1$  avec  $s$  réel. Tout au plus sait-on que  $S_E = 0$  quand  $|s| \leq \frac{1}{2}$  et que  $S_E \geq \log 2 |s|$  quand  $|s| \geq \frac{1}{2}$ .

**Problème.** *Calculer l'entropie d'empilement de l'HIFS  $(\mathbb{R}, z \mapsto sz \pm 1)$ .*

## V. ETUDE DU LIEU DE CONNEXITE

### 1) Etude d'un cas particulier

On considère l'HIFS  $(\mathbb{C}, f_1, f_{-1})$ , avec  $f_{\pm 1}(z) = sz \pm 1$ , où  $s$  est un nombre complexe tel que  $0 < |s| < 1$ . Comme on l'a vu plus haut, l'attracteur  $A(s)$  est l'ensemble

$$A(s) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, a_n = \pm 1 \right\}.$$

Notons  $M$  le lieu de connexité :

$$s \in M \iff A(s) \text{ connexe} \iff \exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } b_0 = 1, b_n \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = 0.$$

La connexité étant une propriété fermée dans  $\text{Com } \mathbb{C}$ , le lieu  $M$  est un fermé de  $D^*$ . On sait par ailleurs — et on pourra se reporter par exemple à [Ba,Ha] pour une démonstration — que

$$\begin{aligned} |s| < \frac{1}{2} &\implies s \notin M \\ |s| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies s \in M. \end{aligned}$$

Nous nous proposons de montrer que  $M$  est connexe.

Avant cela, définissons  $M_1$  par

$$s \in M_1 \iff 0 \in A(s) \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } a_0 = 1, a_n \in \{-1, 1\} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 0.$$

Manifestement,  $M_1$  est fermé et inclus dans  $M$ . Et cette inclusion est stricte : en effet, pour  $s = 0.1 + 0.7i$ , on a  $s \in M$  (puisque  $|s| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) mais  $s \notin M_1$ , comme on peut le vérifier. Nous démontrerons que  $M_1$  est également connexe. Pour cela nous aurons besoin du

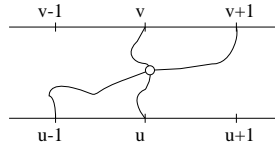
**Lemme a.** Si  $|s| \geq \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ , alors  $s \in M_1$ .

*Preuve.* On va en fait prouver que si  $A(s^2)$  est connexe, alors  $A(s)$  contient 0. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $0 \notin A(s)$ . Comme  $A(s) = A(s^2) + sA(s^2)$ , ceci revient à dire que  $0 \notin A(s^2)$  et que  $A(s^2) \cap -sA(s^2) = ?$ . Soit  $B$  la composante connexe de  $\mathbb{C} - A(s^2)$  qui contient  $-sA(s^2)$ . Comme 0 est un centre de symétrie de la figure, la seule possibilité est que  $B$  soit la composante connexe de 0 (le "ventre" de  $A(s^2)$ ). Par similitude,  $s^2A(s^2)$  est aussi dans le ventre de  $-sA(s^2)$ . Donc  $s^2A(s^2)$  est dans le ventre de  $A(s^2)$ , et en particulier  $s^2A(s^2) \cap A(s^2) = ?$ . Mais ceci est contredit par le lemme suivant.

**Lemme de coinçage.** Soit  $L$  un compact connexe de  $\mathbb{C}$ . On suppose que  $(L+1) \cap (L-1) \neq ?$ . Alors  $L$  intersecte  $(L+1) \cup (L-1)$ .

Si on applique le lemme de coinçage avec  $L = s^2A(s^2)$ , alors  $(L+1) \cup (L-1) = A(s^2)$ , et on obtient la contradiction cherchée, et le lemme a est prouvé.

*Preuve du lemme de coinçage.* Supposons tout d'abord que  $L$  soit connexe par arcs. Soient  $y_1 = \min_{\ell \in L} y(\ell)$  et  $y_2 = \max_{\ell \in L} y(\ell)$ . Alors  $B = \{x + iy : y_1 \leq y \leq y_2\}$  est la plus petite bande horizontale contenant  $L$ . Elle contient donc  $L$ ,  $L+1$  et  $L-1$ . Soient  $u$  et  $v$  des points de contact de  $L$  avec le bas et le haut de la bande. Alors  $u-1$  et  $v+1$  sont dans  $L' = (L+1) \cup (L-1)$ , qui est connexe par arcs. Soit donc  $\gamma'$  un chemin reliant  $u-1$  et  $v+1$  inclus dans  $L'$  (donc dans  $B$ ). De même, soit  $\gamma$  un chemin inclus dans  $L$  reliant  $u$  et  $v$ . Sur un dessin, on voit bien que  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont forcément un point d'intersection. Et donc  $L \cap L' \neq ?$ .



Dans le cas général ( $L$  connexe mais pas nécessairement connexe par arcs) on commence par approximer  $L$  par des  $\varepsilon$ -voisinages  $L_\varepsilon$ , qui sont connexes par arcs, et auxquels on peut donc appliquer le résultat précédent. Puis on fait  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant.

**Théorème.** Les ensembles  $M$  et  $M_1$  sont connexes.

*Preuve.* Supposons que  $M$  ne soit pas connexe. Alors il en est de même de son compactifié d'Alexandrov  $\widetilde{M} = M \sqcup \{\infty\}$ , puisque  $M$  contient tous les  $s$  pour  $|s|$  assez proche de 1. Soit donc  $M_0$  un ouvert compact non vide de  $\widetilde{M}$  ne contenant pas l'infini ; on a donc  $M_0 \subset M$ , avec  $M_0$  non vide, compact et ouvert dans  $M$ .

Considérons maintenant les ensembles suivants :

$$\Theta = \left\{ (b_n) \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}} : b_0 = 1 \right\},$$

$$\Theta_0 = \left\{ (b_n) \in \Theta : \exists s \in M_0 \text{ tq } \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = 0 \right\},$$

munis de la topologie induite par celle de  $\{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . L'ensemble  $\Theta$  est manifestement homéomorphe à un ensemble de Cantor. De la compacité de  $M_0$  on déduit facilement que  $\Theta_0$  est fermé dans  $\Theta$ . Ce qui est un peu moins évident, c'est que  $\Theta_0$  est également *ouvert* dans  $\Theta$ . Ceci est une conséquence de ce que  $M_0$  est ouvert dans  $D^*$ , et du fait que quand on perturbe un peu une fonction holomorphe qui n'est pas identiquement nulle, alors ses zéros bougent peu.

Or, on sait décrire les parties à la fois ouvertes et fermées de l'ensemble de Cantor. Il existe un entier  $n$  tel que la fonction

$$\begin{aligned} \chi : \quad \Theta &\longrightarrow \{\text{Vrai, Faux}\} \\ (b_n) &\longmapsto (b_n) \in \Theta_0 \end{aligned}$$

ne dépende que de  $b_1 \dots b_n$ . Supposons que  $n$  soit le plus petit entier possédant cette propriété (on posera  $n = 0$  si  $\Theta_0$  est la partie vide ou la partie pleine). Pour obtenir une contradiction, on va prouver qu'en fait  $\chi$  ne dépend pas de  $b_n$ .

Prouvons par exemple que si  $(b_0, \dots, b_{n-1}, 0, \dots)$  est dans  $\Theta_0$ , alors  $(b_0, \dots, b_{n-1}, 1, \dots)$  aussi. L'hypothèse

$$(b_0, \dots, b_{n-1}, 0, 0, \dots) \in \Theta_0$$

signifie qu'il existe  $s \in M_0$  tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k s^k = 0.$$

Multipliant cette égalité par  $1 + s^n$ , il vient

$$b_0 s^0 + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_0 s^n + \dots + b_{n-1} s^{2n-1} = 0,$$

ce qui montre que  $(b_0, \dots, b_{n-1}, 1, \dots)$  est également dans  $\Theta_0$ . Si on avait voulu changer  $b_n$  de 1 en 0 ou de 0 en  $-1$ , il aurait fallu multiplier par  $1 - s^n$ . Finalement

$$\chi(b_0, \dots, b_{n-1}, -1, \dots) = \chi(b_0, \dots, b_{n-1}, 0, \dots) = \chi(b_0, \dots, b_{n-1}, 1, \dots),$$

ce qui contredit la minimalité de  $n$ . La seule issue est que  $n = 0$ , or on ne peut pas avoir  $\Theta_0 = \Theta$ , car le point  $(1, 0, 0, \dots)$  n'est jamais dans  $\Theta_0$  (essayez de résoudre l'équation  $1 = 0$  !). Donc  $\Theta_0$  est vide, ce qui est absurde puisque  $M_0$  n'est pas vide. On a donc prouvé que  $M$  est connexe.

La démonstration est légèrement plus compliquée dans le cas de  $M_1$ . On choisit  $M_0$  comme plus haut, puis on pose

$$\begin{aligned} \Theta &= \left\{ (a_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} : a_0 = 1 \right\}, \\ \Theta_0 &= \left\{ (a_n) \in \Theta : \exists s \in M_0 \text{ tq } \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ici encore,  $\Theta_0$  est une partie ouverte et fermée de  $\Theta$ . Soit donc  $n$  entier minimal tel que la fonction caractéristique de  $\Theta_0$  ne dépende que de  $b_1 \dots b_n$ . Ici encore, on veut prouver que cette fonction caractéristique est indépendante de  $b_n$ .

Supposons donc que  $(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) \in \Theta_0$ , avec  $b_n = \pm 1$ , on veut prouver que  $(b_0, b_1, \dots, -b_n, \dots) \in \Theta_0$ . Mais, contrairement à ce qu'on avait fait plus haut, on ne va pas prendre  $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$  puisque seules les valeurs  $\pm 1$  sont autorisées. En fait, on va procéder de la manière suivante.

*Premier cas.* Si  $b_n = 1$ , on choisit  $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$  de manière à ce que la suite  $(b_k)$  soit  $n$ -périodique (ce qui est possible puisque  $b_0 = b_n$ ). Soit  $s \in M_0$  vérifiant  $\sum b_k s^k = 0$ . Alors

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k = \frac{1}{1-s^n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^k$$

et par conséquent

$$0 = \frac{1}{1+s^n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} b'_k s^k,$$

avec  $b'_k = \pm b_k$ , le signe étant positif ou négatif selon que la partie entière de  $k/n$  est paire ou impaire. En particulier,  $b'_n = -b_n = -1$ .

*Second cas.* Si  $b_n = -1$ , alors on choisit  $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$  afin que la suite  $(b_k)$  soit  $n$ -antipériodique (ici encore, c'est possible puisque  $b_n = -b_0$ ). Le même raisonnement que plus haut permet de trouver une suite  $(b'_k)$  commençant par les mêmes  $n$  termes que  $(b_k)$ , mais qui est  $n$ -périodique. Donc  $b'_n = 1$ .

Ceci prouve que  $\chi[\Theta_0]$  ne dépend pas de  $b_n$ . Ici encore, la seule manière d'éviter une contradiction est de dire que  $n = 0$ , donc que  $\Theta_0$  est vide ou confondu avec  $\Theta$ . La deuxième possibilité est exclue parce que la suite  $(1, 1, 1, \dots)$  n'est pas dans  $\Theta_0$  et la première aussi parce que  $M_0$  n'est pas vide. On obtient donc une contradiction, ce qui prouve que  $M_1$  est connexe.

Le théorème qui vient d'être démontré admet des généralisations en dimension supérieure : en général, si on a sur  $\mathbb{C}^d$  un ACIFS constitué de  $n$  fonctions, dépendant analytiquement de  $(n-1)d$  paramètres, alors le lieu de connexité est connexe (quitte à ajouter un point à l'infini). Nous allons donner les énoncés précis au paragraphe suivant.

## 2) Le cas général

Donnons-nous deux entiers  $n$  et  $d$  au moins égaux à un. Pour abrégé on posera  $\text{Ca} = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ . Il s'avère que dans le cas d'un HIFS constitué de  $n$  fonctions holomorphes de  $\mathbb{C}^d$  dans lui-même, dépendant analytiquement d'un paramètre  $s$ , on a des résultats de connexité analogues à celui du paragraphe précédent, à condition que l'espace des paramètres soit de dimension  $(n-1)d$ . Pour des raisons de commodité, nous énoncerons ces résultats (théorèmes 1 et 2) en fonction de  $\varphi$  et non en fonction des  $f_i$ .

**Théorème 1.** *On suppose qu'on a un ouvert  $U$  de  $C^{(n-1)d}$  et une application*

$$\begin{aligned} \varphi : U \times \text{Ca} &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (i, s) &\longmapsto \varphi_s(i) \end{aligned}$$

*vérifiant les propriétés suivantes :*

- (H<sub>1</sub>)  $\forall a \in \{1 \dots n\} \quad \forall i, j \in \text{Ca} \quad \forall s \in U \quad \varphi_s(i) = \varphi_s(j) \implies \varphi_s(ai) = \varphi_s(aj)$ ,
- (H<sub>2</sub>) *La fonction  $\varphi$  est continue,*

(H<sub>3</sub>) Pour tout  $i \in \mathbb{C}a$ , l'application  $s \mapsto \varphi_s(i)$  est holomorphe,

(H<sub>4</sub>) Pour tout  $s \in U$ , l'application  $\varphi_s$  est non constante.

Définissons à l'aide de  $\varphi$  un graphe de recouvrement  $G(s)$  et posons

$$\mathcal{C} = \{s \in U : G(s) \text{ est connexe}\}.$$

Alors  $\mathcal{C}$  est fermé dans  $U$  et n'a aucune composante connexe compacte.

Un cas particulier de ce résultat est le théorème démontré au paragraphe précédent. On prend  $U = D$ ,  $f_{1,s}(z) = sz + 1$  et  $f_{2,s}(z) = sz - 1$ . Alors la fonction  $\varphi_s$  vérifie toutes les hypothèses du théorème et donc  $M$  n'a pas de composante connexe compacte (ou, ce qui revient au même, son compactifié d'Alexandrov est connexe). Comme on sait de plus que  $|s| \geq \sqrt{2}/2$  entraîne  $s \in M$ , on en déduit que  $M$  est connexe.

*Preuve.* Soit  $T$  un graphe sur  $\{1 \dots n\}$ . Notons  $\mathcal{L}(T)$  le lieu des  $s$  pour lesquels  $G(s) \supset T$ . Manifestement, c'est un fermé. Le lieu de connexité peut s'écrire  $\mathcal{C} = \bigcup_T \mathcal{L}(T)$ , l'union étant prise sur tous les graphes connexes. Mais comme l'application  $T \mapsto \mathcal{L}(T)$  est décroissante, on peut se borner à prendre l'union sur les  $T$  qui sont connexes et minimaux pour l'inclusion, c'est-à-dire les *arbres*. On a donc

$$\mathcal{C} = \bigcup_{T \text{ arbre}} \mathcal{L}(T).$$

On va en fait prouver que sous les hypothèses du théorème 1, le lieu  $\mathcal{L}(T)$  n'a aucune composante connexe compacte, et ce quel que soit l'arbre  $T$ . Soit donc  $T$  un arbre sur  $\{1 \dots n\}$ . Il a  $n$  sommets, donc  $n - 1$  arête(s). Pour la démonstration, nous aurons besoin d'un objet que nous appellerons un *no-graphe*, c'est-à-dire un graphe dont les arêtes sont numérotées et orientées : s'il y a  $p$  arêtes, il sera représenté par un  $2p$ -uplet  $(u_1, v_1, \dots, u_p, v_p)$ , où les  $(u_k, v_k)$  sont les arêtes du graphe.

**Notation.** Soit  $G = (u_1, v_1 \dots u_p, v_p)$  un no-graphe ayant  $p$  arêtes, et  $Y$  une partie de  $\mathcal{L}(G)$  ; on note

$$H(Y, G) = \{(k_1, l_1, \dots, k_p, l_p) \in \mathbb{C}a^{2p} \mid \exists s \in Y \forall i \in [1, p] \quad \varphi_s(u_i k_i) = \varphi_s(v_i l_i)\}.$$

Un résultat facile, laissé au lecteur, est que  $H(Y, G)$  est fermé dans  $\mathbb{C}a^{2p}$  si  $Y$  est compact. Le résultat suivant est moins facile.

**Lemme 1.** Si  $\varphi$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{C}^d$  et que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^{dp}$ , et si  $Y$  est compact et ouvert dans  $\mathcal{L}(G)$ , alors  $H(Y, G)$  est ouvert dans  $\mathbb{C}a^{2p}$ .

*Preuve.* Soit  $M = (k_1, l_1, \dots, k_p, l_p)$  un point de  $H(Y, G)$ . Comme  $Y$  est ouvert dans  $\mathcal{L}(G)$ , il existe  $\Upsilon$  ouvert de  $U$  tel que  $Y = \Upsilon \cap \mathcal{L}(G)$ . Donc

$$H(Y, G) = \{(k_1 \dots l_p) \in \mathbb{C}a^{2p} : \exists s \in \Upsilon \forall i \in [1, p] \quad \varphi_s(u_i k_i) = \varphi_s(v_i l_i)\}.$$

Soit maintenant  $\Lambda(G, M) = \{s \in \Upsilon : \forall i \in [1, p] \quad \varphi_s(u_i k_i) = \varphi_s(v_i l_i)\}$ . C'est manifestement un ensemble analytique puisque  $\varphi_s$  est holomorphe en  $s$ , et en particulier il est fermé. Mais

$\Lambda(G, M) \subset Y$  et  $Y$  est compact, donc  $\Lambda(G, M)$  est compact. Et comme il est analytique, il est fini. C'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} \varphi_s(u_1 k_1) = \varphi_s(v_1 l_1) \\ \vdots \\ \varphi_s(u_p k_p) = \varphi_s(v_p l_p) \end{cases}$$

considéré comme un système de  $dp$  équations à  $dp$  inconnues, n'a que des solutions isolées dans  $\Upsilon$ , donc ces solutions bougent peu si on perturbe légèrement le système. Si  $s_0 \in \Lambda(G, M)$ , alors pour tout  $M'$  suffisamment voisin de  $M$ , il existera  $s \in \Lambda(G, M')$  proche de  $s_0$ . Donc  $H(Y, G)$  est ouvert et le lemme est prouvé.

**Lemme 2.** *Soit  $G$  un no-graphe et  $Y \subset \mathcal{L}(G)$ . Si  $H(Y, G)$  est ouvert et fermé dans  $\text{Ca}^{2p}$  et si  $G$  est connexe, alors ou bien  $H(Y, G) = ?$ , ou bien  $H(Y, G) = \text{Ca}^{2p}$ .*

*Preuve.* Supposons que  $H(Y, G)$  ne soit ni la partie pleine, ni la partie vide de  $\text{Ca}^{2p}$  et soit  $n \geq 1$  le plus petit entier tel que la fonction caractéristique

$$\chi[H(Y, G)] : (c_1, d_1, \dots, c_p, d_p) \mapsto \{\text{Vrai, Faux}\}$$

ne dépende que des  $n$  premiers chiffres de  $c_1 \dots d_p$ . Comme plus haut, on veut prouver que  $n$  n'est pas minimal, c'est-à-dire que la fonction en question ne dépend pas des  $n$ -ièmes chiffres de  $c_1 \dots d_p$  (i.e. les chiffres dont l'indice est  $n - 1$ , puisque la numérotation commence à partir de zéro). Ecrivons

$$c_t = \underbrace{c_t^0, \dots, c_t^{n-2}}_{\alpha_t : n-1 \text{ chiffres}}, \underbrace{c_t^{n-1}}_{\beta_t}, \underbrace{c_t^n, c_t^{n+1}, \dots}_{\gamma_t : \infty \text{ chiffres}}$$

et de même  $d_t = \alpha'_t \beta'_t \gamma'_t$ . On sait que la proposition  $(c_1 \dots d_p) \in H(Y, G)$  ne dépend pas des  $\gamma_t$  et des  $\gamma'_t$ . Maintenant il faut montrer que ça ne dépend pas non plus des  $\beta_t$  et des  $\beta'_t$ . Fixons donc les  $\alpha_t$ ,  $\alpha'_t$ ,  $\beta_t$  et  $\beta'_t$  tels que  $(c_1 \dots d_p) \in H(Y, G)$ . On va modifier un seul des  $\beta_t$ , par exemple  $\beta_1$  (la démonstration est tout à fait la même pour un  $\beta'_t$ ). On veut modifier  $\beta_1 = a$  en  $b$ . Comme  $G$  est connexe, on peut se borner au cas où  $a$  et  $b$  sont reliés par une arête. Mais, attention, ici on ne peut plus supposer que  $(a, b)$  est la première arête de  $G = (u_1, v_1, \dots, u_p, v_p)$ , et l'orientation a une importance. Il y a deux possibilités.

*Premier cas.* Il existe  $k$  tel que  $u_k = a$  et  $v_k = b$ . Alors on peut choisir les  $\gamma_t$  et les  $\gamma'_t$  de manière à ce que  $\gamma_1 = c_k$ .

*Second cas.* Il existe  $k$  tel que  $v_k = a$  et  $u_k = b$ . Alors on peut choisir les  $\gamma_t$  et les  $\gamma'_t$  de manière à ce que  $\gamma_1 = d_k$ .

Ces résultats ne sont pas difficiles (encore le théorème du point fixe !) et sont laissés au lecteur. Choisissons donc de tels  $\gamma_t$  et  $\gamma'_t$ . Alors il existe  $s \in Y$  tel que

$$\forall i \in [1, p] \quad \varphi_s(u_i c_i) = \varphi_s(v_i d_i).$$

Maintenant, modifions  $\beta_1 = a$  et  $\gamma_1$  pour les remplacer par

- \*  $b$  et  $d_k$  dans le premier cas (donc  $c_1 = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_1 a c_k$  devient  $\alpha_1 b d_k$ ), et
- \*  $b$  et  $c_k$  dans le second cas (ainsi  $c_1 = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_1 a d_k$  devient  $\alpha_1 b c_k$ )



dans le système ci-dessus. En fait, on a simplement modifié le premier membre de la première équation. Cependant,  $s$  est toujours solution de cette équation (et donc du système). En effet, la valeur du premier membre n'a pas bougé. Dans le "premier cas", on a

$$\varphi_s(u_1 c_1) = \varphi_s(u_1 \alpha_1 a c_k) = \varphi_s(u_1 \alpha_1 u_k c_k).$$

Or  $\varphi_s(u_k c_k) = \varphi_s(v_k d_k)$ , et de la propriété ( $H_1$ ) on déduit

$$\varphi_s(u_1 \alpha_1 u_k c_k) = \varphi_s(u_1 \alpha_1 v_k d_k) = \varphi_s(u_1 \alpha_1 b d_k).$$

La démonstration dans le "second cas" est identique. Le système de  $p$  équations ci-dessus est donc encore vérifié, ce qui prouve qu'on peut modifier les  $\beta_t$  et  $\beta'_t$  tout en restant dans  $H(Y, G)$ . Donc  $n$  n'est pas minimal, et ceci prouve le lemme 2.

Avec les lemmes 1 et 2 il est facile de prouver le théorème 1. En effet, si  $\mathcal{L}(T)$  avait une composante connexe compacte, alors il existerait  $Y \subset \mathcal{L}(T)$  non vide, compact et ouvert dans  $\mathcal{L}(T)$ . Comme  $T$  a  $n - 1$  arêtes, on peut appliquer le lemme 1 avec  $p = n - 1$ . Ce qui prouve que  $H(Y, G)$  est ouvert. Comme de plus il est fermé, et comme  $T$  est connexe, on peut appliquer le lemme 2, et on en déduit  $H(Y, G) = ?$  ou bien  $H(Y, G) = \text{Ca}^{2p}$ . La première possibilité est à exclure car  $Y$  est non vide. Donc  $H(Y, G) = \text{Ca}^{2p}$ . Choisissons donc

$$\begin{aligned} c_1 &= (u_1, u_1, \dots) \\ d_1 &= (v_1, v_1, \dots) \\ &\vdots \\ c_p &= (u_p, u_p, \dots) \\ d_p &= (v_p, v_p, \dots) \end{aligned}$$

Alors  $(c_1 \dots d_p) \in H(Y, G)$ , donc il existe  $s \in Y \subset U$  tel que

$$\varphi_s(1, 1, \dots) = \varphi_s(2, 2, \dots) = \dots = \varphi_s(n, n, \dots).$$

Donc, pour cette valeur de  $s$ , la fonction  $\varphi_s$  est constante (exercice), ce qui est contraire à l'hypothèse ( $H_4$ ). Cela donne la contradiction attendue et termine la preuve du théorème 1.

Il est à noter que dans l'énoncé du théorème 1, l'espace  $U$  des paramètres ne peut pas être n'importe quelle variété complexe de dimension  $(n - 1)d$  : il faut que ce soit un ouvert de  $\mathbb{C}^{(n-1)d}$ . Ceci est utilisé de manière essentielle dans la démonstration, quand on affirme qu'un sous-ensemble algébrique compact de  $U$  est fini. C'est évidemment faux si  $U$  est compact, c'est également faux si on peut écrire  $U$  comme produit de deux variétés complexes dont l'une est compacte (un espace projectif, par exemple). On peut toutefois énoncer une variante du théorème 1, dans le cas où  $U$  est le produit d'un ouvert  $U_0$  de  $\mathbb{C}^a$  et de  $\mathbb{C}P^b$ , avec  $a + b = (n - 1)d$ .

**Théorème 2.** *On suppose que  $U = U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\})$ , où  $U_0$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^a$ , avec  $a + b = (n - 1)d$ . On suppose que les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  du théorème 1 sont vérifiées, ainsi que l'hypothèse*

( $H_5$ ) *Si on écrit  $\varphi$  sous la forme*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \text{Ca} \times U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (i, s_0, v) &\longmapsto \Gamma_i(s_0).v, \end{aligned}$$

alors  $\Gamma_i(s_0) \in L(\mathbb{C}^{b+1}, \mathbb{C}^d)$  quels que soient  $i$  et  $s_0$ .

Dans ce cas le lieu de connexité  $\mathcal{C}$  est invariant par les transformations de  $U$  du type  $h_\lambda : (s_0, v) \mapsto (s_0, \lambda v)$  où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , donc le "véritable" lieu de connexité est la projection  $\mathcal{C}' = \pi_1(\mathcal{C})$ , où  $\pi_1$  est la projection de  $U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\})$  sur  $U_0 \times \mathbb{C}P^b$ . Alors  $\mathcal{C}'$  est fermé dans  $U_0 \times \mathbb{C}P^b$  et n'a aucune composante connexe compacte.

*Preuve du théorème 2.* Considérons d'abord les projections naturelles

$$U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\}) \xrightarrow{\pi_1} U_0 \times \mathbb{C}P^b \xrightarrow{\pi_2} U_0 \quad \text{et} \quad \pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1.$$

Ici encore, on va prendre un arbre  $T$  sur  $\{1 \dots n\}$  et montrer que  $\pi_1(\mathcal{L}(T))$  n'a pas de composante connexe compacte. Le plan de la démonstration est le même que pour le théorème 1. Cependant le lemme 1 doit être remplacé par le suivant :

**Lemme 3.** *Si  $\varphi$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{C}^d$ , si  $G$  est un no-graphe à  $p$  arêtes, si  $Y$  est un ouvert compact de  $\pi_1(\mathcal{L}(G))$ , et si  $U = U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\})$  avec  $U_0$  ouvert de  $\mathbb{C}^a$  et  $a + b = dp$ , alors  $H(\pi_1^{-1}(Y), G)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}a^{2p}$ .*

*Preuve du lemme 3.* Comme  $Y$  est un ouvert de  $\pi_1(\mathcal{L}(G))$ , il existe  $\Upsilon$  ouvert de  $U_0 \times \mathbb{C}P^d$  tel que  $Y = \Upsilon \cap \pi_1(\mathcal{L}(G))$ . Soit  $M = (k_1, l_1 \dots k_p, l_p)$  un point quelconque de  $H(\pi_1^{-1}(Y), G)$ . Soit

$$\Lambda(G, M) = \{(s_0, v) \in \pi_1^{-1}(\Upsilon) \mid \forall i \in \{1 \dots n\} \quad \varphi_s(u_i k_i) = \varphi_s(v_i l_i)\},$$

et posons  $\Lambda_1(G, M) = \pi_1(\Lambda(G, M))$  et  $\Lambda_3(G, M) = \pi_3(\Lambda(G, M))$ . Il est clair que  $\Lambda(G, M)$ ,  $\Lambda_1(G, M)$  et  $\Lambda_3(G, M)$  sont des sous-ensembles analytiques de  $\pi_1^{-1}(\Upsilon)$ ,  $\Upsilon$  et  $\pi_2(\Upsilon)$  respectivement. En particulier,  $\Lambda_3(G, M)$  est un sous-ensemble analytique et compact (puisque contenu dans  $\pi_2(Y)$ ) d'un ouvert de  $\mathbb{C}^a$ , donc fini. Soit  $\alpha_0$  l'un de ses éléments.

Notons que le système

$$\varphi_s(u_i k_i) = \varphi_s(v_i l_i), \quad i = 1, \dots, p$$

est linéaire en  $v$  ; c'est un système à  $b+1$  inconnues complexes et  $dp$  équations. Réécrivons-le sous la forme

$$B_M(s_0).v = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

où  $B_M \in L(\mathbb{C}^{b+1}, \mathbb{C}^{dp})$ . Notons  $ANI(u, v)$  l'ensemble des applications linéaires non injectives de  $\mathbb{C}^u$  dans  $\mathbb{C}^v$ , et

$$\begin{aligned} NIL(G, M) &= \{s_0 \in \pi_2(\Upsilon) : B_M(s_0) \in ANI(b+1, dp)\} \\ &= \{s_0 \in \pi_2(\Upsilon) : \exists v \in \mathbb{C}^{b+1} - \{0\} \text{ tq } B_M(s_0).v = 0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\Lambda_3(G, M) \subset NIL(G, M)$ .

**Lemme 4.** *Le point  $\alpha_0$  est isolé dans  $NIL(G, M)$ .*

*Preuve du lemme 4.* Donnons-nous une norme quelconque  $\| \cdot \|$  sur  $\mathbb{C}^{b+1}$ . Supposons qu'il existe une suite  $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$  avec  $\alpha_n \in NIL(G, M)$ . Alors il existe des vecteurs  $v_n$ , qu'on peut supposer de norme 1, tels que  $B_M(\alpha_n).v_n = 0$ . Alors si  $v$  est une valeur d'adhérence quelconque de  $(v_n)$ , on aura  $B_M(\alpha_0).v = 0$ . Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la

suite  $s_n = \pi_1(\alpha_n, v_n)$  est inclus dans  $\pi_1[\{\alpha_0\} \times (\text{Ker } B_M(\alpha_0) - \{0\})]$ , qui est un compact inclus dans  $\Upsilon$ . En effet, l'ensemble

$$\{v : \pi_1(\alpha_0, v) \in Y\} = \{v : \pi_1(\alpha_0, v) \in \Upsilon\}$$

est non vide, ouvert et fermé dans  $\text{Ker } B_M(\alpha_0) - \{0\}$ , il est donc confondu avec  $\text{Ker } B_M(\alpha_0) - \{0\}$ . Donc  $s_n \in \Upsilon$  pour  $n$  assez grand, donc  $\alpha_n \in \Lambda_3(G, M)$ , ce qui contredit le fait que  $\alpha_0$  est isolé dans  $\Lambda_3(G, M)$ , et prouve le lemme 4.

**Lemme 5.** *Soit  $(M_n)$  une suite de  $\text{Ca}^{2p}$  tendant vers  $M$ . Alors il existe une suite  $(\alpha_n)$  de  $U_0$  tendant vers  $\alpha_0$  telle que pour  $n$  assez grand, on ait  $\alpha_n \in \text{NIL}(G, M_n)$ .*

*Preuve du lemme 5.* Le résultat est une conséquence des deux points suivants : d'abord, le point  $\alpha_0$  est une solution isolée de l'équation  $B_M(\alpha) \in \text{ANI}(b+1, dp)$ . D'autre part, l'ensemble  $\text{ANI}(b+1, dp)$  est un sous-ensemble algébrique de codimension  $dp - (b+1) + 1 = a$ , ce qui est égal à la dimension de l'espace dans lequel se promène  $\alpha$ . On sait que, dans ces conditions, les solutions de l'équation bougent peu quand on perturbe un peu l'équation ; ici, on remplace  $B_M$  par  $B_{M_n}$ , ce qui peut être considéré comme une petite perturbation quand  $n$  est grand. D'où le lemme.

**Lemme 6.** *Soit  $M_n \rightarrow M$ . Alors il existe une suite  $(\alpha_n, v_n) \in U_0 \times (\mathbb{C}^{b+1} - \{0\})$  telle que pour  $n$  assez grand, on ait  $B_{M_n}(\alpha_n).v_n = 0$  et  $\pi_1(\alpha_n, v_n) \in \Upsilon$ . Donc  $H(\pi_1^{-1}(Y), G)$  est ouvert.*

*Preuve du lemme 6.* On a déjà la suite  $\alpha_n \in \text{NIL}(G, M_n)$  d'après le lemme 5. Soit donc  $v_n$  de norme 1 tel que  $B_{M_n}(\alpha_n).v_n = 0$ . On a vu plus haut que cela entraînait  $\pi_1(\alpha_n, v_n) \in \Upsilon$  pour  $n$  grand, d'où le résultat.

Ceci termine la démonstration du lemme 3. En combinant ce résultat avec le lemme 2, on obtient le théorème 2.

*Exemples.* Un exemple simple d'HIFS sur  $\mathbb{C}^d$  est le suivant : on se donne  $n$  applications affines

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \\ v & \mapsto & A_k(s).v + V_k \end{array} \quad k = 0 \dots n-1,$$

où les  $A_k(s)$  sont des opérateurs linéaires contractants pour une norme donnée, dépendant d'un paramètre complexe  $s$  décrivant un ouvert  $U_0$  de  $\mathbb{C}$ . Quitte à conjuguer l'HIFS par une translation, on peut imposer une condition sur les vecteurs  $V_k$ , par exemple  $V_0 = 0$ . Dans ce cas, il est naturel d'exclure le cas  $V_1 = \dots = V_{n-1} = 0$ , qui est l'unique cas où la fonction  $\varphi_s$  est constante, i.e. l'attracteur est réduit à un point. L'espace des paramètres est donc  $U = U_0 \times (\mathbb{C}^{(n-1)d} - \{0\})$ , et on est tout à fait dans le cadre d'application du théorème 2, avec  $a = 1$  et  $b = (n-1)d - 1$ , et on aboutit à la conclusion que le lieu de connexité  $\mathcal{C}'$  n'a pas de composante connexe compacte. Si de plus

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\det A_k| > 1$$

où  $\infty$  est le point à l'infini de  $\tilde{U}_0$ , alors on peut prouver, par un argument de volume analogue à celui donné dans [Ba,Ha], que  $(s, V_1, \dots, V_{n-1}) \in \mathcal{C}$  pour  $s$  assez proche de

l'infini. Par conséquent,  $C'$  n'a qu'une seule composante connexe non compacte, et donc  $C'$  est connexe.

Un exemple encore plus particulier est le suivant : on prend  $A_k(s) = s \cdot \text{Id}$  et  $U_0 = D$ . Manifestement l'hypothèse ci-dessus est vérifiée, donc le lieu de connexité est connexe.

Il est à noter que dans les théorèmes 1 et 2, l'espace des paramètres est de dimension  $(n-1)d$ . Si l'espace des paramètres est de dimension plus grande, ce n'est pas grave, il suffit de le découper en tranches analytiques de dimension  $(n-1)d$  et d'appliquer le théorème à chacune des tranches. Par exemple, pour  $n=2$ , on considère les homothéties  $f_1$  et  $f_2$  de centres 0 et 1 (par exemple) et de rapports  $s, t \in D$  ; alors le lieu de connexité est un fermé connexe de  $D^2$  parce que toutes les sections  $s = \text{Cste}$  et  $t = \text{Cste}$  du lieu de connexité sont connexes.

En revanche, si l'espace des paramètres est de dimension inférieure à  $(n-1)d$ , les théorèmes 1 et 2 ne s'appliquent plus et il faut faire des hypothèses supplémentaires. Ainsi, les théorèmes 1 et 2 admettent des analogues avec des espaces de paramètres de dimension plus petite si l'IFS présente des "symétries" ; encore faut-il donner un sens à ce mot.

**Définition.** Soit  $\varsigma$  une application

$$\begin{aligned} \varsigma : \quad \text{Ca}^2 &\longrightarrow \text{Ca}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (z, t) \end{aligned}$$

telle que les  $n$  premiers chiffres de  $z$  et  $t$  ne dépendent que des  $n$  premiers chiffres de  $x$  et  $y$ . On dira que  $\sigma$  est une semi-symétrie de l'IFS si

$$\forall x, y, z, t \in \text{Ca} \quad \varsigma(x, y) = (z, t) \text{ et } x \mathcal{R} y \implies z \mathcal{R} t.$$

*Exemple.* Soit  $\sigma \in \mathbf{S}_n$  une permutation telle que  $(f_1 \dots f_n)$  soit conjugué à  $(f_{\sigma_1} \dots f_{\sigma_n})$ . Alors  $\sigma$  définit de manière naturelle une bijection de  $\text{Ca}^2$  dans lui-même, que nous noterons  $\underline{\sigma}$  :

$$\underline{\sigma} \left[ (x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots) \right] = \left[ (\sigma(x_0), \sigma(x_1), \dots), (\sigma(y_0), \sigma(y_1), \dots) \right]$$

Il est clair que  $\underline{\sigma}$  est une semi-symétrie.

De manière générale, l'ensemble des semi-symétries, muni de la composition, est un monoïde unitaire, que nous noterons Mss (monoïde semi-symétrique). Si  $\varsigma : (x, y) \mapsto (z, t)$  est un élément de Mss, alors les premiers chiffres de  $z$  et  $t$  ne dépendent que des premiers chiffres de  $x$  et  $y$  ; ceci définit une application  $[\varsigma] : (x_0, y_0) \mapsto (z_0, t_0)$ . Manifestement, l'application  $\varsigma \mapsto [\varsigma]$  est un morphisme du monoïde Mss dans celui des endofonctions de  $\{1 \dots n\}^2$ . Par conséquent, Mss agit sur les graphes orientés de  $\{1 \dots n\}$ . D'autre part, il est clair que l'involution  $\varpi : (x, y) \mapsto (y, x)$  est une semi-symétrie, donc si  $\varsigma \in \text{Mss}$ , alors  $\varpi \circ \varsigma \circ \varpi \in \text{Mss}$ .

Soit  $G_0$  un graphe quelconque (orienté) sur  $\{1 \dots n\}$ , et considérons le graphe  $\langle G_0 \rangle$  défin par

$$(z_0, t_0) \in \langle G_0 \rangle \iff \exists (x_0, y_0) \in G_0 \exists \varsigma \in \text{Mss} \quad (z_0, t_0) = [\varsigma] (x_0, y_0).$$

Comme  $\varpi \in \text{Mss}$ , on voit que  $\langle G_0 \rangle$  est un graphe symétrique (i.e. non orienté) et qu'il ne dépend pas de l'orientation des arêtes de  $G$ . On peut donc considérer l'application  $G_0 \mapsto \langle G_0 \rangle$  comme endofonction sur l'ensemble des graphes non orientés de  $\{1 \dots n\}$ . Il est clair que cette application est croissante, que  $G_0 \in \langle G_0 \rangle$ , et si  $G$  est le graphe de recouvrement alors  $G = \langle G \rangle$ .

**Définition.** Un graphe non orienté  $G_0$  sur  $\{1 \dots n\}$  sera dit semi-connecté si  $\langle G_0 \rangle$  est connexe.

**Proposition.** Si  $G_0$  est semi-connecté, alors  $\mathcal{L}(G_0) \in \mathcal{C}$ .

La démonstration est simple. Nous sommes maintenant en mesure de donner une variante du théorème 1 tenant compte des semi-symétries :

**Théorème 3.** Soit  $p > 0$ . On suppose que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^{dp}$ , et que la fonction  $\varphi$  vérifie les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  et  $(H_4)$  du théorème 1. Si  $T$  est un graphe semi-connecté ayant  $p$  arêtes, alors  $\mathcal{L}(T)$  n'a pas de composante connexe compacte.

**Corollaire.** Si de plus il existe des graphes  $T_1 \dots T_m$  semi-connectés à  $p$  arêtes tels que  $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{L}(T)$ , alors  $\mathcal{C}$  n'a pas de composante connexe compacte.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1. On pourrait de même écrire une variante du théorème 2 ; nous laissons au lecteur le soin de le faire.

### 3) Retour à un cas particulier

On prend  $E = \mathbb{C}$ , on se donne un compact  $I$  de  $\mathbb{C}$ , et pour tout  $s \in D$  on considère l'HIFS  $(E, f_i)$ , où  $f_i$  est la similitude  $z \mapsto sz + i$ . Par la suite, on supposera toujours que  $I$  contient au moins deux éléments. On notera  $\mathcal{C}(I)$  l'ensemble des  $s \in D$  pour lesquels l'attracteur  $A_I(s)$  est connexe.

**Proposition.** Si  $\#I = 2$ , alors  $\mathcal{C}[I] = \mathcal{C}[\{-1, +1\}]$ .

En effet, l'HIFS  $(\mathbb{C}, sz + i_1, sz + i_2)$  est toujours affinement conjugué à  $(\mathbb{C}, sz + 1, sz - 1)$ , si  $i_1 \neq i_2$ . On va reprendre la notation que nous avons utilisé plus haut :  $M = \mathcal{C}[\{-1, +1\}]$ .

**Proposition.** On a toujours  $\mathcal{C}[I] \supset M$ .

Donnons-nous  $s \in M$ . Alors j'affirme que si  $i_1, i_2 \in I$ , alors  $f_{i_1}(A) \cap f_{i_2}(A) \neq \emptyset$ , et que  $A$  est donc connexe d'après le théorème énoncé au paragraphe III.1.a. En effet, on a

$$f_{i_1}(A_I(s)) \cap f_{i_2}(A_I(s)) \supset f_{i_1}(A_{i_1, i_2}(s)) \cap f_{i_2}(A_{i_1, i_2}(s)) \neq \emptyset$$

puisque  $s \in \mathcal{C}\{i_1, i_2\} = M$ .

Il est clair que si  $\sigma$  est une isométrie positive laissant  $I$  globalement invariant, alors  $\underline{\sigma}$  est une semi-symétrie. Par exemple, si  $I$  est un carré (quatre points), alors  $\mathcal{C}(A)$  est connexe. En effet, soit  $I = \{S, T, U, V\}$  le carré ; alors  $\mathcal{C} = \mathcal{L}(G_0)$ , où  $G_0$  est le graphe avec une arête entre  $S$  et  $T$  (par exemple).

En effet, comme  $G_0$  est semi-connecté on a  $\mathcal{C} \supset \mathcal{L}(G_0)$ , inversement si  $s \in \mathcal{C}$ , alors le graphe de recouvrement  $G$  est connexe, donc contient une arête entre deux sommets adjacents du carré, et comme il est invariant par  $\underline{\sigma}$ , il contient une arête entre  $S$  et  $T$ , donc  $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(G_0)$ .

Comme  $G_0$  est semi-connecté, le théorème 3 s'applique, et comme  $\mathcal{C}(I)$  n'a qu'une composante connexe non compacte, il est connexe.

Mais il existe un autre type de semi-symétrie. Supposons que  $I$  contienne quatre points  $a, b, c, d$  avec  $a \neq b, c \neq d$  et  $a - b = c - d$ . Considérons l'application  $\varsigma : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par

$$\varsigma \left[ (x_0, x_1, x_2, \dots), (y_0, y_1, y_2, \dots) \right] = \left[ (x'_0, x_1, x_2, \dots), (y'_0, y_1, y_2, \dots) \right]$$

avec  $(x'_0, y'_0) = \begin{cases} (x_0, y_0) & \text{si } (x_0, y_0) \neq (a, b), \\ (c, d) & \text{si } (x_0, y_0) = (a, b). \end{cases}$

Il est facile de voir que  $\varsigma$  est une semi-symétrie ; cela repose de manière essentielle sur le fait que les fonctions de l'IFS ont toutes la même partie linéaire.

*Exemple.* Supposons que  $I = \{0, 1, 2, 3\}$ . Soit  $G_0$  le graphe ayant une unique arête entre 0 et 1. Alors  $G_0$  est semi-connexe. En effet, l'effet des semi-syméties du type ci-dessus est de translater les arêtes. Donc  $\langle G_0 \rangle$  contient une arête entre 1 et 2, ainsi qu'une arête entre 2 et 3, sans oublier l'arête de départ entre 0 et 1, donc  $\langle G_0 \rangle$  est connexe.

De manière générale, pour  $I$  quelconque, si  $G_0$  contient l'arête  $(a, b)$ , alors  $\langle G_0 \rangle$  contiendra toutes les arêtes de la forme  $(a + x, b + x)$ , avec  $x \in \mathbb{C}, a + x, b + x \in I$ . Ainsi, si l'ensemble  $I$  contient beaucoup de parallélogrammes (éventuellement aplatis), on pourra en général trouver des graphes  $G_i$  semi-connexes et n'ayant qu'une seule arête. On aura donc  $\bigcup_i \mathcal{L}(G_i) \subset \mathcal{C}$ . Pour prouver l'inclusion inverse, il faut utiliser d'autres méthodes. Nous allons commencer par énoncer un lemme qui est une généralisation du lemme de coinçage donné plus haut.

**Lemme d'entrecroisement.** *Soit  $K$  un compact connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que les segments  $[ab]$  et  $[cd]$  se coupent. On suppose que  $(K + a) \cup (K + b)$  et  $(K + c) \cup (K + d)$  sont connexes. Alors  $(K + a) \cup (K + b) \cup (K + c) \cup (K + d)$  est connexe.*

En d'autres termes, si  $[ab] \cap [cd] \neq \emptyset$ , et si  $(K + a) \cap (K + b) \neq \emptyset$  et  $(K + c) \cap (K + d) \neq \emptyset$ , alors l'une au moins des intersections suivantes

$$\begin{aligned} (K + a) &\cap (K + c) \\ (K + a) &\cap (K + d) \\ (K + b) &\cap (K + c) \\ (K + b) &\cap (K + d) \end{aligned}$$

est non vide.

*Preuve.* Si les segments  $[ab]$  et  $[cd]$  sont parallèles, alors le résultat est une conséquence du lemme de coinçage.<sup>11</sup> Supposons donc que  $[ab]$  et  $[cd]$  soient sécants (on dira que les segments sont sécants même si l'un d'eux est réduit à un point). Choisissons donc des axes de coordonnées tels que le point d'intersection (unique, donc) soit l'origine  $O$ , que  $[ab]$  soit porté par l'axe  $x'x$  et  $[cd]$  par l'axe  $y'y$ . Comme pour le lemme de coinçage, on peut supposer, quitte à remplacer  $K$  par un  $\varepsilon$ -voisinage, que  $K$  est connexe par arcs. Ecrivons

<sup>11</sup> Sous une forme un peu plus générale que celle donnée plus haut : si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}$  et  $a, b, c \in \mathbb{C}$  sont tels que  $c \in [a, b]$ , et si  $K + a$  coupe  $K + b$ , alors  $K + c$  coupe  $K + a$  ou  $K + b$ .

les coordonnées des points :

$$\begin{cases} a = (-\alpha, 0) \\ b = (\beta, 0) \\ c = (0, -\gamma) \\ d = (0, \delta) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ positifs.}$$

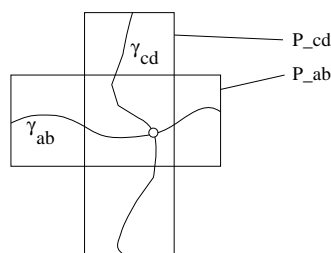
Et posons  $x_1 = \min_K x$ ,  $x_2 = \max_K x$ ,  $y_1 = \min_K y$  et  $y_2 = \max_K y$ . Alors  $\{x + iy : x_1 \leq x \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y \leq y_2\}$  est le plus petit pavé contenant  $K$ . En particulier,  $K$  intersecte les quatre côtés du pavé. Maintenant, considérons les pavés

$$P_{ab} = \{x + iy : x_1 - \alpha \leq x \leq x_2 + \beta, y_1 \leq y \leq y_2\},$$

$$P_{cd} = \{x + iy : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 - \gamma \leq y \leq y_2 + \delta\}.$$

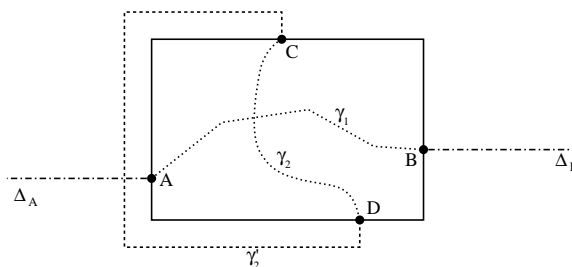
Alors  $(K + a) \cup (K + b)$  est un compact connexe par arcs contenu dans le pavé  $P_{ab}$  et qui en intersecte les quatre côtés. De même,  $(K + c) \cup (K + d)$  est contenu dans  $P_{cd}$  et en intersecte les quatre côtés.

Choisissons donc deux chemins  $\gamma_{ab}$  et  $\gamma_{cd}$  vérifiant les propriétés suivantes : ils sont inclus dans  $(K + a) \cup (K + b)$  et  $(K + c) \cup (K + d)$  respectivement (donc a fortiori dans  $P_{ab}$  et  $P_{cd}$  respectivement),  $\gamma_{ab}$  va du bord gauche au bord droit de  $P_{ab}$  et  $\gamma_{cd}$  va du bord inférieur au bord supérieur de  $P_{cd}$  (voir figure). Il est clair sur le dessin que les chemins  $\gamma_{ab}$  et  $\gamma_{cd}$  ont un point commun, ce qui prouve le lemme.



Typiquement, le lemme d'entrecroisement sera appliqué au compact  $K = s.A_I(s)$ . Donnons tout de suite une application de ce résultat.

**Remarque.** Le lemme d'entrecroisement et le lemme de coinçage reposent sur le même résultat : considérons deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  du plan dont les images sont incluses dans un même rectangle, le premier allant du bord gauche au bord droit et le second du bord haut au bord bas ; alors les deux chemins se coupent.



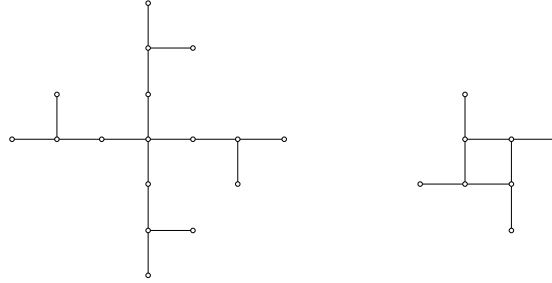
La manière la plus simple de prouver ce résultat est la suivante : posons  $A = \gamma_1(0)$ ,  $B = \gamma_1(1)$ ,  $C = \gamma_2(0)$  et  $D = \gamma_2(1)$ . Construisons un chemin  $\gamma'_2$  de  $D$  vers  $C$  comme

sur la figure, et notons  $\Gamma_2$  le lacet obtenu par concaténation de  $\gamma_2$  et  $\gamma'_2$ . On peut tracer une demi-droite  $\Delta_B$  issue de  $B$  et ne rencontrant pas  $\Gamma_2$ , donc  $\text{Ind}(B, \Gamma_2) = 0$ . On peut tracer une demi-droite  $\Delta_A$  issue de  $A$  et rencontrant transversalement  $\Gamma_2$  en un point, donc  $\text{Ind}(A, \Gamma_2) = \pm 1$ . Comme  $A$  et  $B$  n'ont pas le même indice par rapport à  $\Gamma_2$ , on en déduit que  $\gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent ; comme de plus  $\gamma_1$  et  $\gamma'_2$  sont disjoints, on en conclut que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  se coupent.

**Théorème.** *Soit  $I$  une partie du réseau  $\mathbb{Z}[i]$ , contenant au moins deux points, possédant une symétrie d'ordre 4 (i.e.  $I$  est invariant par une rotation de  $90^\circ$ ), tel que le graphe sur  $I$  obtenu en joignant les plus proches voisins soit connexe. Alors, si  $G_0$  est un graphe à une arête joignant deux plus proches voisins de  $I$ , ce graphe est semi-connexe et  $\mathcal{L}(G_0) = \mathcal{C}$ .*

**Corollaire.** *Le lieu de connexité  $\mathcal{C}(I)$  est connexe.*

Voici deux exemples de tels  $I$  :



*Preuve du théorème.* Il résulte immédiatement des hypothèses que  $G_0$  est semi-connexe, donc  $\mathcal{L}(G_0) \subset \mathcal{C}$ . Il s'agit de prouver l'inclusion inverse. Soit donc  $s \in \mathcal{C}$ . Alors l'attracteur  $A$  est connexe et le graphe de recouvrement  $G$  est connexe, donc contient au moins une arête. Il est commode d'étendre le graphe de recouvrement à  $\mathbb{Z}[i]$  tout entier, en mettant une arête entre  $a$  et  $b$  ssi  $(sA + a) \cap (sA + b) \neq \emptyset$ , ce qui équivaut à  $b - a \in s(A - A)$ . Soit  $R$  le graphe ainsi obtenu, et considérons dans  $R$  l'arête  $(a, b)$  la plus courte (i.e.  $a \neq b$  et  $|b - a|$  est minimum). Soit  $\ell = |b - a|$ . Si on réussit à prouver que  $\ell = 1$ , on aura prouvé que  $R$  contient une arête entre plus proches voisins, donc qu'il les contient toutes, ce qui entraîne  $G \supset G_0$  et donc  $s \in \mathcal{L}(G_0)$ , d'où la conclusion.

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\ell > 1$ .

**Lemme.** *Soit  $m = \frac{a+b}{2}$ . Alors  $m \notin \mathbb{Z}[i]$  et  $m \notin \mathbb{Z}[i] + \frac{i+1}{2}$ .*

En d'autres termes, l'une des coordonnées de  $m$  est entière et l'autre est demi-entière. S'il n'en était pas ainsi, la rotation  $\rho$  de centre  $m$  et d'angle  $90^\circ$  laisserait le réseau  $\mathbb{Z}[i]$  globalement invariant. Posant  $a' = \rho(a)$  et  $b' = \rho(b)$ , on pourrait appliquer le lemme d'entrecroisement aux points  $a, b, a', b'$  puisque  $[ab] \cap [a'b'] = \{m\}$ . Donc l'une au moins des arêtes  $(a, a')$ ,  $(a, b')$ ,  $(a', b)$  ou  $(a', b')$  serait dans  $\mathbb{R}$ . Mais ces arêtes sont de longueur  $\ell/\sqrt{2}$ , ce qui contredit la minimalité de  $\ell$ .

De ce lemme on déduit aisément que  $\ell \geq \sqrt{5}$ . D'autre part :

**Lemme.** *On a  $\ell \leq 1 + \sqrt{2}$ .*

*Preuve.* Soit  $m$  le milieu de  $[ab]$  et  $\omega \in \mathbb{Z}[i]$  un point le plus proche de  $m$ . Alors  $|\omega - m| = \frac{1}{2}$ . Soit  $\rho$  la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $90^\circ$ , et soient  $a' = \rho(a)$ ,  $b' = \rho(b)$  et  $m' = \rho(m)$ .



Soit  $\vartheta$  le point d'intersection des droites  $(ab)$  et  $(a'b')$ . On a  $\omega m = \omega m' = \frac{1}{2}$ , et comme  $(\omega mm')$  est rectangle en  $\omega$ , on a  $mm' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} (ab')^2 &= (a\vartheta)^2 + (b'\vartheta)^2 \\ &\leq (am + m\vartheta)^2 + (b'm + m'\vartheta)^2 \\ &= \left(\frac{\ell}{2} + m\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} + m'\vartheta\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\ell^2 + \ell + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puisque  $(m\vartheta)^2 + (m'\vartheta)^2 = \frac{1}{2}$ , d'où

$$(ab')^2 - \ell^2 \leq -\frac{1}{2}\ell^2 + \ell + \frac{1}{2},$$

et on a la même inégalité pour  $(aa')^2 - \ell^2$ ,  $(ba')^2 - \ell^2$  et  $(bb')^2 - \ell^2$ . Or, si  $\ell > 1 + \sqrt{2}$ , le second membre de l'inégalité devient strictement négatif, donc toutes les longueurs  $aa'$ ,  $ab'$ ,  $ba'$  et  $bb'$  sont strictement inférieures à  $\ell$ , et il est facile de vérifier que les points  $a, a', b, b'$  sont distincts. Mais le lemme d'entrecroisement nous dit que l'une au moins des arêtes  $(a, a')$ ,  $(a, b')$ ,  $(b, a')$  ou  $(b, b')$  est dans  $R$ , mais comme ces arêtes sont de longueur  $< \ell$  cela contredit la minimalité de  $\ell$ , et le lemme est prouvé.

On en conclut que  $\ell = \sqrt{5}$ . Là, il n'y a plus que deux cas possibles (à isométrie positive près) : on a  $(0, 2 + i) \in R$  ou  $(0, 2 - i) \in R$ .

**Lemme.** *Si  $(0, 2 + i) \in R$ , alors  $(0, 2 - i) \in R$ , et réciproquement.*

*Preuve.* Supposons par exemple que  $(0, 2 + i) \in R$ . En appliquant le lemme d'entrecroisement aux points  $a = 0$ ,  $b = 2 + i$ ,  $c = 2$  et  $d = 1 + 2i$ , on obtient  $(0, 1 + 2i) \in R$ , d'où  $(0, 2 - i) \in R$  par rotation.

Maintenant qu'on sait que  $(0, 2 + i)$  et  $(0, 2 - i)$  sont dans  $R$ , il est facile d'obtenir une contradiction. Il suffit d'appliquer le lemme d'entrecroisement aux points  $a = 0$ ,  $b = 2 + i$ ,  $c = i$  et  $d = 2$ . Donc  $\ell = 1$  et le théorème est prouvé.

On démontrerait de même le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $I$  une partie du réseau  $\mathbb{Z}[j]$ , contenant au moins deux points, possédant une symétrie d'ordre 3 (i.e.  $I$  est invariant par une rotation de  $120^\circ$ ), tel que le graphe sur  $I$  obtenu en joignant les plus proches voisins soit connexe. Alors, si  $G_0$  est un graphe à une arête joignant deux plus proches voisins de  $I$ , ce graphe est semi-connexe et  $\mathcal{L}(G_0) = \mathcal{C}$ .*

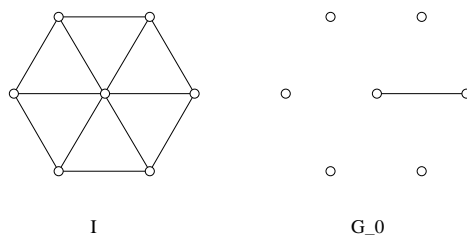
**Corollaire.** *Le lieu de connexité  $\mathcal{C}(I)$  est connexe.*

En utilisant le lemme de coinçage, on prouve le

**Théorème.** *Soit  $n > 1$  et  $I = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Soit  $G_0$  le graphe constitué d'une unique arête entre 0 et 1. Alors  $G_0$  est semi-connexe et  $\mathcal{L}(G_0) = \mathcal{C}$ .*

Le résultat suivant se démontre sans utiliser le lemme de coinçage ou d'entrecroisement :

**Théorème.** Soit  $n > 0$  et  $I = \{0\} \cup \{z : z^n = 1\} = \{z : z^{n+1} = z\}$ . Si  $G_0$  est le graphe constitué d'une unique arête entre 0 et 1, alors  $G_0$  est semi-connecté et  $\mathcal{L}(G_0) = \mathcal{C}$ .

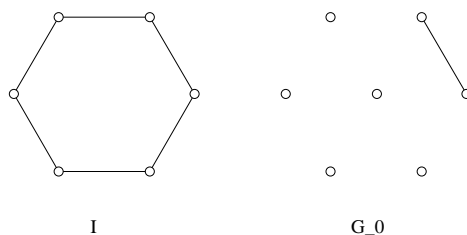


En revanche, le théorème suivant nécessite une version “circulaire” du lemme de coinçage, que voici :

**Lemme.** Soit  $n > 1$ ,  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ , et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Pour  $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , soit  $K_j = \omega^j K$ . On suppose qu'il existe  $a \neq b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tels que  $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ . Alors  $K_0 \cap K_1 \neq \emptyset$ .

On en déduit facilement le

**Théorème.** Soit  $n > 1$  et  $I = \{z : z^n = 1\}$ . Soit  $G_0$  un graphe sur  $I$  constitué d'une arête entre deux sommets adjacents, alors  $G_0$  est semi-connecté et  $\mathcal{L}(G_0) = \mathcal{C}$ .



Nous avons vu plus haut que, en toute généralité,  $A$  est connexe, connexe par arcs, localement connexe si  $I$  l'est. Dans le cas particulier de  $z \mapsto sz + I$ , on vérifie également que si  $I$  est convexe, alors  $A$  aussi. Plus précisément, si on désigne par  $\text{Cvx}$  l'enveloppe convexe, alors pour tout  $I$  on a

$$\text{Cvx } A_I(s) = A_{[\text{Cvx } I]}(s).$$

## Bibliographie du premier chapitre

- [Ba,Ha] M. F. BARNESLEY and D. P. HARDIN, *A Mandelbrot set whose boundary is piecewise smooth*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332, juin 85.
- [Ba,De] M. F. BARNESLEY and S. G. DEMKO, *Iterated function systems and global construction of fractals*, Proc. R. Soc. London, A 399, pp 243–275 (1985).
- [Da,Kn] C. DAVIS and D. E. KNUTH, *Number representations and dragon curves*, Journal of Recreational Mathematics **3** (1970), pp 66–81 et 133–149.

- [De,Me] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, publications de l'institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann 1983.
- [EDG] G. A. EDGAR, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, 1990.
- [HUT] J. E. HUTCHINSON, *Fractals and similarity*, Indiana Univ. J. Math. vol 30, pp 713–747 (1981).
- [VID] J. P. VIDAL, *Connectivity of compact invariant sets*, Computer Science Department, Carnegie-Mellon University (1988).



## Chapitre 2

# POINTS CRITIQUES DES PRODUITS DE BLASCHKE



## SECOND CHAPITRE : POINTS CRITIQUES DES PRODUITS DE BLASCHKE

On sait (référence ?) que toute application holomorphe propre de degré  $n + 1$  de  $D$  dans lui-même est donnée par

$$f(z) = \lambda \frac{z - a_0}{1 - \bar{a}_0 z} \cdots \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z} \quad \text{avec } |\lambda| = 1,$$

où les  $a_i$  sont les zéros de  $f$ . Dans le cadre de l'étude dynamique d'un polynôme complexe  $P$ , on peut s'intéresser à la dynamique restreinte à un ouvert  $U$  qui peut être le bassin d'attraction d'un point périodique ou indifférent rationnel. Dans les deux cas, l'ouvert  $U$  est isomorphe au disque, et il existe une itérée  $P^{\circ k}$  qui envoie  $U$  sur lui-même de manière propre. On est donc amené à classifier les produits de Blaschke de degré donné à conjugaison près. Comme nous allons le voir, cette classification peut se faire à l'aide des points critiques de  $f$ .

Nous supposons  $n \geq 1$  par la suite.

### I. Premières propriétés et énoncé du problème.

Supposons pour simplifier que  $\lambda = 1$ . Tout d'abord, on voit que  $f$  s'étend en une fonction rationnelle de degré  $n + 1$  de la sphère de Riemann dans elle-même, commutant avec l'inversion  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ , pour laquelle le cercle  $S^1$  est totalement (?) invariant :  $f^{-1}(S^1) = S^1$ .

Restreinte à  $S^1$ , l'application  $f$  est un revêtement de degré  $n + 1$ . Par conséquent,  $f$  a  $n$  points critiques (comptés avec multiplicité)  $c_1 \dots c_n$  dans  $D$  ; elle en a également  $n$  à l'extérieur du cercle unité, qui sont  $\bar{c}_1^{-1} \dots \bar{c}_n^{-1}$ . Il n'y a aucun point critique sur  $S^1$ .

Le résultat que nous allons prouver est le suivant :

**Théorème.** *Soient  $f$  et  $f^*$  deux produits de Blaschke de degré  $n + 1$  et de points critiques  $c_1 \dots c_n$  et  $c_1^* \dots c_n^*$ . On suppose qu'il existe  $h_2 \in \text{Aut}(D)$  tel que  $c_k = h_2(c_k^*)$  à permutation près. Alors il existe  $h_1 \in \text{Aut}(D)$  tel que  $f^* = h_1 \circ f \circ h_2$ .*

Ce théorème répond en partie au problème de la classification des produits de Blaschke à conjugaison près (il reste à se demander si  $h_2 = h_1^{-1}$ ). Dans [M,D], Milnor pose le problème sous une forme équivalente :

*CONJECTURE: A proper holomorphic map  $D \mapsto D'$  between disks is uniquely determined, up to composition with a Moebius automorphism of  $D'$ , by its critical points, which can be arbitrary points (with multiplicity) of  $D$ .*

Cette conjecture est à comparer avec le résultat suivant (même référence) :

*LEMMA. Any proper holomorphic map  $D \mapsto D'$  between disks is uniquely determined, up to composition with a Moebius automorphism of  $D$ , by its critical values, which can be arbitrary points (with multiplicity) of  $D'$ , together with the topological data which describes which covering of the punctured target disk is to be used.*

L'étude de cette conjecture conduit à un certain nombre de résultats intéressants en eux-mêmes. L'un d'eux, dû à Lisa Goldberg, est le suivant (même référence) :

*Lisa is still hard at work studying the extent to which a rational function is determined by its critical points (or dually by its critical values). She hopes to find out exactly when the relevant mapping ramifies in the rational case, and then to use this information to settle the Blaschke product case. The main new progress (or new mystery), following a suggestion of Thurston, is the following: Generically, the number of essentially different ways that a given set of  $2d - 2$  points occur as the critical points of a rational map of degree  $d$  is precisely equal to the  $d$ -th "Catalan number". This is the number of ways of putting parentheses into a  $d$ -fold non-associative product, or the number of ways of triangulating a  $(d + 1)$ -sided polygon without introducing new vertices. So far, there is no intuitive explanation for this result.*

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $\text{Sym}^n U$  l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $U$  à permutation près :

$$\text{Sym}^n U = U^n / \mathbf{S}_n.$$

Cet ensemble est homéomorphe à l'ensemble des polynômes moniques complexes de degré  $n$  dont toutes les racines sont dans  $U$  ; ceci permet de munir  $\text{Sym}^n U$  d'une structure de variété complexe de dimension  $n$ .

Pour prouver le théorème, notons qu'on peut se ramener au cas où  $f$  et  $f^*$  peuvent s'écrire sous la forme  $f_{a_1 \dots a_n}$  et  $f_{a_1^* \dots a_n^*}$ , où on a posé

$$f(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \cdots \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}.$$

La preuve suit le schéma donné par Milnor dans [D,M]. La première partie de la preuve fait l'objet du paragraphe suivant.

## II. Propreté.

**Théorème.** *L'application*

$$\begin{aligned} \text{pcrit} : \quad \text{Sym}^n D &\longrightarrow \text{Sym}^n D \\ (a_1 \dots a_n) &\mapsto (c_1 \dots c_n) \end{aligned}$$

*est propre.*

Si, après cela, on arrive à prouver que  $\text{pcrit}$  est un difféo local de  $\text{Sym}^n D$ , alors — par propriété — ce sera un revêtement de  $\text{Sym}^n D$  par lui-même. Comme  $\text{Sym}^n D$  est connexe et simplement connexe, ceci entraîne que  $\text{pcrit}$  est un difféo global de  $\text{Sym}^n D$  dans  $\text{Sym}^n D$ . En particulier,  $\text{pcrit}$  est injective ; de celà on déduit sans peine le théorème annoncé.

*Preuve.* Considérons le produit de Blaschke  $f_{a_1 \dots a_n}$  de zéros  $a_0 = 0, a_1 \dots a_n$ . On suppose que  $(a_1 \dots a_n)$  est proche de l' $\infty$  dans  $\text{Sym}^n D$ , donc que certains des  $a_i$  (peut-être tous) sont dans un petit voisinage de  $S^1$ . Supposons que ce soient  $a_j \dots a_n$ , les autres restant à une certaine distance strictement positive de  $S^1$ . Alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{z - a_k} + \frac{\bar{a}_k}{1 - \bar{a}_k z} = \sum_{k=0}^n \frac{1 - |a_k|^2}{(z - a_k)(1 - \bar{a}_k z)} = \sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j}^n.$$



Quand  $z$  ne s'approche pas de  $S^1$ , le deuxième terme est négligeable devant le premier. Par conséquent, les points critiques de  $f_{a_1 \dots a_n}$  situés suffisamment loin du bord de  $D$  sont approximativement les points critiques de  $f_{a_1 \dots a_{j-1}}$ . Il y en a donc  $j - 1$ . Mais il doit y avoir  $n$  points critiques en tout, il y a donc  $n - j + 1$  points critiques situés dans un petit voisinage de  $S^1$ . Comme  $n - j + 1 > 0$ , il y a au moins un point critique proche du bord, donc  $(c_1 \dots c_n)$  est proche de  $l'\infty$ , ce qu'il fallait démontrer.

### III. L'application est-elle un difféomorphisme local ?

Il n'est pas très commode de travailler avec un produit de Blaschke. Le fait, par exemple, que les points critiques soient deux à deux inverses par rapport à  $S^1$  oblige à distinguer les cas où 0 est critique et non critique. Pour éviter ces difficultés, on transforme le cercle en droite : l'application  $r : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ , représentation conforme de  $H$  sur  $D$ , est là pour ça. Posons

$$\begin{aligned} g(z) &= f_{a_1 \dots a_n} \circ r(z) = \prod_{k=0}^n \frac{(1 - a_k)z - (1 + a_k)i}{(1 - \bar{a}_k)z + (1 + \bar{a}_k)i} \\ &= \beta \prod_{k=0}^n \frac{z - \alpha_k}{z - \bar{\alpha}_k} \end{aligned}$$

où  $\beta$  est une constante  $\neq 0$  et  $\alpha_k = i \frac{1+a_k}{1-a_k} \in H$  (avec  $\alpha_0 = i$ ). A un facteur près, on a donc  $g = P/\bar{P}$ , où  $P(z) = \prod_{k=0}^n (z - \alpha_k)$ . Quand  $(a_1 \dots a_n)$  décrit  $\text{Sym}^n D$ ,  $P$  décrit l'ensemble  $\Omega$  des polynômes moniques de degré  $n + 1$  s'annulant en  $i$  et dont toutes les racines sont dans  $H$ . Clairement, l'application

$$\begin{aligned} r_1 : \quad \text{Sym}^n D &\longrightarrow \Omega \\ (a_1 \dots a_n) &\mapsto (\alpha_0 \dots \alpha_n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -analytique entre variétés complexes.

Les points critiques de  $g$  se déduisent de ceux de  $f$  par l'application  $r$ . Si on note  $d_1 \dots d_n$  les points critiques de  $g$  situés dans le demi-plan supérieur, alors  $c_k = r(d_k)$ . Les autres points critiques sont  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_n$  : notons-les  $d_{n+1} \dots d_{2n}$ . Nous devons prouver que l'application

$$\begin{aligned} \text{pcrit\_bis} : \quad \Omega &\longrightarrow \text{Sym}^n H \\ (\alpha_0 \dots \alpha_n) &\mapsto (d_1 \dots d_n) \end{aligned}$$

est localement un difféo  $\mathbb{R}$ -analytique. Or, l'ensemble  $(d_1 \dots d_n)$  n'est pas en général un ensemble algébrique, on ne peut donc pas espérer calculer  $(z - d_1) \dots (z - d_n)$  ; il faut prendre les points critiques *au complet*. Soit  $\Upsilon$  la sous-variété réelle de  $\text{Sym}^{2n} \mathbb{C}$  ainsi définie : c'est l'ensemble des  $2n$ -uplets  $(d_1 \dots d_{2n})$  à permutation près tels que  $n$  de ces points soient dans  $H$  et que les  $n$  autres soient leurs conjugués. Manifestement, les variétés  $\text{Sym}^n H$  et  $\Upsilon$  sont  $\mathbb{R}$ -analytiquement difféomorphes.

### IV. Première réduction

On est donc amené à prouver l'énoncé suivant :

---

<sup>1</sup> Si  $f$  est une fonction holomorphe ou méromorphe, la fonction  $\bar{f}$  est définie par  $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ .

**Proposition.** *L'application*

$$\begin{aligned} \omega : \quad \Omega &\longrightarrow \text{Sym}^{2n} \mathbb{C} \\ (\alpha_0 \dots \alpha_n) &\mapsto (d_1 \dots d_{2n}) \end{aligned}$$

*est une immersion  $\mathbb{R}$ -analytique.*

Donnons-nous un point  $P$  de  $\Omega$ , c'est-à-dire un polynôme de la forme  $P(z) = (z - \alpha_0) \cdots (z - \alpha_n)$  où tous les  $\alpha_k$  sont dans le demi-plan supérieur et  $\alpha_0 = i$ . Les points critiques  $d_1 \dots d_{2n}$  sont alors les zéros de  $R = [P, \bar{P}]$ , où on a posé  $[P, Q] = P'Q - PQ'$ .

*Remarque.* L'application  $(P, Q) \mapsto [P, Q] = P'Q - PQ'$  possède un certain nombre de propriétés remarquables<sup>2</sup>. C'est une fonction bilinéaire alternée ; si  $A, P, Q, h$  sont des fonctions holomorphes, on a  $[AP, AQ] = A^2[P, Q]$  et  $[P \circ h, Q \circ h] = ([P, Q] \circ h)h'$ .

Considérons un vecteur tangent  $dP \in T\Omega$ , c'est-à-dire un polynôme de degré  $\leq n$  s'annulant en  $i$ . La variation infinitésimale de  $R$  vaut donc

$$\begin{aligned} dR &= d[P, \bar{P}] = [dP, \bar{P}] + [P, \overline{dP}] = [dP, \bar{P}] - \overline{[dP, \bar{P}]} \\ &= 2 \text{Im}[dP, \bar{P}]. \end{aligned}$$

Supposons que  $\omega$  ne soit pas une immersion en  $P$ , c'est-à-dire qu'on puisse trouver  $dP \in T\Omega$  tel que  $(d_1 \dots d_{2n})$  soit constant (au premier ordre). On aura alors  $dR = 2\gamma R$ , où  $\gamma$  est une certaine constante. Comme  $R = [P, \bar{P}]$  est imaginaire pur, on peut écrire  $2 \text{Im}[dP, \bar{P}] = 2\gamma \text{Im}[P, \bar{P}]$ , donc  $\gamma$  est réel et  $\text{Im}[\overline{dP} - \gamma \bar{P}, P] = 0$ .

## V. Deuxième réduction

Nous avons démontré la

**Proposition.** *Si  $\omega$  n'est pas une immersion, alors<sup>3</sup> il existe un polynôme  $P$  monique de degré  $n+1$  tel que  $P(i) = 0$  et dont toutes les racines sont dans  $H$ , un polynôme  $Q$  non nul de degré  $\leq n$  et tel que  $Q(-i) = 0$ , et un nombre réel  $\gamma$  tels que le polynôme  $[Q - \gamma \bar{P}, P]$  soit réel.*

Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $\omega$  ne soit pas une immersion ; et soient donc  $P, Q$  et  $\gamma$  vérifiant les propriétés ci-dessus.

Nous avons encore besoin de quelques définitions supplémentaires. Nous dirons qu'une fonction holomorphe  $f$  est *proréelle* (i.e. proportionnelle à une fonction réelle) si  $f$  et  $\bar{f}$  sont proportionnelles. Dans le cas des polynômes<sup>4</sup>, cela revient à dire que les racines sont symétriques par rapport à l'axe réel (avec multiplicité, toujours).

<sup>2</sup> Par exemple, elle vérifie l'identité de Jacobi.

<sup>3</sup> Comme le lecteur le vérifiera sans peine, il s'agit en fait d'une équivalence.

<sup>4</sup> Cette propriété peut sembler un peu inutile dans le cas des polynômes, puisqu'on peut se ramener au cas monique ; simplement, elle évite de se demander par quel coefficient il faut multiplier le polynôme pour le rendre réel. Ainsi, nous n'aurons jamais à calculer le coefficient dominant de  $R = [P, \bar{P}]$  (tout au plus sait-on qu'il est imaginaire pur).

Soit  $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  une homographie laissant  $i$  et  $-i$  fixes, donc de la forme

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta}.$$

Si  $A$  est un polynôme de degré  $\leq m$ , définissons<sup>5</sup>

$$\text{rot}_m(A) = (cz + d)^m (A \circ h).$$

C'est également un polynôme de degré  $\leq m$ . Convenons de dire, si un polynôme  $A$  est de degré  $< m$ , qu'il admet une racine d'ordre  $m - \deg A$  en l'infini. Avec cette convention,  $A$  et  $\text{rot}_m(A)$  ont tous les deux  $m$  racines, et les racines de  $\text{rot}_m(A)$  sont les images par  $h^{-1}$  des racines de  $A$ . Par ailleurs,  $h$  est réelle, donc

$$A \text{ proréel} \iff \text{rot}_m(A) \text{ proréel}.$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on va poser

$$Q_\lambda = P + \lambda[Q - \gamma(\overline{P} - P)].$$

Alors  $[P, Q_\lambda] = \lambda[P, Q - \gamma\overline{P} + \gamma P] = \lambda[P, Q - \gamma\overline{P}]$ , donc  $[P, Q_\lambda]$  est proréel. Mais quelle constante  $\lambda$  prendre ? Le résultat crucial est le suivant :

**Lemme central.** *Il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  pour lequel :*

- (i) toutes les racines de  $Q_\lambda$  sont dans  $H \cup \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $Q_\lambda$  a au moins une racine dans  $\mathbb{R}$ ,
- (iii)  $Q_\lambda$  a au moins une racine dans  $H$ ,
- (iv) toutes les racines réelles de  $Q_\lambda$  sont simples.

Admettons provisoirement ce lemme et choisissons un tel  $\lambda$ .

Posons  $P^* = \text{rot}_{n+1} P$  et  $Q_\lambda^* = \text{rot}_{n+1} Q_\lambda$ . On a

$$\begin{aligned} [P^*, Q_\lambda^*] &= [(cz + d)^{n+1} P \circ h, (cz + d)^{n+1} Q_\lambda \circ h] \\ &= (cz + d)^{2n+2} [P \circ h, Q_\lambda \circ h] \\ &= (cz + d)^{2n+2} h'(z) ([P, Q_\lambda] \circ h) \\ &= (cz + d)^{2n} ([P, Q_\lambda] \circ h) \\ &= \text{rot}_{2n} [P, Q_\lambda]. \end{aligned}$$

Donc  $[P^*, Q_\lambda^*]$  est proréel puisque  $[P, Q_\lambda]$  l'est<sup>6</sup>. Or, d'après le lemme,  $Q_\lambda$  admet au moins une racine réelle : soit  $\xi_0$  une telle racine (simple, donc). On peut toujours choisir  $h$  de manière à ce que  $h(\infty) = \xi_0$ . Dans ce cas,  $Q_\lambda^*$  a une racine "à l'infini", simple comme  $\xi_0$ , ce qui est une manière de dire que  $Q_\lambda^*$  est de degré  $n$ . Toutes ses racines finies sont dans

<sup>5</sup> A une constante multiplicative près.

<sup>6</sup> Une autre manière de prouver ce résultat consiste à dire que  $(P^*/Q_\lambda^*) = (P/Q_\lambda) \circ h$ , donc si les points critiques de  $P/Q_\lambda$  sont disposés symétriquement par rapport à l'axe réel, il en est de même de ceux de  $P^*/Q_\lambda^*$ . D'où le résultat.

$H \cup \mathbb{R}$ , et elles ne sont pas toutes réelles puisque  $Q_\lambda$  a au moins une racine dans  $H$ . Quant à  $P^*$ , il est de degré  $n+1$  et toutes ses racines sont dans  $H$ . A des facteurs constants près, on a

$$\begin{aligned} P^* &= z^{n+1} - \alpha z^n + \dots \\ Q_\lambda^* &= z^n - \beta z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} [P^*, Q_\lambda^*] &= [(n+1)z^n - n\alpha z^{n-1} + \dots][z^n - \beta z^{n-1} + \dots] \\ &\quad - [z^{n+1} - \alpha z^n + \dots][nz^{n-1} - (n-1)\beta z^{n-2} + \dots] \\ &= (n+1)z^{2n} - \{n\alpha + (n+1)\beta\} z^{2n-1} - nz^{2n} + \{n\alpha + (n-1)\beta\} z^{2n-1} + \dots \\ &= z^{2n} - 2\beta z^{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

et la proralité du polynôme impose donc que  $\beta$  soit réel. Mais on ne doit pas oublier que  $\beta$  est la somme des racines de  $Q_\lambda^*$ . Or ces racines ont toutes une partie imaginaire  $\geq 0$  et une au moins a une partie imaginaire strictement positive. Ce qui donne la contradiction cherchée.

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme que nous avons laissé de côté.

## VI. Démonstration du lemme central

**Lemme préliminaire.** *Il n'existe pas de constante  $k \in \mathbb{C}$  telle que  $Q = k(\overline{P} - P)$ . En particulier,  $Q - \gamma(\overline{P} - P)$  n'est pas identiquement nul.*

*Preuve.* Supposons que  $Q = k(\overline{P} - P)$ . Si on évalue cette identité en  $-i$ , notant que  $\overline{P}(-i) = Q(-i) = 0$  et  $P(-i) \neq 0$ , il vient  $k = 0$  d'où  $Q = 0$ , ce qui est contraire aux hypothèses.

Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : Q_\lambda \text{ a au moins une racine réelle}\}.$$

C'est un fermé de  $\mathbb{C}$  ne contenant pas zéro, et c'est également une courbe paramétrée par  $\mathbb{R}$  (privé d'un nombre fini de points). En effet, la condition  $Q_\lambda(x) = 0$  (avec  $x$  réel) équivaut à  $\lambda = -\frac{P}{Q - \gamma(\overline{P} - P)}(x)$ . Il contient deux sous-ensembles gênants pour nous :  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , où

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{\lambda \in \mathbb{C}^* : Q_\lambda \text{ a au moins une racine réelle multiple}\} \\ \Lambda_2 &= \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \text{toutes les racines de } Q_\lambda \text{ sont réelles}\}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $\Lambda_1$  est fini. En effet, si  $x \in \mathbb{R}$  est une racine multiple de  $Q_\lambda$ , on a  $Q_\lambda(x) = Q'_\lambda(x) = 0$ , donc  $[P, Q_\lambda](x) = 0$ . Mais  $[P, Q_\lambda](x) = \lambda S$  avec  $S = [P, Q - \gamma\overline{P}]$ . Or  $S$  n'a qu'un nombre fini de racines, et si  $x$  est l'une d'entre elles, l'équation  $Q_\lambda(x) = 0$  a au plus une solution en  $\lambda$  (car  $P(x) \neq 0$ ).

**Lemme 1.** *Le fermé  $\Lambda_2$  est contenu dans une droite passant par 0 à laquelle on a enlevé le point 0.*

*Preuve du lemme 1.* Si  $\lambda \in \Lambda_2$ , alors  $Q_\lambda$  est monique et toutes ses racines sont réelles, donc  $Q_\lambda$  est réel :

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= \overline{Q}_\lambda \\ P + \lambda[Q - \gamma(\overline{P} - P)] &= \overline{P} + \overline{\lambda}[\overline{Q} - \gamma(P - \overline{P})] \\ \lambda Q - \overline{\lambda}\overline{Q} &= \mu(\overline{P} - P) \end{aligned}$$

où  $\mu$  est une constante. Donc si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2$ , on a

$$\begin{cases} \lambda_1 Q - \bar{\lambda}_1 \bar{Q} = \mu_1 (\bar{P} - P) \\ \lambda_2 Q - \bar{\lambda}_2 \bar{Q} = \mu_2 (\bar{P} - P). \end{cases}$$

Si le déterminant  $\Delta = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 \lambda_2$  du système était non nul, on pourrait le résoudre, ce qui donnerait  $Q = \mu_3 (\bar{P} - P)$  avec  $\mu_3 \in \mathbb{C}$ , or on a vu que c'était impossible. Donc  $\Delta = 0$ , ce qui exprime que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont alignés. Ce qui prouve le lemme 1.

**Lemme 2.** *La courbe  $\Lambda$  n'est pas contenue dans une droite passant par zéro.*

*Preuve du lemme 2.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $Q_\lambda(x) = 0$  si et seulement si

$$\lambda = -\frac{P}{Q - \gamma(\bar{P} - P)}(x).$$

J'affirme que la fonction  $f : x \mapsto \frac{Q - \gamma(\bar{P} - P)}{P}(x)$  ne prend pas que des valeurs situées sur une même droite passant par zéro, quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ . Sinon,  $f$  serait proréelle, et donc ses pôles seraient symétriques par rapport à l'axe réel. Ce qui n'est pas vrai, car  $f$  a au moins un pôle — en effet, le numérateur est non nul et de degré strictement inférieur à celui du dénominateur — mais tous ses pôles sont dans  $H$ . D'où le lemme.

Il résulte des lemmes 1 et 2 que l'ensemble  $\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2$  est non vide et que  $\mathbb{C} - \Lambda_1 - \Lambda_2$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  contenant 0. Soit donc  $\lambda_0 \in \Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2$ , et soit  $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \Lambda_1 - \Lambda_2$  un chemin continu allant de 0 à  $\lambda_0$ . Soit  $t_1$  le plus petit élément de  $[0, 1]$  tel que  $\rho(t_1) \in \Lambda$  et soit  $\lambda_1 = \rho(t_1)$ . J'affirme que pour  $\lambda = \lambda_1$ , toutes les hypothèses du lemme sont vérifiées. Seul le point (i) demande une démonstration. Pour tout  $t \in [0, t_1[$ , le polynôme  $Q_{\rho(t)}$  n'a aucune racine réelle ; or  $Q_{\rho_0} = Q_0 = P$  a toutes ses racines dans  $H$ , donc par connexité, pour tout  $t \in [0, t_1[$ , le polynôme  $Q_{\rho(t)}$  a toutes ses racines dans  $H$ . Enfin, la propriété (i) est fermée, donc  $Q_{\lambda_1}$  a toutes ses racines dans  $H \cup \mathbb{R}$ .

## Bibliographie du second chapitre

- [D,M] A. DOUADY et J. MILNOR, correspondance électronique.
- [MIL1] J. MILNOR, *Hyperbolic components in spaces of polynomial forms*, sept. 87, rough draft.
- [MIL2] J. MILNOR, *Real forms*, sept. 87, rough draft.



# Chapitre 3

## POINTS PERIODIQUES DES POLYNOMES QUADRATIQUES





## TROISIEME CHAPITRE : POINTS PERIODIQUES DES POLYNOMES QUADRATIQUES

On considère le polynôme quadratique  $f_c : z \mapsto z^2 + c$ . Les points de période divisant  $n$  sont les zéros du polynôme  $Q_n(z, c) = f_c^{\circ n}(z) - z$ , polynôme qui est de degré  $2^n$  en  $z$ . Manifestement, le polynôme  $Q_n$  n'est pas irréductible puisqu'il contient également des points de période inférieure à  $n$ . Ainsi, on peut écrire  $Q_n(z, c) = \prod_{d|n} P_d(z, c)$ , où les  $P_d$  sont des polynômes moniques en  $z$  et à coefficients entiers. La formule d'inversion de Möbius permet d'exprimer les  $P$  en fonction des  $Q$  :

$$P_n(z, c) = \prod_{d|n} Q_d(z, c)^{\mu(n/d)}.$$

Cette décomposition des  $Q_n$  en produit correspond à l'existence d'un invariant algébrique évident, qui est la période d'un point périodique. On peut se demander s'il existe d'autres invariants, ce qui revient à se demander si les  $P_n$  sont eux-mêmes réductibles, sur  $\mathbb{Q}(z, c)$  ou  $\mathbb{C}(z, c)$ . Nous allons voir qu'il n'en est rien : Les  $P_n$  sont irréductibles sur  $\mathbb{C}(z, c)$  et a fortiori sur  $\mathbb{Q}(z, c)$ . Il est donc impossible de pousser plus loin la factorisation des  $Q_n$ .

### I. Irréductibilité de l'ensemble des points périodiques

Soit  $(X_n)$  la courbe de  $\mathbb{C}P^2$  définie par l'équation  $P_n(z, c) = 0$ .

**Théorème 1.** *La courbe  $(X_n)$  est irréductible pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

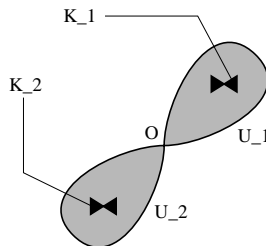
Enoncé équivalent: pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $P_n$  est irréductible sur  $\mathbb{C}[z, c]$ .

*Preuve du théorème 1.* Tout d'abord notons que  $P_n$  est un polynôme de degré

$$\nu_2(n) = \sum_{d|n} 2^d \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

en  $z$  et de degré  $\nu_2(n)/2$  en  $c$ , et qu'il est unitaire en  $z$  comme en  $c$ . En particulier  $P_1$  et  $P_2$  sont de degré 1 en  $c$  donc irréductibles. On pourra donc supposer que  $n > 1$ .

**Rappel.** Soit  $f_c(z) = z^2 + c$  avec  $c \notin \mathbf{M}$ . Alors il existe une partition de  $K$  en deux ouverts,  $K_1 = K \cap U_1$  et  $K_2 = K \cap U_2$ , où  $U_1$  et  $U_2$  sont les deux composantes connexes bornées du complémentaire de l'équipotentielle passant par 0 (voir figure).



Soit  $x \in K$  et  $x_n = f_c^{\circ n}(z)$ ; Considérons la suite

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \in U_1, \\ 2 & \text{si } x_n \in U_2. \end{cases}$$

La suite  $\varepsilon_n(x)$  s'appelle itinéraire de  $x$ . L'application

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto [\varepsilon_n(x)]_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une bijection. De plus,  $x$  est périodique si et seulement si son itinéraire est périodique, et dans ce cas les périodes sont égales.

**Proposition 1.** *La courbe  $(X_n)$  est lisse, sauf à l'infini où convergent  $\nu_2(n)/2$  branches.*

En effet, il y a autant de branches que d'itinéraires  $n$ -périodiques à la transposition  $(1, 2)$  près. La régularité de  $(X_n)$  est équivalente au fait que deux composantes hyperboliques distinctes de période  $n$  de  $\mathbf{M}$  ne peuvent avoir la même racine. La démonstration de ce point se trouve dans les notes mathématiques d'Orsay ([DH2]).

Pour démontrer le théorème 1, raisonnons par l'absurde et supposons que  $P_n$  soit réductible sur  $\mathbb{C}[z, c]$ . La première étape consiste à en déduire que  $P_n$  est réductible sur  $\mathbb{Z}[z, c]$ .

**Proposition 2.**  *$P_n$  est réductible sur  $\mathbb{Z}[z, c]$ .*

D'après le lemme de Gauss, il suffit de montrer que  $P_n$  est réductible sur  $\mathbb{Q}[z, c]$ . Supposons que  $P_n = AB$ , avec  $A$  et  $B$  unitaires en  $z$ , et

$$d_z^{\circ} A \geq 1, d_z^{\circ} B \geq 1, \quad A, B \in \mathbb{C}[z, c].$$

Soit  $a = d_z^{\circ} A$ ; On peut factoriser  $A$  sous la forme

$$A = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_a).$$

Mais pour  $c$  grand, chacun des  $z_i$  est développable en une série de Laurent en  $\omega = 1/\sqrt{-c}$  à coefficients rationnels:

$$z_i = a_{i,-1}\omega^{-1} + a_{i,0} + a_{i,1}\omega + \cdots, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Q}$$

(les coefficients  $a_{i,j}$  dépendent de l'itinéraire du point  $z_i$ ). Il en est donc de même des coefficients de  $A$ . Les coefficients de  $A$  étant à la fois des polynômes en  $c$  à coefficients complexes et des séries de Laurent en  $(-c)^{-1/2}$  à coefficients rationnels, on en déduit que les coefficients de  $A$  sont des polynômes en  $c$  à coefficients rationnels. Ce qui prouve la proposition 2.

On sait donc maintenant que si on choisit  $A$  et  $B$  unitaires, alors leurs coefficients seront entiers. Mais comme la courbe  $(X_n)$  est lisse et qu'elle est la réunion des courbes  $A = 0$  et  $B = 0$ , ces deux courbes ne peuvent pas se rencontrer à distance finie. Donc le résultant

$$g(c) = \mathbf{res}_z(A, B)$$

qui est un polynôme en  $c$ , n'a aucune racine complexe; il est donc constant. Il reste à évaluer cette constante, au moins au signe près; on sait déjà qu'elle sera entière.

**Proposition 3.**  $g(c) = \pm 1$ .

*Preuve.* Factorisons A et B:

$$A = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_a)$$

$$B = (z - z'_1)(z - z'_2) \cdots (z - z'_b)$$

où  $a$  et  $b$  sont les degrés en  $z$  de  $A$  et  $B$ . Le résultant en  $z$  est donné par

$$g(c) = \prod_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b} (z_i - z'_j).$$

Nous allons calculer un équivalent de  $g(c)$  pour  $c$  grand.

**Lemme 1.** Soient  $z$  et  $z'$  deux points distincts de période  $n$  d'itinéraires respectifs  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$  et  $(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots)$ . Alors pour  $c$  grand on a

$$z - z' \sim \pm(2\sqrt{-c})^{1-k}$$

où  $k$  est le plus petit entier tel que  $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$ .

Ce lemme est laissé au lecteur. Il entraîne en particulier que

$$g(c) \sim \prod_{i,j} \pm(2\sqrt{-c})^{1-k_{ij}} = \pm(2\sqrt{-c})^\alpha$$

où  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Mais  $g$  doit être constant, donc  $\alpha = 0$  et donc  $g \equiv \pm 1$ , ce qui prouve la proposition 3.

Revenons à la démonstration du théorème 1. On a en particulier  $g(0) = \pm 1$ . Posons  $A_0(z) = A(z, 0)$ ,  $B_0(z) = B(z, 0)$  et  $P_{n,0}(z) = P_n(z, 0)$ . De la décomposition de  $P_n$  sur  $\mathbb{Z}[z, c]$  on déduit une décomposition de  $P_{n,0}$  sur  $\mathbb{Z}[z]$ . Ce qui nous donne

$$\prod_{d|n} (z^{2^d} - z)^{\mu(n/d)} = A_0(z)B_0(z), \quad A_0, B_0 \in \mathbb{Z}[z].$$

Comme de plus  $n > 1$ , on a  $\prod_{d|n} z^{\mu(n/d)} = 1$ , donc l'équation ci-dessus devient

$$\prod_{D \in \mathcal{D}} \Phi_D(z) = A_0(z)B_0(z)$$

où

$$\mathcal{D} = \{k : k \mid 2^n - 1\} - \bigcup_{d|n, d \neq n} \{k : k \mid 2^d - 1\}$$

Comme les  $\Phi_D$  sont irréductibles sur  $\mathbb{Q}$ , on a

$$A_0 = \prod_{D \in \mathcal{A}} \Phi_D \quad \text{et} \quad B_0 = \prod_{D \in \mathcal{B}} \Phi_D$$

où  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est une partition de  $\mathcal{D}$ . Donc

$$1 = |\mathbf{res}_z(A_0, B_0)| = \prod_{(u,v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} |\mathbf{res}_z(\Phi_u, \Phi_v)|.$$

Donc si  $u \in \mathcal{A}$  et  $v \in \mathcal{B}$ , on doit avoir  $|\mathbf{res}_z(\Phi_u, \Phi_v)| = 1$ , ce qui dit que le graphe

$$\left\{ (u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : |\mathbf{res}_z(\Phi_u, \Phi_v)| > 1 \right\}$$

(graphe sur  $\mathcal{D}$ ) est non connexe. A fortiori le graphe  $\mathbf{G}$  sur  $\mathcal{D}$  défini par

$$\mathbf{G} = \left\{ (u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : u \neq v, u|v \text{ et } |\mathbf{res}_z(\Phi_u, \Phi_v)| > 1 \right\}$$

est non connexe. Mais quand  $u \neq v$  et  $u|v$ , il se trouve que

$$|\mathbf{res}_z(\Phi_u, \Phi_v)| > 1 \iff \frac{v}{u} \text{ primaire}$$

donc

$$\mathbf{G} = \left\{ (u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : u \neq v, u|v \text{ et } \frac{v}{u} \text{ primaire} \right\}.$$

Mais en fait, on peut prouver que ce graphe est connexe, ce qui donne la contradiction cherchée.

**Proposition 4.** *Le graphe  $\mathbf{G}$  est connexe.*

Ceci repose sur le lemme suivant:

**Lemme 2.** *Pour tout  $n > 1$ , il existe  $p$  premier et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  tel que  $p^\alpha \mid 2^n - 1$ , et pour tout  $d$  divisant strictement  $n$ ,  $p^\alpha \nmid 2^d - 1$ .*

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème de Zsigmondy (voir par exemple [HB2] ou [ZSI]), dont l'énoncé est le suivant:

**Théorème (Zsigmondy).** *Soient  $a$  et  $n$  des entiers plus grands que 1. Si on exclut les cas  $n = 2$ ,  $a = 2^b - 1$  et  $n = 6$ ,  $a = 2$ , alors il existe un nombre premier  $p$  ne divisant pas  $n$  tel que  $p \mid a^n - 1$ , et  $p \nmid a^d - 1$  pour tout  $d$  tel que  $0 < d < n$ .*

Soit donc  $N = 2^n - 1 \in \mathcal{D}$  et  $D$  un autre élément de  $\mathcal{D}$ . Considérons les décompositions de  $N$  et  $D$  en facteurs premiers:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

$$D = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i.$$

Nous devons montrer qu'il existe un chemin de  $\mathbf{G}$  allant de  $D$  à  $N$ . On peut toujours supposer que le ' $p$ ' qui apparaît dans le lemme n'est autre que  $p_1$  et que  $\alpha = \alpha_1$ . Dans ce cas, si  $E$  est un diviseur de  $N$  tel que

$$v_{p_1}(E) = \alpha_1$$

alors  $E \in \mathcal{D}$ ; en effet, pour tout  $d$  divisant strictement  $n$ , on a  $v_{p_1}(2^d - 1) < \alpha_1$ . Considérons donc la suite  $D = D_0, D_1, \dots, D_m = N$  définie par

$$D_k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots p_m^{\beta_m}.$$

Pour tout  $k \in [1, m]$  on a  $v_{p_1}(D_k) = \alpha_1$  et donc la suite  $(D_k)$  est entièrement dans  $\mathcal{D}$ . D'autre part on a  $D_k | D_{k+1}$  et  $D_{k+1}/D_k$  primaire pour tout  $k$ . Ce qui nous donne le chemin cherché et prouve la proposition 4, et donc achève la démonstration du théorème 1.

## II. Calcul du genre

### 1. Le cas général

Maintenant qu'on sait que  $(X_n)$  est une courbe algébrique irréductible, on peut se demander quel est le genre de la courbe normalisée  $(\tilde{X}_n)$ , et, en particulier, pour quelles valeurs de  $n$  la courbe est unicursale. La méthode de calcul m'a été suggérée par J. Milnor, à partir du cas particulier où  $n$  est premier. Le résultat est le suivant :

**Théorème 2.** *Le genre  $g_n$  de la courbe normalisée  $(\tilde{X}_n)$  est donné par*

$$g_n = 1 + \frac{n-3}{4} \nu_2(n) - \frac{1}{4} \sum_{d|n, d \neq n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) d \nu_2(d).$$

*Preuve du théorème 2.* On considère l'application méromorphe sur  $(\tilde{X}_n)$  définie par  $(z, c) \mapsto c$  que nous noterons 'c'. On peut calculer le genre par la formule

$$2 - 2g = \text{nb de pôles de } dc - \text{nb de zéros de } dc,$$

les zéros et pôles étant comptés avec multiplicité.

Notons tout d'abord que chacune des  $\nu_2(n)/2$  branches à l'infini admet un paramétrage régulier par  $\omega = (-c)^{-1/2}$ . Comme  $c = -\omega^{-2}$ , on voit que  $dc$  admet un pôle triple en chacun des points à l'infini. Il y a donc  $\frac{3}{2}\nu_2(n)$  pôles.

Maintenant, les zéros. Soit  $(z, c_0)$  un point en lequel  $dc = 0$ . Il y a deux possibilités. Supposons d'abord que  $z$  soit de période exactement  $n$ , c'est-à-dire que  $c_0$  soit une racine de composante hyperbolique primitive. Une coordonnée locale au voisinage de ce point est la fonction  $z : (z, c) \mapsto z$ ; localement la fonction  $z \mapsto c$  est un revêtement de degré 2, donc  $dc$  admet un zéro simple en ce point.

Deuxième possibilité:  $z$  est de période  $d$  divisant strictement  $n$ , ou, ce qui revient au même,  $c_0$  est une racine d'une composante hyperbolique de période  $n$  satellite immédiat d'une composante (non nécessairement primitive) de période  $d$ . Ici encore, la fonction 'z' donne une coordonnée locale, et on voit que l'application  $z \mapsto c$  est de degré  $\frac{n}{d}$ , donc  $dc$  a un zéro de multiplicité  $\frac{n}{d} - 1$ .

Donnons nous  $c_0$  racine d'une composante de  $\mathbf{M}$  de période  $n$ . Si  $c_0$  est racine d'une composante primitive, le nombre de  $(z, c_0) \in (X_n)$  en lesquels  $dc = 0$  vaut  $n$ . Le nombre

de zéros de  $dc$  correspondant à cette valeur de  $c_0$  est donc  $n$ . En revanche, si  $c_0$  est une racine d'une composante de période  $n$  satellite immédiat d'une composante de période  $d$ , alors le nombre de points  $(z, c_0) \in (X_n)$  en lesquels  $dc = 0$  vaut  $d$  (puisque le cycle parabolique est de longueur  $d$ ). Le nombre de zéros de  $dc$  correspondant à cette valeur de  $c_0$  est donc  $d\left(\frac{n}{d} - 1\right)$ .

Notons  $\pi_n$  le nombre de composantes primitives de période  $n$  de  $\mathbf{M}$  et  $\pi_{n,d}$  le nombre de composantes de période  $n$  qui sont satellites d'une composante de période  $d$ . Soit  $d$  un diviseur de  $n$ ; on sait que chaque composante de période  $d$  porte  $\varphi(n/d)$  composantes satellites de période  $n$ . Sachant que le nombre total de composantes hyperboliques de période  $n$  vaut  $\frac{1}{2}\nu_2(n)$ , on voit que

$$\pi_{n,d} = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\nu_2(d)$$

et d'autre part

$$\pi_n = \frac{1}{2}\nu_2(n) - \sum_{d|n, d \neq n} \pi_{n,d}.$$

La caractéristique de  $(\tilde{X}_n)$  vaut donc

$$2 - 2g_n = \frac{3}{2}\nu_2(n) - n\pi_n - \sum_{d|n, d \neq n} d\left(\frac{n}{d} - 1\right)\pi_{n,d}$$

ce qui, après substitution de  $\pi_n$  et  $\pi_{n,d}$ , donne la formule du théorème 2.

## 2. Le cas unicursal

Si on calcule le genre pour les petites valeurs de  $n$ , on trouve  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ ,  $g_4 = 2$ ,  $g_5 = 14$ ,  $g_6 = 34$ , etc. On voit que les courbes  $(X_1)$ ,  $(X_2)$  et  $(X_3)$  sont unicursales et il est facile de voir que ce sont les seules (en cherchant une minoration de  $g_n$ ).



La courbe  $X_4$  (genre 2)

Il est facile d'exhiber un paramétrage rationnel pour  $(X_1)$  et  $(X_2)$  parce que ces courbes sont de degré 1 en  $c$ . On peut donc choisir  $z$  comme paramètre:

$$(X_1) : c = z - z^2$$

$$(X_2) : c = -1 - z - z^2$$

Le paramétrage de  $(X_3)$  est plus difficile à trouver. Milnor a proposé la méthode suivante. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ; on cherche un polynôme quadratique  $P(z) = \alpha_\lambda z^2 + \beta_\lambda z + \gamma_\lambda$  tel que

$$P(0) = 1, \quad P(1) = \lambda, \quad P(\lambda) = 0.$$

Ce qui donne

$$\alpha_\lambda = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad \beta_\lambda = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad \gamma_\lambda = 1.$$

Puis on conjugue  $P$  par une transformation affine  $S$  pour le rendre monique et centré: on obtient un polynôme de la forme  $z \mapsto z^2 + c_\lambda$ , avec un cycle de période 3  $(z_\lambda^1, z_\lambda^2, z_\lambda^3)$  qui est l'image par  $S$  du cycle  $(0, 1, \lambda)$ . L'application

$$\lambda \mapsto (z_\lambda^1, c_\lambda)$$

donne ainsi un paramétrage de  $(X_3)$ . Tous calculs faits, on obtient

$$c_\lambda = \frac{-\lambda^6 + 4\lambda^5 - 9\lambda^4 + 8\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - 1}{4\lambda^2(\lambda - 1)^2} \quad \text{et} \quad z_\lambda = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 + 1}{2\lambda(\lambda - 1)},$$

ce qui donne une bijection  $\phi$  de la sphère de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$  avec la courbe normalisée  $(\tilde{X}_3)$ . Cette application a trois pôles  $(0, 1 \text{ et } \infty)$  qui correspondent aux trois points à l'infini de  $(\tilde{X}_3)$ . Or  $(\tilde{X}_3)$  admet un automorphisme  $\kappa$  d'ordre 3 qui est  $(z, c) \mapsto (z^2 + c, c)$ ; on peut se demander quelle est l'application  $\phi^{-1}\kappa\phi$ . C'est une homographie qui doit permuter les pôles de  $\phi$ , qui sont  $0, 1$  et  $\infty$  et être d'ordre 3. Il n'y a que deux possibilités:  $h$ , définie par

$$h(\lambda) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

et  $h \circ h$ . En fait, c'est la première possibilité qui est la bonne: on a

$$c_{h(\lambda)} = c_\lambda \quad \text{et} \quad z_{h(\lambda)} = z_\lambda^2 + c_\lambda.$$

### III. Calcul du groupe de Galois

#### 1. Les motivations

Ici, on considère l'application  $f_c : z \mapsto z^2 + c$  comme une application du corps  $K = \mathbb{C}[c]$  dans lui-même. Cette application admet  $2^n$  points  $n$ -périodiques, tous simples, dans une extension convenable de  $K$ . Et l'équation

$$P_n(z, c) = 0,$$

comme équation en  $z$ , a  $\nu_2(n)$  racines qui sont les points de période exactement  $n$ . Ces racines peuvent être groupées en  $m = \frac{1}{n}\nu_2(n)$  cycles de longueur  $n$ .

On a vu plus haut que cette équation était irréductible. On peut pousser la question un peu plus loin, et chercher le groupe de Galois de  $L$  sur  $K$ , où  $L$  est le corps de décomposition de  $P_n$ . Evidemment, ce groupe de Galois est assujéti à quelques restrictions. Ainsi, si  $\pi \in \text{Gal } L/K$ , alors  $\pi$  commute avec  $f_c$ . Ceci signifie que  $\pi$  envoie un cycle sur un cycle — et en préservant l'orientation.

Ce qu'on aimerait prouver, c'est qu'il n'y a aucune autre restriction imposée sur  $\pi$ , c'est-à-dire que  $G = \text{Gal } L/K$  est effectivement confondu avec le centralisateur de  $f_c$ . En d'autres termes, qu'il n'y a aucune structure algébrique sur les points périodiques de période donnée, si ce n'est le fait que l'image par  $f_c$  d'un point périodique est un autre point périodique.

Mais en fait, il y a d'autres motivations qui sont d'ordre géométrique, liées au fait que le groupe de Galois admet une interprétation en termes de monodromie d'un certain revêtement. On a des résultats comme le suivant (voir par exemple [DOU]) :

**Théorème.** Soit  $P(z, c) \in \mathbb{C}[z, c]$  un polynôme monique en  $z$ . Soit  $\Gamma$  la courbe affine d'équation  $P(z, c) = 0$ ,  $\pi$  la projection sur le plan des  $c$ , et

$$X_P = \left\{ (z, c) \in \Gamma : \frac{\partial P}{\partial z}(z, c) = 0 \right\}.$$

On suppose que  $X_P \neq \Gamma$ . Alors  $\Gamma - \pi^{-1}(\pi(X_P))$  est un revêtement de  $\mathbb{C} - \pi(X_P)$ , et si  $x_0 \in \mathbb{C} - \pi(X_P)$ , et l'image du morphisme

$$\Pi_1(\mathbb{C} - \pi(X_P), x_0) \rightarrow \mathbf{S}_{\pi^{-1}(x_0)}$$

est le groupe de Galois de l'équation  $P = 0$ , considérée comme équation en  $z$  sur le corps  $\mathbb{C}[c]$ . En particulier, la partie régulière de  $\Gamma$  est connexe si et seulement si  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{C}[z, c]$ .

Nous utiliserons ce théorème pour trouver des éléments particuliers de  $G$ .

## 2. Le calcul

**Théorème 3.** *Le groupe de Galois de l'équation*

$$(E_n) : P_n(z, c) = 0,$$

*considérée comme équation en  $z$  sur le corps  $\mathbb{C}[c]$ , est constitué de toutes les permutations des racines qui commutent avec  $z \mapsto z^2 + c$ .*

Les racines de l'équation ci-dessus sont les points périodiques du polynôme  $f_c : z \mapsto z^2 + c$ , comme application de  $K = \mathbb{C}[c]$  dans lui-même (et non pas de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ). Toutes les racines sont simples, et peuvent être regroupées<sup>1</sup> en  $m = \nu_2(n)/n$  cycles de  $n$  points. Si  $\Delta$  désigne l'ensemble des solutions, et si  $\sigma \in \mathbf{S}_\Delta$  est un élément du groupe de Galois, nous avons dit que  $\sigma$  doit commuter avec la permutation

$$\begin{array}{ccc} \sigma_0 : \Delta & \longrightarrow & \Delta \\ z & \longmapsto & z^2 + c. \end{array}$$

Donc si  $H$  est le centralisateur de  $\sigma_0$  et si  $G$  est le groupe de Galois de l'équation, alors  $G$  est inclus dans  $H$ . Le problème consiste à prouver l'inclusion réciproque. Si  $\Delta'$  désigne l'ensemble des cycles de  $\Delta$  (c'est donc un ensemble de cardinal  $m$ ), alors  $H$  agit sur  $\Delta'$ , et par conséquent  $G$  aussi.

---

<sup>1</sup> Il ne s'agit pas d'une décomposition en sous-ensembles algébriques, mais simplement d'une décomposition ensembliste.



**Lemme 3.** *Soit  $J$  un sous-groupe de  $H$  agissant sur  $\Delta'$  comme  $\mathbf{S}_{\Delta'}$ , et contenant un élément  $\tau$  laissant tous les cycles fixes, sauf un sur lequel il agit par permutation circulaire. Alors  $J = H$ .*

*Preuve.* Soit  $\sigma \in H$ ; cet élément va permuter  $\Delta'$  d'une certaine manière, mais par hypothèse il existe  $\sigma' \in J$  qui agit de la même manière. Donc,  $\sigma'' = \sigma \circ (\sigma')^{-1}$  laisse tous les cycles globalement invariants. En d'autres termes,  $\sigma''$  agit par rotation sur les cycles. Or, les itérées de  $\tau$  permettent d'obtenir une rotation quelconque dans un cycle donné, en laissant tous les autres fixes. Et comme  $J$  agit transitivement sur  $\Delta'$ , on peut, par conjugaison, obtenir une rotation quelconque dans n'importe quel cycle, on peut donc obtenir ainsi  $\sigma''$ . Donc  $\sigma''$ , et par suite  $\sigma$ , sont dans  $J$ , ce qu'il fallait démontrer.

Evidemment, on va chercher à prouver que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées, ce qui entraînera le théorème 3. Pour cela, on va utiliser la caractérisation de  $G$  par le théorème du paragraphe précédent. Dans le cas qui nous intéresse, on a  $P = P_n$ ,  $\Gamma = (X_n)$ ,  $X_P$  est l'ensemble des couples  $(z, c)$  en lesquels  $(\partial f^{\circ n} / \partial z) = 1$ , et  $\pi(X_P)$  est l'ensemble des racines des composantes hyperboliques de  $\mathbf{M}$  de période exactement  $n$ .

On est donc ramené à un problème local, qui est de savoir comment les points périodiques sont permutés lorsque  $c$  fait le tour d'une racine de composante hyperbolique. Ici encore, la situation est différente selon que la composante est primitive ou non.

Dans le cas d'une composante de période  $n$  satellite immédiat d'une composante de période  $d$  ( $d$  divisant  $n$ ), si on fait le tour de la racine dans le sens direct, tous les cycles sont laissés fixes, sauf celui qui est proche d'un cycle de période  $d$ , lequel tourne de  $d$  crans, c'est à dire que  $z$  se trouve envoyé sur  $f_c^{\circ d}(z)$ . En particulier, l'action sur  $\Delta'$  est triviale.

Si la composante est primitive de période  $n$ , alors pour  $c$  voisin de la racine, on a deux cycles de période  $n$  très proches l'un de l'autre, et quand  $c$  fait un tour, les deux cycles s'échangent. L'action sur  $\Delta'$  est, dans ce cas, une transposition.

Notons  $G'$  le groupe des permutations de  $\Delta'$  provenant d'un élément du groupe de Galois  $G$ . Nous venons de prouver que  $G'$  est engendré par des transpositions. Par ailleurs, d'après le théorème 1,  $G$  agit transitivement sur  $\Delta$ , donc a fortiori  $G'$  agit transitivement sur  $\Delta'$ . Or :

**Lemme 4 (Yoccoz).** *Soit  $m \geq 1$ , et  $J$  un sous-groupe de  $\mathbf{S}_m$  engendré par des transpositions et agissant transitivement sur  $[1, m]$ . Alors  $J = \mathbf{S}_m$ .*

*Preuve.* Posons  $I = [1, m]$ . Considérons sur  $I$  la relation binaire définie de la manière suivante :  $u \sim v$  si et seulement si  $u = v$ , ou bien  $u \neq v$  et la permutation  $(u, v)$  est dans  $J$ . La relation  $\sim$  est manifestement réflexive et symétrique. Elle est également transitive : supposons  $u \sim v$  et  $v \sim w$  ; laissant de côté les cas triviaux où  $u, v, w$  ne sont pas tous distincts, on voit que  $u \sim w$  ; en effet, on a  $(u, w) = (u, v) \circ (v, w) \circ (u, v) \in J$ . Soient  $I_1, \dots, I_\ell$  les classes d'équivalence de  $\sim$ . Alors :

**Sous-lemme.** *On a  $J = \mathbf{S}_{I_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{I_\ell}$ . En particulier, les orbites de  $J$  sont les  $I_k$ .*

*Preuve.* On sait que  $J$  est engendré par des transpositions :  $\sigma_1, \dots, \sigma_u$ . Chacune de ces transpositions laisse globalement invariante les classes d'équivalence de  $\sim$ , il en est donc de même du groupe  $J$  tout entier. D'autre part, dans chaque classe d'équivalence, toutes

les transpositions sont possibles (par définition de  $\sim$ ), donc toute permutation est possible. Ce qui prouve le sous-lemme.

Utilisons maintenant l'hypothèse que  $J$  agit transitivement. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule orbite, et donc  $J = \mathbf{S}_{[1,m]}$ , ce qui prouve le lemme 4.

Nous avons donc prouvé que  $G' = \mathbf{S}_{\Delta'}$ . D'autre part, il résulte de l'étude locale faite plus haut que  $G$  contient un élément  $\tau$  laissant tous les cycles fixes, sauf un qui tourne d'un cran : il suffit de faire le tour d'une racine de composante de période  $n$  satellite immédiat de la grande cardioïde (dans ce cas  $d = 1$ ). On peut donc appliquer le lemme 3, ce qui nous donne  $G = H$  et prouve le théorème 3.

Le groupe  $G$  est donc le centralisateur de  $\sigma_0 : z \mapsto z^2 + c$ . Ce n'est absolument pas un groupe simple. En effet,  $G$  agit sur l'ensemble des cycles,  $\Delta'$ , et on a donc un morphisme surjectif  $G \rightarrow \mathbf{S}_{\Delta'}$ . Le noyau de ce morphisme est l'ensemble des permutations qui laissent tous les cycles globalement invariants, et qui agissent sur chaque cycle comme une rotation. Le noyau est donc isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$ . On vérifie sans peine que le quotient  $\mathbf{S}_{\Delta'}$  admet un relèvement. Le groupe de Galois est donc un produit semi-direct :

$$G \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m \rtimes \mathbf{S}_m.$$

**Proposition 5.** *L'équation  $P_n = 0$ , comme équation en  $z$ , est résoluble par radicaux si et seulement si  $n \leq 4$ .*

En effet, dès que  $n \geq 5$ , on a  $m \geq 6$  et le groupe  $\mathbf{S}_m$  n'est plus résoluble. En résumé, voici un tableau indiquant, pour les petites valeurs de  $n$ , le nombre  $m$  de cycles, le nombre  $\nu_2(n)$  de points de période exactement  $n$ , le genre  $g_n$  de la courbe d'équation  $P_n = 0$ , le groupe de Galois  $G$  de l'équation et son cardinal  $\#G = n^m m!$ .

$n$	$m$	$\nu_2(n)$	$g_n$	$G$	$\#G$
1	2	2	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2
2	1	2	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2
3	2	6	0	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	18
4	3	12	2	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathbf{S}_3$	384
5	6	30	14	$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^6 \rtimes \mathbf{S}_6$	11 250 000

On peut maintenant s'intéresser, plus généralement, aux équations

$$F_{k,n}(z) = f_c^{\circ(n+k)}(z) - f_c^{\circ k}(z) = 0,$$

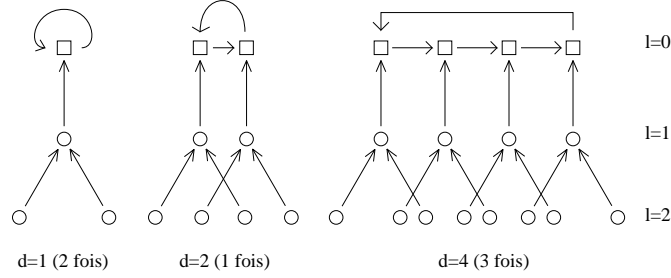
où  $k \geq 0$  et  $n \geq 1$ . Ici encore, on considère que le corps de base est  $K = \mathbb{C}[c]$  et que l'inconnue est  $z$  ; le polynôme  $F_{k,n}$  est monique, de degré  $2^{n+k}$  et toutes ses racines sont simples. Une tel polynôme n'est manifestement pas irréductible (sauf pour  $k = 0$  et  $n = 1$ ) parce que l'ensemble de ses solutions est l'ensemble des points qui tombent sur un cycle de période divisant  $n$  en un temps au plus  $k$ . On peut donc écrire :

$$F_{k,n}(z) = \prod_{0 \leq \ell \leq k, d|n} U_{\ell,d}$$

où  $U_{\ell,d}(z) = 0$  est l'équation des points qui tombent en un temps  $\ell$  sur un cycle de période  $d$ . En particulier, on a simplement  $U_{0,d} = P_d$ .

**Théorème 4.** *Le groupe de Galois de l'équation  $F_{k,n} = 0$  est l'ensemble des permutations des solutions qui commutent avec l'endofonction  $z \mapsto z^2 + c$ .*

Notons  $\Delta_{k,n}$  l'ensemble des solutions. Alors  $\sigma_0 = f_c$  est une endofonction de  $\Delta_{k,n}$  (mais pas une permutation, sauf pour  $k = 0$ ) dont le graphe est constitué de tous les cycles de périodes divisant  $n$ , auxquels sont attachés des arbres de hauteur  $k$  (voir ci-dessous). Si  $H$  désigne l'ensemble des permutations de  $\Delta_{k,n}$  commutant avec  $\sigma_0$ , en d'autres termes, les automorphismes du "système dynamique"  $(\Delta_{k,n}, \sigma_0)$ , alors il est clair, pour la même raison que plus haut, que  $H$  contient le groupe de Galois  $G$ .



En particulier, si  $z \in \Delta_{k,n}$ , les nombres

$$\ell = \min\{u \geq 0 : \exists v \geq 1 \text{ tq } f_c^{o(v+u)}(z) = f_c^{ou}(z)\} \quad \text{et}$$

$$d = \min\{v \geq 1 : f_c^{o(v+\ell)}(z) = f_c^{o\ell}(z)\}$$

sont des invariants pour  $H$ , et donc aussi pour  $G$ , ce qui est une autre manière de dire que le groupe de Galois ne peut pas envoyer un point prépériodique sur un autre de période différente, ou bien qui ne met pas le même temps avant de "tomber" sur un cycle. Si on admet le théorème 4, alors on prouve sans peine que ce sont les seuls invariants pour  $G$ , c'est-à-dire que les polynômes  $U_{\ell,d}$  sont irréductibles.

*Preuve du Théorème 4.* Factorisons le polynôme  $F_{k,n}$  sous la forme  $F_{k,n} = \prod_{d|n} V_{k,d}$  (ainsi  $V_{k,n} = \prod_{0 \leq \ell \leq k} U_{\ell,d}$ ). On va d'abord chercher le groupe de Galois  $G_{k,n}^0$  de l'équation  $V_{k,n} = 0$ . Notons  $\Delta_{k,n}^0$  l'ensemble des solutions, et  $H_{k,n}^0 = \text{Aut}(\Delta_{k,n}^0, \sigma_0)$ . Comme plus haut, il est clair que  $G_{k,n}^0 \subseteq H_{k,n}^0$ , et il s'agit de prouver l'inclusion inverse.

**Proposition 6.** *On a  $G_{k,n}^0 = H_{k,n}^0$ .*

*Preuve de la proposition 6.* Notons tout d'abord que le résultat est vrai pour  $k = 0$  d'après le théorème 3. Il est également vrai pour  $k = 1$  parce que  $D_K(F_{1,n}) = D_K(F_{0,n})$  et  $H_{1,n}^0 = H_{0,n}^0$ . Raisonnons par récurrence sur  $k$ , à  $n$  fixé, en supposant la proposition vraie pour  $k - 1$  (avec  $k \geq 2$ ).

Soit  $\sigma \in H_{k,n}^0$ . Comme tout automorphisme de  $\Delta_{k,n}^0$ ,  $\sigma$  laisse  $\Delta_{k-1,n}^0$  globalement invariant. Soit donc  $\tau$  sa restriction à  $\Delta_{k-1,n}^0$ . C'est un élément de  $H_{k-1,n}^0$ , donc de  $G_{k-1,n}^0 = \text{Gal } D_K(V_{k-1,n})/K$ . On peut le relever (non canoniquement) en un élément  $\tau_1 \in G_{k,n}^0$ . Posant alors  $\sigma' = \sigma \circ \tau_1^{-1}$ , on voit que  $\sigma'$  laisse  $\Delta_{k-1,n}^0$  fixe. C'est donc un produit de transpositions :

$$\sigma' = (z_1, z_2)^{\alpha_1} \cdots (z_{2s-1}, z_{2s})^{\alpha_s}$$

où  $\forall i \alpha_i \in \{0, 1\}$ , et  $\Delta_{k,n}^0 - \Delta_{k-1,n}^0 = \{z_1, \dots, z_{2s}\}$  ; on a regroupé par paires les  $z_i$  qui ont la même image par  $\sigma_0$ , ainsi  $\sigma_0(z_{2i-1}) = \sigma_0(z_{2i})$ . Toutes ces transpositions  $(z_{2i-1}, z_{2i})$  commutent, et de plus sont conjuguées par l'action de  $G_{k,n}^0$  parce que celui-ci agit transitivement sur  $\Delta_{k-1,n}^0 - \Delta_{k-2,n}^0$ . Il s'agit donc de prouver que  $G_{k,n}^0$  contient une telle transposition. Admettons provisoirement ce résultat ; on a alors  $\sigma' \in G_{k,n}^0$ , et par suite  $\sigma \in G_{k,n}^0$ , ce qui prouve la proposition 6. Pour obtenir la transposition cherchée, considérons un point de Misiurewicz  $c_0 \in \mathbf{M}$  pour lequel le point critique tombe en  $k$  coups exactement sur un cycle de période exactement  $n$  (ce qui est possible car  $k \geq 2$ ). On sait (voir [DH1]) que  $c_0$  est une racine *simple* de l'équation (en  $c$ ) :

$$(M_{k,n}) : f_c^{\circ(n+k-1)}(c) = f_c^{\circ(k-1)}(c)$$

et que, de plus,  $c$  est une racine simple de l'équation (en  $z$ )  $f_c^{\circ(n+k-1)}(z) = f_c^{\circ(k-1)}(z)$  parce que  $c$  tombe sur un cycle répulsif. Supposons que  $c$  fasse un tour sur un petit cercle autour de  $c_0$ , dans le sens direct. Alors l'équation  $f_c^{\circ(n+k-1)}(z) = f_c^{\circ(k-1)}(z)$  admet une unique solution  $z(c)$  voisine de la valeur critique, et  $z(c) - c$  décrit également un tour autour de 0. Donc les deux points  $k, n$ -préperiodiques qui sont proches de 0, qui sont les deux images réciproques de  $z(c)$  par  $z \mapsto z^2 + c$ , vont s'échanger en faisant chacun un demi-tour autour de 0, et les autres points  $k, n$ -préperiodiques ne seront pas affectés. Ceci nous donne la transposition attendue, et achève la preuve de la proposition 6.

Revenons à la démonstration du théorème 4. De l'égalité  $F_{k,n} = \prod_{d|n} V_{k,d}$  on ne peut pas déduire en général que le groupe de Galois de  $F_{k,n} = 0$  est le produit direct des groupes de Galois des  $V_{k,d}$ , mais dans ce cas particulier c'est vrai. Pour cela, il suffit de remarquer que, dans le théorème cité par Douady, l'ensemble  $\pi(X_{F_{k,n}})$  est simplement la réunion disjointe des  $\pi(X_{V_{k,d}})$ . Par conséquent, le groupe de Poincaré  $\Pi_1(\mathbb{C} - X_{F_{k,n}})$  est le produit libre des groupes  $\Pi_1(\mathbb{C} - X_{V_{k,d}})$ . D'où l'on déduit sans peine que le groupe de Galois  $G_{k,n}$  de l'équation  $F_{k,n} = 0$  est le produit direct des  $G_{k,d}^0$  pour  $d$  divisant  $n$ , ce qui termine la démonstration du théorème 4.

Il est à noter que, ici encore, les groupe  $G_{k,n}^0$  (et à fortiori les  $G_{k,n}$ ) ne sont pas simples. On a une suite de groupes et de morphismes surjectifs (et canoniques)

$$G_{k,n}^0 \rightarrow G_{k-1,n}^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G_{0,n}^0 = G_n$$

dont les noyaux sont des groupes commutatifs du type  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t$ , avec  $t \in \mathbb{N}$ . En particulier,  $G_{k,n}^0$  est résoluble si et seulement si  $G_n$  l'est. Ce résultat n'a rien de surprenant : pour calculer les points préperiodiques, il faut d'abord calculer les points periodiques puis extraire  $k$  fois des racines carrées ( $z \mapsto \sqrt{z-c}$ ).

## Bibliographie du chapitre trois

- [DH1] A. DOUADY et J. H. HUBBARD, *Etude dynamique des polynômes complexes* (première partie), publications mathématiques d'Orsay, 84-02
- [DH2] A. DOUADY et J. H. HUBBARD, *Etude dynamique des polynômes complexes* (deuxième partie), publications mathématiques d'Orsay, 85-04
- [DOU] Adrien et Régine DOUADY, *Algèbre et théories galoisiennes*, Paris, Cedic / Fernand Nathan, 1977.
- [HB2] B. HUPPERT and N. BLACKBURN, *Finite groups* (part two), Springer 1982.
- [HW] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, Clarendon Press 1938.
- [MIL] J. MILNOR, *Cubic maps and the related quadratic maps*, work not for publication.
- [PER] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, Coll. de l'ENSJF, 1985.
- [STE] I. STEWART, *Galois Theory*, London, Chapman and Hall, 1973.
- [ZSI] K. ZSIGMONDY, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. Phys. 3, 265–284 (1892)



# Chapitre 4

## APPLICATIONS DE HENON COMPLEXES





# CHAPITRE 4 : APPLICATIONS DE HENON COMPLEXES

## I. DYNAMIQUE UNILATERALE

### 1. Rappels

Pour  $a, c \in \mathbb{C}$ , on définit l'application de Hénon complexe  $H_{a,c}$  de la façon suivante :

$$H_{a,c} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour  $a = 0$ , la dynamique de  $H_{a,c}$  se ramène à celle du polynôme quadratique  $z \mapsto z^2 + c$ . Pour  $a \neq 0$ , l'application de Hénon est inversible, et son inverse est donné par

$$H_{a,c}^{\circ-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{a}(y^2 + c - x) \end{bmatrix} \end{array}$$

On observe que  $H_{a,c}^{\circ-1}$  est conjugué à  $H_{1/a, c/a^2}$  :

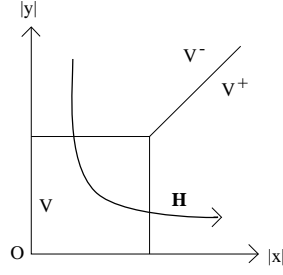
$$H_{a,c}^{\circ-1} = \theta \circ H_{1/a, c/a^2} \circ \theta^{\circ-1},$$

où  $\theta : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ay \\ ax \end{bmatrix}$ . Par conséquent, il est inutile d'étudier le comportement des  $H_{a,c}^{\circ n}$  pour  $n \rightarrow -\infty$  puisque cela revient à étudier les  $H_{1/a, c/a^2}^{\circ n}$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

On peut trouver une constante  $R > 0$  telle que  $R^2 - |a|R - |c| > R$ . Définissons alors les domaines  $V^+$ ,  $V^-$  et  $V$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : |x| \leq R, |y| \leq R \right\}, \\ V^+ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : |x| \geq |y| \geq R \right\}, \\ V^- &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : |y| \geq |x| \geq R \right\}. \end{aligned}$$

On vérifie que  $H(V^-) \subset V^- \cup V$ ,  $H(V) \subset V \cup V^+$  et  $H(V^+) \subset V^+$ . On vérifie également que si  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , et si  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V^+$ , alors  $|x'| > |x|$ . Inversement, si  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in V^-$  alors  $|y| > |y'|$ . Visuellement, ces trois ensembles s'envoient les uns dans les autres de la façon suivante :



Définissons maintenant les ensembles  $K^+$ ,  $K^-$  et  $K$  par

$$K^\pm = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : H^{on} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \not\rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \pm\infty \right\},$$

$$K = K^+ \cap K^-.$$

Manifestement ces trois ensembles sont fermés, et il résulte des propriétés des  $V$  que  $K^\pm \subset V^\mp \cup V$  et  $K \subset V$ . En particulier,  $K$  est compact. Ceci prouve également que si  $H^{on} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \not\rightarrow \infty$ , alors  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  est borné par une “boule” qui ne dépend que de  $a$  et de  $c$ . Tous ces résultats miment exactement le cas des polynômes quadratiques.

On définit les *potentiels*  $h^\pm$  par

$$h^\pm \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \log \left\| H^{on} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|.$$

Ces fonctions sont pluri-sous-harmoniques, harmoniques sur  $\mathbb{C}^2 - K^\pm$ , et nulles sur  $K^\pm$ . Sur  $V^+$ , la fonction  $h^+$  est la partie réelle d’une fonction holomorphe  $\varphi^+$  vérifiant

- (i)  $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V^+$ ,  $\varphi^+ \left[ H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \left[ \varphi^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^2$  et
- (ii)  $\varphi^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim x$  quand  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \infty$  en restant dans  $V^+$ ,

et ces deux propriétés caractérisent  $\varphi^+$ . On définirait  $\varphi^-$  de même.

Dans l’article [HOV], Hubbard donne un modèle topologique du système dynamique  $(\mathbb{C}^2 - K^+, H)$ , comme limite projective de tores pleins s’envoyant les uns dans les autres, et de ce modèle topologique il déduit un modèle holomorphe. Le principal résultat démontré dans ledit article est le suivant : il existe une (et, essentiellement, une seule) fonction holomorphe  $G : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 - K^+$  vérifiant les propriétés suivantes :

(i)  $G$  est un fibré localement trivial, à fibres discrètes et dénombrables. (En particulier  $G$  est surjective).

(ii) Soit  $\omega : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$  définie par  $\omega(u, w) = (u^2, \frac{a}{2} \{w + u^3 - \frac{c}{2}u\})$ , alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\omega} & (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \\ \downarrow G & & \downarrow G \\ \mathbb{C}^2 - K^+ & \xrightarrow{H} & \mathbb{C}^2 - K^+ \end{array}$$

(iii) On a  $G(u, w) = G(u', w')$  si et seulement si il existe  $n \geq 0$  tel que  $\omega^{on}(u, w) =$

$\omega^{\circ n}(u', w')$ .

(iv) Le jacobien de  $G$  en  $(u, v)$  vaut  $2.u^{-1}$ .

Nous nous proposons de retrouver ce résultat par d'autres moyens que ceux de Hubbard, et de retrouver le modèle topologique comme une conséquence des calculs.

## 2. Une relation de récurrence à trois termes

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  posons  $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = H^{\circ n} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Manifestement, on a  $y_n = x_{n-1}$ . On peut donc étudier la suite des itérées de  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  en étudiant la suite  $(x_n)$  ; celle-ci vérifie  $x_0 = x$ ,  $x_{-1} = y$  et (surtout)

$$x_{n+1} = x_n^2 + c - ax_{n-1}.$$

Le point  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix}$  est périodique si et seulement si la suite  $(x_n)$  l'est, et dans ce cas les périodes sont les mêmes. Les conditions  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in K^\pm$  sont équivalentes à  $x_n \not\rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \pm\infty$ .

De plus, sous cette forme, le problème apparaît clairement comme une perturbation de  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Il semble naturel d'adopter la même démarche que dans le cas des polynômes quadratiques, c'est-à-dire étudier le comportement de la suite  $(x_n)$  quand celle-ci tend vers l'infini.

## 3. Recherche d'un développement asymptotique

Supposons que  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in V^+$  ; on a donc  $x_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La première estimation que nous avons est, d'après Hubbard :

$$x_n = u^{2^n} + O(u^{-2^{n-1}}),$$

où  $u = \varphi_+ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix}$ . Comme dans le cas quadratique, on va raffiner l'estimation en écrivant la relation de récurrence sur les  $x_n$  de la manière suivante :

$$x_n = (x_{n+1} - c + ax_{n-1})^{1/2},$$

et en réinjectant dans cette formule les estimations successives. Mine de rien, le terme  $ax_{n-1}$  va faire toute la différence. Partant de  $x_n \sim u^{2^n}$ , et posant  $u^{2^n} = U$ , on obtient successivement (au moins formellement)

$$\begin{aligned} x_n &= U + O(U^{-1/2}), \\ x_n &= U + \frac{a}{2}U^{-1/2} - \frac{c}{2}U^{-2} + \dots \\ x_n &= U + \frac{a}{2}U^{-1/2} - \frac{c}{2}U^{-2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 U^{-9/4} + \left(\frac{a}{2}\right) \left(-\frac{c}{2}\right) U^{-3/2} + \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite, ce qui donne après  $K$  substitutions

$$x_n = U^{-2} \sum_{k=0}^K \left(\frac{a}{2}\right)^k \left[ U^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} U^{2^{-k}} \right] + \dots$$

On aurait donc envie d'écrire le développement asymptotique sous la forme

$$x_n = U^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left[ U^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} U^{2^{-k}} \right] + \dots$$

mais ce développement n'est pas satisfaisant à plusieurs points de vue. Le premier, c'est que les exposants qui interviennent dans le développement sont de la forme  $p/2^k$  avec  $k$  arbitrairement grand, ce qui pose le problème de la définition de  $U^{2^{-k}}$ . Ce problème peut être levé si on considère  $U$  non comme un élément de  $\mathbb{C}$ , mais de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , où  $\widehat{\mathbb{C}}$  est la limite projective de  $\mathbb{C}$  sous l'action de  $z \mapsto z^2$ . Le deuxième problème est plus sérieux : les exposants ne tendent pas vers  $-\infty$  (ce qui donnerait un "vrai" développement asymptotique), mais au contraire s'accumulent sur  $-2$ . Ceci laisse supposer que le développement de  $x_n$  ne dépend pas que de  $U$ , et que plusieurs suites  $x_n$  qui ont le même  $U$  diffèrent par une erreur qui est de l'ordre de  $U^{-2}$ . Pour estimer cette erreur, écrivons  $x_n$  sous la forme

$$x_n = U^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left[ U^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} U^{2^{-k}} \right] + U^{-2} \left( \frac{a}{4} + v_n \right).$$

Nous ne nous posons pas la question de la convergence de la série : tous les calculs sont formels. Et nous considérerons les  $v_n$  comme des constantes vis-à-vis des  $U^{p/2^k}$ . Réécrivant la relation

$$x_{n+1} = x_n^2 + c - ax_{n-1}$$

et en ne gardant que les termes dont l'exposant en  $U$  est au moins égal à  $-1$ , il vient :

$$v_{n+1} = \frac{a}{2} v_n$$

(simple, non ?) Ceci nous permet de préciser le coefficient de  $U^{-2}$  dans le développement asymptotique de  $x_n$  :

$$x_n = U^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left[ U^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} U^{2^{-k}} \right] + U^{-2} \left( \frac{a}{4} + V \right),$$

où on a posé  $V = \left(\frac{a}{2}\right)^n v_0$ . Si on remplace cette expression dans  $-x_{n+1} + x_n^2 + c - ax_{n-1}$ , il ne reste que des termes d'exposant  $< -1$ .

## 4. Du développement asymptotique à une équation fonctionnelle

Cette fois-ci,  $x_n$  dépend de deux paramètres,  $U$  et  $V$ , et quand on passe de  $n$  à  $n+1$ ,  $(U, V)$  se transforme en  $(U^2, \frac{a}{2}V)$ . On a donc envie de prendre cette transformation comme modèle de l'application de Hénon, c'est-à-dire trouver une application

$$f : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \longmapsto f(u, v)$$

telle que les suites  $f(u^{2^n}, (\frac{a}{2})^n v)$  vérifient la relation de récurrence de Hénon, i.e.

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \quad f(u^2, \frac{a}{2}v) = f(u, v)^2 + c - af(u^{1/2}, \frac{2}{a}v).$$

Naturellement on va partir de

$$f_0(u, v) = u^{-2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left( u^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{-k}} \right) \right] + u^{-2} \left( \frac{a}{4} + v \right).$$

Il est à noter que ce  $f$  aurait pu être obtenu par approximations successives, en écrivant l'équation fonctionnelle sous la forme

$$f(u, v) = \left( f(u^2, \frac{a}{2}v) - c + af(u^{1/2}, \frac{2}{a}v) \right)^{1/2}$$

et en partant de  $f'_0(u, v) = u$ . Mais on aurait eu la même difficulté que plus haut, à savoir qu'on n'aurait pas pu trouver les termes correspondant aux exposants  $\leq -2$ . Comme on connaît déjà tous ces termes, l'astuce consiste à réécrire l'équation fonctionnelle sous la forme

$$f(u, v) = \frac{1}{a} \left[ f(u^2, \frac{a}{2}v) + c - af(u^4, (\frac{a}{2})^2 v) \right]$$

et à procéder par approximations successives à partir de  $f_0$ . Ici ça marche, justement parce que les termes jusqu'à  $u^{-2}$  sont corrects : voilà pourquoi il était d'abord nécessaire de calculer ces termes-là.

On obtient donc une série formelle  $f(u, v)$  vérifiant l'équation fonctionnelle donnée plus haut, mais on ne peut éviter le problème de la convergence. Tout d'abord notons que l'expression

$$f_0(u, v) = u^{-2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left( u^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{-k}} \right) \right] + u^{-2} \left( \frac{a}{4} + v \right)$$

avec  $u \in \mathbb{C} - \overline{D}$  et  $v \in \mathbb{C}$ , a un sens comme série formelle, mais ne converge que si  $|a| < 2$ . Par ailleurs, il serait intéressant d'avoir une série en  $u$  et  $v$  dont tous les exposants soient entiers ; évidemment elle ne vérifiera pas exactement la même équation fonctionnelle que  $f$ . L'idée consiste à regrouper les exposants fractionnaires avec  $v$ , en posant

$$w = v + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left( u^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{-k}} \right), \text{ si bien que}$$

$$u^{-2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left( u^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{-k}} \right) \right] + u^{-2} \left( \frac{a}{4} + v \right) = \left( u - \frac{c}{2} u^{-1} \right) + u^{-2} \left( \frac{a}{4} + w \right)$$

et en choisissant  $u, w$  comme nouvelles variables. La règle de transformation  $(u, v) \mapsto (u^2, \frac{a}{2}v)$  devient  $(u, w) \mapsto (u^2, \frac{a}{2}(w + u^3 - \frac{c}{2}u))$ . Si on pose  $f(u, v) = g(u, w)$ , on voit que l'équation fonctionnelle sur  $f$  devient

$$g \left[ u^4, \left( \frac{a}{2} \right)^2 w + \left( \frac{a}{2} \right) \left( u^6 - \frac{c}{2} u^2 \right) + \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( u^3 - \frac{c}{2} u \right) \right] = \\ g \left[ u^2, \left( \frac{a}{2} \right) w + \left( \frac{a}{2} \right) \left( u^3 - \frac{c}{2} u \right) \right]^2 + c - ag(u, v)$$

Maintenant, il est facile de trouver "la" fonction  $g$  qui vérifie cette équation<sup>1</sup> : on part de  $g_0(u, w) = u - \frac{c}{2}u^{-1} + u^{-2}(\frac{a}{4} + w)$  et on définit

$$g_{n+1}[u, w] = \frac{1}{a} \left\{ -g_n \left[ u^4, \left( \frac{a}{2} \right)^2 w + \left( \frac{a}{2} \right) \left( u^6 - \frac{c}{2} u^2 \right) + \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( u^3 - \frac{c}{2} u \right) \right] \right. \\ \left. + g_n \left[ u^2, \left( \frac{a}{2} \right) w + \left( \frac{a}{2} \right) \left( u^3 - \frac{c}{2} u \right) \right]^2 + c \right\}.$$

Cette formule se simplifie notablement si on pose  $\omega(u, w) = (u^2, \frac{a}{2}(w + u^3 - \frac{c}{2}u))$  ; on obtient

$$g_{n+1} = \frac{1}{a} (-g_n \circ \omega^{\circ 2}) + (g_n \circ \omega)^2 + c.$$

On pourrait vérifier directement que la suite  $g_n$  converge uniformément sur tout domaine du type  $|u| \geq 1 + \varepsilon$ ,  $|w| \leq K |u|^{3/2}$ , par exemple en "transformant la suite  $g_n$  en série". Nous donnerons plus bas une autre démonstration.

Si  $g$  est la fonction limite, définissons

$$G = \begin{bmatrix} g \circ \omega \\ g \end{bmatrix}.$$

Il est alors immédiat que  $G \circ \omega = H \circ G$ . On démontrerait également que la suite de fonctions

$$H^{\circ -n} \circ \begin{bmatrix} g_0 \circ \omega \\ g_0 \end{bmatrix} \circ \omega^{\circ n}$$

converge uniformément vers  $G$  quand  $n \rightarrow +\infty$  sur tout domaine de la forme indiquée plus haut. Voir le paragraphe suivant pour une démonstration. Pour le calcul numérique de  $G$ , c'est cette formule qui est la plus commode ; il faut simplement prendre garde à l'accumulation des erreurs d'arrondi qui peut être très importante.

Par ailleurs, les développements limités des  $g_n$  se prolongent les uns les autres et permettent de trouver le développement en série<sup>2</sup> de  $g$  :

$$g(u, w) = u - \frac{c}{2}u^{-1} + \left( \frac{a}{4} + w \right) u^{-2} - \frac{c}{2}u^{-3} \\ - \frac{c}{4a}(a^2 - c + 2)u^{-4} + \frac{1}{4}(2a(w + 1) + c^2)u^{-5} \\ + \dots$$

<sup>1</sup> Cette fonction est effectivement uniquement déterminée si on impose des conditions de croissance sur  $g$ .

<sup>2</sup> Attention, cette fois-ci il ne s'agit pas d'une série asymptotique, mais d'un vrai développement de Laurent, convergent pour  $|u| > 1$  et  $w$  quelconque.

## 5. Plan de la démonstration

A partir des formules donnant  $F$  et  $G$ , et des propriétés attendues pour ces fonctions (en particulier la surjectivité), on est en droit de penser que si deux suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  tendent vers l'infini, et vérifient

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 + c - ax_{n-1} \\x'_{n+1} &= x_n'^2 + c - ax'_{n-1}\end{aligned}$$

alors, soit  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  n'ont pas le même  $\varphi^+$  (à un facteur multiplicatif du type  $\exp(2i\pi p2^{-q})$  près), et dans ce cas les deux suites n'ont rien à voir l'une avec l'autre, soit elles ont le même  $\varphi^+$  et dans ce cas on a  $x_n - x'_n \sim \text{Cste.}x_n^{-2}$ . On est donc amené à poser les définitions et le problème suivants :

**Définition a.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite telle que  $x_n \rightarrow \infty$  et  $x_{n+1}/x_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . On dira que la suite  $(x_n)$  est de Hénon si

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad -x_{n+1} + x_n^2 + c - ax_{n-1} = 0$$

et qu'elle est presque de Hénon si

$$-x_{n+1} + x_n^2 + c - ax_{n-1} = oo(x_n^{-1}).$$

Dans cet énoncé, la notation  $u_n = oo(v_n)$  signifie que  $\sum_{n_0}^{+\infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \infty$ .

**Définition b.** Soient  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  deux suites presque de Hénon. On dira que ces suites sont voisines si  $x_n - x'_n = O(x_n^{-2})$  et jumelles si  $x_n - x'_n = o(x_n^{-2})$ .

Il s'agit manifestement de relations d'équivalence. Maintenant nous pouvons énoncer la

**Proposition.** Soit  $(x_n)$  une suite presque de Hénon. Alors il existe une et une seule suite  $(y_n)$  de Hénon jumelle de  $(x_n)$ . En particulier, deux suites de Hénon jumelles sont égales.

Pour prouver cette proposition, on pourrait une "distance" entre suites presque de Hénon de la manière suivante :

$$j_\infty(x_n, x'_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x'_n| x_n^2.$$

Cette fonction est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire mais n'est pas vraiment une distance, car elle peut prendre les valeurs 0 et  $\infty$ . En fait, on a plutôt intérêt à utiliser les "distances"

$$j_{n_0}(x_n, x'_n) = \sup_{n \geq n_0} |x_n - x'_n| x_n^2$$

qui, au moins, ne valent zéro que lorsque les suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  sont égales (à partir d'un certain rang), mais on tombe sur un autre problème : elles ne vérifient pas l'inégalité triangulaire ! Ceci est dû à la non-linéarité apportée par le facteur  $x_n^2$ . Cependant, l'inégalité triangulaire est "presque" vérifiée, c'est-à-dire à un facteur  $1 + \varepsilon$  près, pourvu que  $|x_n|$  soit assez grand.

Etant donnée une suite presque de Hénon  $X = (x_n)$ , associons-lui la suite  $\mathcal{F}(X) = (x'_n)$  avec  $x'_n = \frac{1}{a}(x_{n+1}^2 + c - ax_{n+2})$ . Manifestement, les points fixes de  $\mathcal{F}$  sont les suites de Hénon. On définit donc  $X_p = \mathcal{F}^{\circ p}(X)$ . Il est facile de voir que les suites  $X_p$  sont presque de Hénon et toutes jumelles. Il reste à prouver que les suites  $X_p$  convergent uniformément sur un domaine du type  $[n_0, +\infty]$ . On vérifie alors que

$$j_{n_0}(X_p, X_{p+k}) \lesssim \sum_{\ell=p}^{p+k-1} x_\ell(-x_{\ell+1} + x_\ell^2 + c - ax_{\ell-1})$$

donc la suite  $X_p$  est de Cauchy pour la distance  $J_{n_0}$ , donc converge uniformément pour  $n \geq n_0$  en une suite qui est de Hénon pour  $n \geq n_0$ . Il ne reste plus qu'à compléter la suite pour tout  $n < n_0$ . Notons  $\text{Aj } X = \lim_p X_p$  l'unique suite de Hénon jumelle à la suite  $X$ . Nous appellerons cette suite l'*ajustée* de  $X$ . Il est à noter que l'application  $\text{Aj}$  commute avec les décalages.

Par ailleurs, si on a une famille de suites  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  qui est *uniformément* (en  $\lambda$ ) presque de Hénon (nous laissons au lecteur le soin d'explicitier ce que ça veut dire), alors l'application  $\text{Aj}$  est continue sur  $\Lambda$  pour la topologie de la convergence simple. On en déduit facilement que si  $X_\lambda$  dépend holomorphiquement de  $\lambda$ , alors  $\text{Aj } X_\lambda$  aussi.

Cette proposition permet de prouver sans trop de peine les énoncés donnés plus haut.

Pour la convergence des  $g_n$ , notons que la relation de récurrence entre les  $g_n$  correspond exactement à appliquer  $\mathcal{F}^n$  à la suite  $X = (g_0 \circ \omega^n)_{n \geq 0}$ . Soit  $g$  la limite des  $g_n$  et  $G = \begin{bmatrix} g \circ \omega \\ g \end{bmatrix}$ . En utilisant un argument d'uniformité, on voit que la convergence des  $g_n$  est uniforme sur tout domaine du type  $|u| > 1 + \varepsilon$ ,  $|w| < K|u|^{3/2}$ .

Elle permet également de donner une autre définition de la fonction  $G$ . Soit  $(u, v) \in (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$  et soit  $(y_n)_{n \geq 0}$  la suite de terme général  $y_n = g_0 \circ \omega^{\circ n}(u, w)$ , et  $(y'_n)$  la suite ajustée ; alors  $G(u, w) = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y_0 \end{bmatrix}$ .

Pour la famille

$$G_n = H^{\circ -n} \circ \begin{bmatrix} g_0 \circ \omega \\ g_0 \end{bmatrix} \circ \omega^{\circ n}$$

c'est un peu plus délicat. Il faut remarquer qu'on peut écrire  $G_n = \begin{bmatrix} x_n^{\prime 1} \\ x_n^{\prime 0} \end{bmatrix}$ , où  $(x_n^{\prime m})_{m \geq 0}$  est l'ajustée de la suite  $(x_n^m)_{m \geq 0}$  définie par

$$x_n^m = \begin{cases} g_0 \circ \omega^{\circ m}(u, w) & \text{si } m \leq n + 1, \\ (x_n^{m-1})^2 + c - (x_n^{m-2}) & \text{si } m > n + 1. \end{cases}$$

Or, quand  $n \rightarrow +\infty$ , la famille de suites  $[(x_n^m)_{m \geq 0}]_{n \geq 0}$  est uniformément presque de Hénon, et converge simplement vers la suite  $x^m = g_0 \circ \omega^{\circ m}(u, w)$ . Il en est donc de même pour leurs ajustées, et donc  $G_n(u, w) \rightarrow G(u, w)$ . Il faut ensuite utiliser l'uniformité en  $u$  et  $w$  pour prouver que la convergence est uniforme sur tout domaine de la forme  $|u| > 1 + \varepsilon$ ,  $|w| \leq K|u|^{3/2}$ .

Une autre propriété essentielle de la fonction  $G$  est sa surjectivité. Pour cela, il s'agit de prouver que si  $(x_n)$  est une suite de Hénon<sup>3</sup>, alors on peut trouver  $(u, w) \in (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$

<sup>3</sup> La suite  $x_n$  tend vers l'infini, conformément à la définition d'une "suite de Hénon" donnée plus haut.



tel que la suite  $z_n = g_0 \circ \omega^n(u, w)$  soit jumelle à  $(x_n)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in V^+$  et prendre  $u = \varphi^+ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix}$ . Posons  $y_n = g_0 \circ \omega^{on}(u, 0)$ . Il s'agit de vérifier que la suite  $(x_n - y_n)y_n^2$  est convergente (nous laissons cet exercice au lecteur), et si on appelle  $w$  la limite, alors la suite  $z_n = g_0 \circ \omega^{on}(u, w)$  est jumelle à  $(x_n)$ , et donc  $G(u, w) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$ .

De cela on déduit sans peine les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) annoncées. Le (ii) est automatique ; pour prouver le (iii), il suffit de remarquer que si  $(u, w)$  et  $(u', w')$  sont tels que  $\forall n \geq 0 \omega^{on}(u, w) \neq \omega^{on}(u', w')$ , alors les suites  $g_0 \circ \omega^{on}(u, w)$  et  $g_0 \circ \omega^{on}(u', w')$  ne sont pas jumelles, et donc leurs ajustées sont différentes ; par conséquent  $G(u, w) \neq G(u', w')$ . Ceci entraîne que la fibre de  $G(u, w)$  est constituée de tous les couples  $(u', w')$ , où  $u'/u$  est une racine  $2^n$ -ième de l'unité, et

$$\left(\frac{a}{2}\right)^n w + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{2}\right)^k \left(u^{3 \cdot 2^{n-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{n-k}}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^n w' + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{2}\right)^k \left(u'^{3 \cdot 2^{n-k}} - \frac{c}{2} u'^{2^{n-k}}\right)$$

ce qu'on peut encore écrire sous la forme  $w' - w = \Delta(u, u')$ , où

$$\Delta(u, u') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{-\ell} \left( \left\{ u^{3 \cdot 2^\ell} - \frac{c}{2} u^{2^\ell} \right\} - \left\{ u'^{3 \cdot 2^\ell} - \frac{c}{2} u'^{2^\ell} \right\} \right).$$

Attention, bien que cette formule ne contienne pas explicitement  $n$ , il faut voir qu'elle n'a aucune signification quand  $u'/u$  n'est pas une racine  $2^n$ -ième de l'unité, la série étant méchamment divergente dans ce cas ; on peut à la rigueur poser  $\Delta(u, u') = \infty$ , ce qui permet d'écrire en toute généralité la relation de Chasles<sup>4</sup>

$$\Delta(u, u') + \Delta(u', u'') = \Delta(u, u'').$$

Donc, la fibre de  $G(u, w)$  est dénombrable, mais à quoi ressemble-t-elle ? Le  $u'$ , lui, décrit une partie dense du cercle de rayon  $|u|$ . Pourtant, la fibre est discrète ! Ceci est lié au fait que quand  $u' = e^{2i\pi p \cdot 2^{-n}} u$  avec  $n$  très grand,  $\Delta(u, u')$  est aussi très grand<sup>5</sup>. En d'autres termes, l'action de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad & \left[ \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z} \right] \times [(\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}] & \longrightarrow & [(\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}] \\ & (\theta, u, w) & \longmapsto & \mathcal{F}_\theta(u, w) = (u', w') \end{aligned}$$

avec  $u' = u \cdot e^{2i\pi\theta}$  et  $w' = w + \Delta(u, u')$ , dont les orbites sont précisément les fibres de  $G$ , est libre et *propre*, et donc les fibres sont homéomorphes à  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z}$ . Cet homéo est loin d'être canonique, puisqu'il nécessite le choix d'un point de la fibre.

Le fait que le fibré  $G$  soit localement trivial est une conséquence de ce que la fonction  $\varphi^+$  est toujours localement définie, or ceci correspond justement<sup>6</sup> à la première coordonnée,  $u$ , dans  $(\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$ . La deuxième coordonnée,  $w$ , se calcule selon le procédé utilisé plus haut pour prouver la surjectivité de  $G$ . On obtient ainsi des trivialisations locales du fibré.

<sup>4</sup> Avec les conventions habituelles, c'est-à-dire fini +  $\infty = \infty$  et  $\infty + \infty =$  n'importe quoi.

<sup>5</sup> En supposant que  $p$  est impair,  $\Delta(u, u')$  est de l'ordre de  $2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} u^{3 \cdot 2^{n-1}}$ .

<sup>6</sup> Pour  $|w| \leq K|u|^{3/2}$  et  $|u|$  assez grand,  $G(u, w) \in V^+$  et  $\varphi^+[G(u, w)] = u^2$ .

Enfin, le calcul du jacobien. On va utiliser la formule

$$G(u, w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H^{\circ -n} \circ G_0 \circ \omega^{\circ n}.$$

Posons  $(u_k, w_k) = \omega^{\circ k}(u, w)$  ; comme  $H$  est de jacobien  $a$  et  $\omega$  de jacobien  $au$ , on a

$$(\text{Jac } G)(u, w) = a^{-n} \cdot (\text{Jac } G_0)(u_n, w_n) \cdot (au_{n-1} \cdots au_0) \sim \frac{2}{u_n} u_{n-1} \cdots u_0 = \frac{2}{u_0}$$

d'où le résultat. En particulier,  $G$  est un difféomorphisme local. Ceci permet de donner une autre preuve (utilisant uniquement la surjectivité de  $G$ ) de l'affirmation selon laquelle  $G$  est localement trivial. Soit  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = G(u_0, w_0)$  et soit  $V$  un petit voisinage de  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  localement difféomorphe à

$$U = \{(u, w) \in (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} : |u - u_0|, |w - w_0| < \varepsilon\}.$$

Alors, au dessus de  $V$ , le fibré est la réunion des disques  $\mathcal{F}_\theta(u, w)$  quand  $\theta$  décrit  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z}$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, par exemple pour

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \inf_{G(u'_0, w'_0) = G(u_0, w_0)} \max(u'_0 - u_0, v'_0 - v_0),$$

tous les disques sont disjoints, et donc le fibré est isomorphe (analytiquement) au fibré trivial sur  $V$  de fibre  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z}$ .

Enfin, signalons un résultat propre au cas réel :

**Proposition.** *On suppose que  $a$  et  $c$  sont réels. Alors l'application*

$$\begin{aligned} G : ]1, +\infty[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - K^+ \\ (u, w) &\longmapsto G(u, w) \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme  $\mathbb{R}$ -analytique, et l'application*

$$\begin{aligned} Ge : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - K^+ \\ (\gamma, w) &\longmapsto G(e^{\gamma/2}, w) \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme symplectique  $\mathbb{R}$ -analytique.*

Il est à noter que, dans les variables  $(\gamma, w)$ , l'application  $\omega$  est de jacobien  $a$ , tout comme  $H$ , ce qui n'est guère surprenant puisque la conjugante est symplectique.

*Preuve.* Il est clair que si  $u$  et  $w$  sont réels, alors le point  $G(u, w)$  est réel. On sait que  $G$  est un difféo local, parce que son jacobien est non nul, et qu'il est injectif sur  $]1, +\infty[ \times \mathbb{R}$  d'après la propriété (iii) de  $G$ . Pour prouver la surjectivité, on peut prendre  $u = \varphi^+$  et trouver  $w$  comme plus haut, mais on peut également donner l'argument suivant : soit  $(u_0, w_0) \in (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$  tel que  $G(u_0, w_0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Alors on a également  $G(\overline{u}_0, \overline{w}_0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . D'après la propriété (iii) de  $G$ , ceci entraîne que  $\overline{u}_0/u_0$  est une racine  $2^n$ -ième de l'unité. Mais si on pose  $u_1 = |u_0|$ , alors  $u_1/u_0$  est une racine  $2^{n+1}$ -ième de l'unité, donc il existe  $w_1$  tel que  $G(u_1, w_1) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Mais alors  $G(u_1, \overline{w}_1) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  puisque  $u_1$  est réel, et en utilisant de nouveau la propriété (iii) il vient  $w_1 = \overline{w}_1$ . D'où la proposition.

## 6. Autres exemples

La méthode exposée ci-dessus, qui permet de deviner la forme de l'équation fonctionnelle à l'aide d'un développement asymptotique du terme général de la suite, peut s'appliquer à d'autres cas que celui de l'application de Hénon. Nous allons donner quelques exemples.

### a. Applications de Hénon généralisées

Sans beaucoup de modifications, on traite le cas des applications de Hénon généralisées :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} P(x) - ay \\ x \end{bmatrix}$$

où  $P$  est un polynôme monique centré de degré  $d \geq 2$ .

On est amené à résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(u^d, \frac{a}{d}v) = P[f(u, v)] - af(u^{1/d}, \frac{d}{a}v)$$

et l'exposant limite est  $-d$ , ce qui signifie que dans le développement de  $f$ , les exposants s'accumulent d'abord sur  $-d$ . Comme plus haut, on peut supprimer cette accumulation et trouver une fonction  $g(u, w)$  ne dépendant que des puissances entières de  $u$  et  $w$ .

### b. Un exemple en dimension trois

Un exemple plus intéressant est donné par la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-2}$$

qui correspond à l'itération de la fonction

$$H' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ z \\ z^2 + x \end{bmatrix}$$

(fonction de jacobien 1). Ici encore, il n'y a que deux possibilités : ou bien  $|x_n|$  reste borné quand  $n \rightarrow +\infty$  (par une constante qu'on peut calculer), soit  $|x_n| \rightarrow \infty$ , et ce à une vitesse bi-exponentielle. On peut définir, comme dans [HOV], un ouvert  $V^+$  et une fonction  $\varphi^+ : V^+ \rightarrow \mathbb{C} - \overline{D}$  telle que  $\varphi^+ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim x$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  et  $y, z$  ne sont pas trop grands par rapport à  $x$ . Posant  $u = \varphi^+ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix}$ , on a, en première approximation,

$$x_n = u^{2^n} + O(u^{-3 \cdot 2^{n-2}}).$$

En écrivant  $x_n = (x_{n+1} - x_{n-2})^{1/2}$  et en réinjectant  $(x_n)$  dans le second membre, on obtient successivement

$$\begin{aligned} x_n &= U + \dots \\ x_n &= U - \frac{1}{2}U^{-3/4} + \dots \\ x_n &= U - \frac{1}{2}U^{-3/4} + \frac{1}{4}U^{-19/16} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ici, l'exposant limite est  $-4/3$ , et le développement de  $x_n$  s'écrit

$$x_n = U^{-4/3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k U^{7 \cdot 4^{-k}/3} + \dots$$

On a un phénomène nouveau : bien que tous les exposants soient de la forme  $p/2^k$ , ce n'est pas le cas de l'exposant limite qui contient un 3 au dénominateur. Ecrivons maintenant

$$x_n = U^{-4/3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k U^{7 \cdot 4^{-k}/3} + U^{-4/3} v_n.$$

En ne considérant que les termes en  $U^{-1/3}$  dans l'équation  $x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-2}$ , on trouve  $2v_n + v_{n-2} = 0$ . Les suites vérifiant cette relation forment un espace vectoriel de dimension 2 engendré par  $(i/\sqrt{2})^n$  et  $(-i/\sqrt{2})^n$ . On est donc amené à poser

$$x_n = U^{-4/3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k U^{7 \cdot 4^{-k}/3} + U^{-4/3} (q_n + r_n)$$

avec  $q_{n+1} = \frac{i}{\sqrt{2}} q_n$  et  $r_{n+1} = \frac{-i}{\sqrt{2}} r_n$ . Ce qui revient à résoudre l'équation fonctionnelle

$$f \circ \omega^{\circ 3} = (f \circ \omega^{\circ 2})^2 + f,$$

où  $\omega : (u, q, r) \mapsto (u^2, \frac{i}{\sqrt{2}} q, \frac{-i}{\sqrt{2}} r)$ .

Ici encore, on peut ne pas être satisfait des exposants fractionnaires ; la solution consiste à les regrouper dans  $q$  et  $r$ , en posant

$$s = q + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^k u^{7 \cdot 2^{-k}/3}$$

$$t = r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^k u^{7 \cdot 2^{-k}/3}$$

et pour éviter les tiers, on pose  $v = u^{1/3}$ . Dans ces nouvelles variables, on a

$$\omega : (v, s, t) \mapsto \left(v^2, \frac{i}{\sqrt{2}} \left(s + \frac{1}{2} v^7\right), \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{2} v^7\right)\right) \quad \text{et}$$

$$f(u, q, r) = g(v, s, t) = v^3 + v^{-4} (s + t) + \dots$$

Cette fonction  $g$  peut par exemple être obtenue par approximations successives, en posant  $g_0(v, s, t) = v^3 + v^{-4} (s + t)$  et  $g_{n+1} = g_n \circ \omega^{\circ 3} - (g_n \circ \omega^{\circ 2})^2$ . On obtient ainsi

$$g(v, s, t) = v^3 + (s + t)v^{-4} - \frac{3}{4}v^{-18} - \frac{1}{2}(s + t)v^{-25}$$

$$- \frac{1}{4}[i\sqrt{2}(s - t) + (s + t)^2]v^{-32} + \frac{3}{2}v^{-60} + \dots$$

et il ne reste plus qu'à poser

$$G = \begin{bmatrix} g \circ \omega^{\circ 2} \\ g \circ \omega \\ g \end{bmatrix}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la proposition suivante :

**Proposition.** *Il existe une fonction holomorphe  $G : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3 - K^+$  telle que*

(i)  *$G$  est un fibré localement trivial à fibres discrètes et dénombrables. En particulier,  $G$  est surjective.*

(ii) *Soit  $\omega : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}^2$  définie par*

$$\omega(v, s, t) = \left( v^2, \frac{i}{\sqrt{2}}(s + \frac{1}{2}v^7), \frac{-i}{\sqrt{2}}(t + \frac{1}{2}v^7) \right).$$

Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\omega} & (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}^2 \\ \downarrow G & & \downarrow G \\ \mathbb{C}^3 - K^+ & \xrightarrow{H'} & \mathbb{C}^3 - K^+ \end{array}$$

(iii) *On a  $G(v, s, t) = G(v', s', t')$  si et seulement si il existe  $n \geq 0$  tel que  $\omega^{\circ n}(v, s, t) = \omega^{\circ n}(v', s', t')$ .*

(iv) *Le jacobien de  $G$  au point  $(v, s, t)$  vaut  $12i\sqrt{2}.v^{-1}$ .*

## 7. Un cadre rigoureux pour le problème formel

Plus haut, nous avons dit que la suite de fonctions définie par

$$\begin{aligned} f_0(u, v) &= u^{-2} \left\{ \frac{a}{4} + v + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k [u^{3.2^{-k}} - \frac{c}{2}u^{2^{-k}}] \right\} \text{ et} \\ f_{n+1}(u, v) &= \frac{1}{a} \left\{ f_n(u^2, \frac{a}{2}v) + c - f_n(u^4, \frac{a^2}{4}v) \right\}, \end{aligned}$$

était formellement convergente. Encore faut-il donner un sens à ces objets et expliciter cette notion de convergence.

Soit  $K$  un corps ou simplement un anneau intègre. Nous noterons  $K[X]$  l'espace des combinaisons linéaires formelles  $\sum_{\alpha \in A} k_\alpha X^\alpha$ , où  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  borné inférieurement et discret à droite, c'est-à-dire que

$$\forall \alpha \in A \exists \varepsilon > 0 \quad ]\alpha, \alpha + \varepsilon[ \cap A = ?.$$

Le lecteur vérifiera sans peine qu'on peut définir la somme et le produit de deux éléments de  $K[X]$ , munissant celui-ci d'une structure de  $K$ -algèbre. On pourrait définir de même  $K[X]$  comme l'ensemble des séries formelles de la forme  $\sum_{\alpha \in A} k_\alpha X^\alpha$ , où  $A$  est fermé, borné supérieurement, et discret à gauche : mais il est clair qu'on peut identifier  $K[X]$  avec  $K[X^{-1}]$ .

Soit  $f \in K[X]$ ,  $f \neq 0$ . Notons-le  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} k_\alpha X^\alpha$ . Alors le nombre

$$\min \{ \alpha \in \mathbb{R} : k_\alpha \neq 0 \}$$

existe et il est fini. Nous le noterons  $v_X(f)$  (valuation de  $f$ ), et nous poserons  $v_X(0) = +\infty$ . Par extension, nous poserons  $v_{X^\alpha}(f) = \frac{1}{\alpha} v_X(f)$  pour tout  $\alpha \neq 0$ . La fonction  $v_X$  possède toutes les propriétés d'une valuation, elle permet donc de définir une norme sur  $K[X]$

par la formule  $\|f\| = \exp[-v_X(f)]$ , par exemple, et on vérifie que  $K[X]$  muni de cette norme est complet. En revanche, il n'est pas vrai que  $K[X]$  soit le complété de l'espace des combinaisons linéaires finies de  $X^\alpha$  ; soit  $\mathcal{F}$  l'algèbre fermée engendrée par les  $X^\alpha$ , alors  $\mathcal{F} \neq K[X]$  ; en effet,  $\mathcal{F}$  est l'espace des  $\sum_{\alpha \in A} k_\alpha X^\alpha$  où  $A$  est fermé, borné inférieurement, et *discret* (ce qui est plus fort que discret à droite).

La formule  $v_X(fg) = v_X(f) + v_X(g)$ , découlant du fait que  $K$  est intègre, implique que  $K[X]$  est également intègre. Et si  $K$  est un corps, alors  $K[X]$  aussi, et l'inversion  $x \mapsto x^{-1}$  est continue. En effet, tout élément de  $K[X]$  peut s'écrire sous la forme  $X^\alpha(1 - u)$ , avec  $v_X(u) > 0$ , et admet donc un inverse donné par  $X^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} u^k$ . On vérifie que cette application  $x \mapsto x^{-1}$  est continue.

Dans l'espace  $\mathbb{C}[a, a^{-1}, c, v][u^{-1}] = \mathbb{C}[a, a^{-1}, c, v][u]$ , la formule définissant  $f_0$  a un sens, et les  $f_n$  sont parfaitement définis par la formule de récurrence. Un calcul direct montre que  $f_1 = f_0 + o(u^{-2})$ , et par conséquent,  $f_1 = f_0 + O(u^{-2-\varepsilon})$  avec  $\varepsilon > 0$  (on peut calculer explicitement  $\varepsilon$ , mais c'est fastidieux). On transforme ensuite la "suite en série" en posant  $\Delta_k = f_k - f_{k-1}$  pour  $k \geq 1$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= f_{k+1} - f_k \\ &= \frac{1}{a} \left[ (f_k^2 - f_{k-1}^2)(u^2, \frac{a}{2}v) - a(f_k - f_{k-1})(u^4, \frac{a^2}{4}v) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ (f_k + f_{k-1}) \cdot \Delta_k(u^2, \frac{a}{2}v) - a\Delta_k(u^4, \frac{a^2}{4}v) \right]. \end{aligned}$$

On prouve par récurrence que  $v_{u^{-1}}(\Delta_k) \geq 2 + 2^k \varepsilon$  ; ce qui entraîne en particulier que les  $f_k$  coïncident jusqu'à l'ordre 2 en  $u^{-1}$ , et permet d'avancer la récurrence d'un cran en utilisant le fait que  $v_{u^{-1}}(f_k + f_{k-1}) = -1$ . La série  $\Delta_k$  est convergente (son terme général tend vers zéro), et donc la suite des  $f_k$  aussi, vers un élément de  $\mathbb{C}[a, a^{-1}, c, v][u]$ .

## 8. Existence de sections invariantes analytiques

Il est un peu surprenant de voir que, dans le problème formel, on tombe sur la série

$$f_0(u, v) = u^{-2} \left[ \frac{a}{4} + v + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k \left[ u^{3 \cdot 2^{-k}} - \frac{c}{2} u^{2^{-k}} \right] \right],$$

série qui a toujours un sens comme série formelle, mais à laquelle il est très difficile d'associer une valeur numérique lorsque  $|a| \geq 2$ .<sup>7</sup> Le fait que  $|a| \geq 2$  aurait-il une signification dynamique ? Par ailleurs, on remarque que  $a = 2$  est l'unique valeur pour laquelle il existe *plusieurs* fonctions  $g$  vérifiant l'équation fonctionnelle  $g \circ \omega^{\circ 2} = (g \circ \omega)^2 - ag$ , parce que si  $g(u, w)$  est une solution, alors  $g(u, w + \text{Cste})$  aussi.

Remarquons d'abord qu'il existe des cas où, topologiquement parlant, la dynamique de l'application ne change pas quand  $a$  traverse le cercle de rayon 2. En effet, pour  $c$  assez

<sup>7</sup> Ce serait un peu plus facile si  $u$  était dans le revêtement universel de  $\mathbb{C} - \overline{D}$ . On peut en effet resommer la série en posant  $u = e^t$ , en développant  $u$  en puissances de  $t$  et en intervertissant les sommations ; on obtient ainsi une fonction méromorphe ayant des pôles pour  $a = 2, 4, 8, \text{etc.}$  Ceci, cependant, est lié au fait que  $u^{2^{-k}}$  converge exponentiellement vite vers 1, ce qui n'est pas le cas si  $u \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

grand, l'application est un fer à cheval complexe (voir [HOV] et [DJE]) et ce pour tout  $a$  pas trop grand devant  $c$ . Les fers à cheval complexes étant tous conjugués, l'application de Hénon reste topologiquement conjuguée à elle-même quand  $a$  traverse le cercle de rayon 2. La réponse, en fait, repose sur l'équation fonctionnelle imposée à  $F$  :

$$F(u^2, \frac{a}{2}v) = H \circ F(u, v).$$

En effet, si une telle fonction de  $(\widehat{\mathbb{C}} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^2 - K^+$  existe, cela entraîne en particulier que l'application  $F_0 : \widehat{\mathbb{C}} - \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}^2 - K^+$  définie par  $F_0(\hat{u}) = F(\hat{u}, 0)$  vérifie  $F_0(\hat{u}^2) = H[F_0(\hat{u})]$ , et en particulier l'image de  $F_0$  (qui est une immersion) est une pro-surface de Riemann invariante par l'application de Hénon. En fait, le résultat est le suivant :

**Théorème.** *Si et seulement si  $|a| < 2$ , il existe une fonction holomorphe  $\sigma : \widehat{\mathbb{C}} - \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}^2 - K^+$  telle que  $\sigma(\hat{u}^2) = H[\sigma(\hat{u})]$ , et pour tout  $\hat{u}$  il existe  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $\sigma(\hat{u}) = G(u, w)$ . De plus, s'il y a existence, alors l'ensemble des solutions a une structure de variété affine de dimension infinie.*

Une autre manière d'écrire la deuxième condition aurait été  $\varphi^+[\sigma(\hat{u})] = u^2$ , mais le problème est que  $\varphi^+$  n'est pas parfaitement définie. Je précise également que dans l'expression  $G(u, w)$ ,  $u$  est la projection de  $\hat{u}$ .

*Preuve.* Notons d'abord que si une telle fonction  $\sigma$  existe, alors le  $w$  (unique) tel que  $\sigma(\hat{u}) = G(u, w)$  dépend continûment, et même analytiquement, de  $\hat{u}$ , parce que  $G$  est un difféo local. Ecrivons  $w = \tau(\hat{u})$ . La condition  $\sigma(\hat{u}^2) = H[\sigma(\hat{u})]$  s'écrit

$$\begin{aligned} \forall \hat{u} \in \widehat{\mathbb{C}} - \overline{D} \quad G(u^2, \tau(\hat{u}^2)) &= H[G(u, \tau(\hat{u}))] \\ &= G(u^2, \frac{a}{2}(\tau(\hat{u}) + u^3 - \frac{c}{2}u)) \end{aligned}$$

(on a utilisé la formule  $H \circ G = G \circ \omega$ ), et d'après la fameuse propriété (iii) de  $G$  ceci équivaut à

$$\forall \hat{u} \in \widehat{\mathbb{C}} - \overline{D} \quad \tau(\hat{u}^2) = \frac{a}{2}\tau(\hat{u}) + \frac{a}{2}\left(u^3 - \frac{c}{2}u\right).$$

Il s'agit donc de savoir si cette équation, qui est affine en  $\tau$ , admet des solutions dans  $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} - \overline{D}, \mathbb{C})$ .

Pour cela, nous utiliserons le fait que tout élément  $\tau$  de  $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} - \overline{D}, \mathbb{C})$  admet un "développement en série de Laurent" du type

$$\tau(\hat{u}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]} \tau_\alpha \hat{u}^\alpha,$$

et ce développement est unique.

Plus précisément, il existe des constantes  $\tau_\alpha$  pour  $\alpha$  décrivant  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  telles que les fonctions

$$\tau^{[n]}(\hat{u}) = \sum_{\alpha \in 2^{-n}\mathbb{Z}} \tau_\alpha \hat{u}^\alpha$$

soient holomorphes pour  $|\hat{u}| > 1$ , et convergent vers  $\tau$  uniformément sur tout compact de  $\widehat{\mathbb{C}} - \overline{D}$ .

Les coefficients  $\tau_\alpha$  peuvent être exprimés sous forme d'intégrales de contour, comme pour une série de Laurent ordinaire. On prouve ainsi que pour toute suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bornée mais telle que  $v_2(\alpha_k) \rightarrow -\infty$ , les coefficients  $\tau_\alpha$  tendent vers zéro.

Revenons à l'équation donnée plus haut. Soient  $\tau_\alpha$  les coefficients de Laurent de  $\tau$  ; identifiant les termes d'exposant  $\alpha$  dans l'équation, il vient

$$\tau_{\alpha/2} = \frac{a}{2}(\tau_\alpha + \delta_{\alpha,3} - \frac{c}{2}\delta_{\alpha,1}).$$

et en particulier, on a  $\tau_\alpha = \frac{a}{2}\tau_{2\alpha}$  pour tout  $\alpha$  entier. Or, la fonction  $\tau^{[0]}$ , comme série en  $u$  doit être de rayon de convergence infini, et cela n'est possible que si  $\tau_\alpha = 0$  pour tout  $\alpha$  entier strictement positif.<sup>8</sup> On en déduit que  $\tau_{3/2} = \frac{a}{2}$ , et par conséquent  $\tau_{3/2^n} = (\frac{a}{2})^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Ces coefficients doivent tendre vers 0, ce qui n'est possible que si  $|a| < 2$ .

Nous avons donc démontré une moitié du résultat, à savoir que le problème est insoluble si  $|a| \geq 2$ . Supposons donc que  $|a| < 2$ . Les seuls coefficients  $\tau_\alpha$  avec  $\alpha > 0$  sont  $\tau_{3/2^n} = (\frac{a}{2})^n$  et  $\tau_{1/2^n} = (-\frac{c}{2})(\frac{a}{2})^n$ . Il est clair que  $\tau_0 = 0$ . Reste les exposants négatifs. La donnée de  $\tau_p$ , pour  $p$  impair strictement négatif, détermine tous les  $\tau_{p/2^n}$  pour  $n$  entier positif ou négatif, et on a  $\tau_{p/2^n} = (\frac{a}{2})^n \tau_p$ , donc finalement

$$\begin{aligned} \tau(\hat{u}) &= \left(\frac{a}{2}\right)\hat{u}^{3/2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\hat{u}^{3/4} + \dots \\ &\quad - \frac{c}{2} \left[ \left(\frac{a}{2}\right)\hat{u}^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\hat{u}^{1/4} + \dots \right] \\ &\quad + \sum_{\substack{p < 0 \\ \text{impair}}} \tau_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{a}{2}\right)^n \hat{u}^{p/2^n} \end{aligned}$$

ce qui définit bien une fonction holomorphe sur  $\widehat{\mathbb{C}} - \overline{D}$ , pourvu que la suite  $(\tau_p)$  tende suffisamment vite vers 0. L'espace des solutions est donc un espace affine de dimension infinie.

## II. LES CAS HAMILTONIEN ET ANTI-HAMILTONIEN

---

<sup>8</sup> S'il n'en était pas ainsi, la rayon de convergence serait au plus 1.



## 1. Introduction

Si deux automorphismes algébriques  $f$  et  $g$  sont conjugués par un automorphisme algébrique  $h$ , alors  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont de jacobien constant et  $\text{Jac } f = \text{Jac } g$ . En particulier, l'application de Hénon  $H_{a,c}$  est de jacobien  $a$ , donc elle ne peut être conjuguée à son inverse que si  $a = a^{-1}$ , donc  $a = \pm 1$ . Réciproquement, on vérifie que pour  $a = \pm 1$ , l'application de Hénon est affinement conjuguée à son inverse. De plus, la conjuguante est involutive. On peut donc écrire (en posant  $h = H_{a,c}$ ) que  $h^{\circ-1} = t \circ h \circ t^{\circ-1}$  avec  $t^{\circ-1} = t$ , ou, ce qui revient exactement au même,  $h = t \circ u$  avec  $t$  et  $u$  involutives. Comme  $h$  est d'ordre infini, le groupe engendré par  $t$  et  $u$  est le groupe diédral infini de présentation  $D = \langle t, u; t^2 = u^2 = 1 \rangle$ . Ce groupe admet  $\langle h \rangle$  comme sous-groupe distingué d'indice 2, isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Ceci fait que la dynamique de  $h$  peut être étudiée via la dynamique de  $D$ .

Pour  $a = 1$ , on a  $h = t \circ u$  avec

$$t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 + c - y \end{pmatrix}.$$

L'application  $t$  est la réflexion "orthogonale" par rapport à la droite  $y = x$ , et  $u$  peut être considérée comme une symétrie par rapport à la parabole  $y = \frac{1}{2}(x^2 + c)$ , dans la direction de l'axe des  $y$ ; les deux applications sont de jacobien  $-1$ .

Pour  $a = -1$ , on a  $h = t \circ u$  avec

$$t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -x^2 - c - y \end{pmatrix}.$$

L'application  $t$  est la symétrie "orthogonale" par rapport à la droite  $y = -x$ , et  $u$  est une "symétrie" non linéaire autour du point fixe  $\begin{pmatrix} 0 \\ -c/2 \end{pmatrix}$ . Ici,  $t$  est de jacobien  $-1$  et  $u$  de jacobien 1.

## 2. Décomposition de l'ensemble des points périodiques

On considèrera ici les points  $n$ -périodiques au sens large, c'est-à-dire les points fixes de  $h^{\circ n}$ , ou encore les points dont la période divise  $n$ . Nous noterons  $\text{PER}(n)$  cet ensemble.

**Proposition.** *Il y a  $2^n$  points  $n$ -périodiques. De plus, pour  $a$  fixé, ces points sont tous distincts pour  $c$  assez grand.*

*Preuve.* Il est difficile de donner une preuve sans définir la multiplicité d'un point dans un ensemble algébrique, donc nous allons faire comme si nous savions ce que c'est que le "nombre de points" d'un ensemble algébrique. Notons que la donnée d'un point  $n$ -périodique  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$  équivaut à la donnée d'un  $n$ -uplet  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  tel que

$$\forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad x_{n+1} = x_n^2 + c - ax_{n-1}.$$

On a un système de  $n$  équations quadratiques, donc on a  $2^n$  solutions, et on vérifie qu'il n'y a aucune solution à l'infini. Par ailleurs, pour  $c$  suffisamment grand, l'application de Hénon se comporte comme un fer à cheval complexe, et donc a  $2^n$  points  $n$ -périodiques distincts.

Donc,  $\text{PER}(n)$  est de cardinal  $2^n$ . On va plutôt prendre  $K = \mathbb{C}[c]$  comme corps de base ( $a$  est fixé, par contre) pour éviter des situations non génériques. Dans ce cadre, tous les points de  $\text{PER}(n)$  sont distincts, et leurs coordonnées se trouvent dans une extension convenable de  $K$ . Evidemment, cet ensemble n'est pas irréductible puisqu'il contient des points de période strictement inférieure à  $n$ . On pose donc

$$\text{PER}(n) = \bigcup_{d|n} \text{Per}(d),$$

où  $\text{Per}(n)$  est l'ensemble des points de période exactement  $n$ , et qui est de cardinal  $\nu_2(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})2^d$ . Cet ensemble est constitué de  $m = \nu_2(n)/n$  cycles de longueur  $n$ . Et comme  $t$  conjugue  $h$  en  $h^{\circ-1}$ , il envoie un point périodique sur un point périodique de même période. On a donc une action de  $D$  sur l'ensemble des points périodiques, et en particulier sur  $\text{Per}(n)$ .

Soit  $x$  un point périodique, et  $C$  le cycle contenant  $x$ , c'est-à-dire son orbite sous l'action de  $\langle h \rangle$ , alors son orbite sous  $D$  sera  $C \cup t(C)$ . Là, deux choses peuvent se produire : soit  $t(C) \neq C$ , et on dira que le cycle  $C$  est *chiral*, soit  $t(C) = C$  et on dira que  $C$  est non chiral. On dira également qu'un point est chiral ou pas selon qu'il appartient à un cycle chiral ou non, c'est-à-dire selon que sa  $D$ -orbite est de cardinal  $2n$  ou  $n$ .

Supposons que  $C$  soit un cycle non chiral, i.e.  $t(C) = C$ . Sur  $C$ ,  $h$  agit par permutation circulaire, et de la relation  $t \circ h \circ t^{-1} = h^{\circ-1}$  on déduit que  $t$  renverse l'orientation du cycle. Le système dynamique  $(C, h, t, u)$  est conjugué à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto x+1, x \mapsto -x+b, x \mapsto -x+b-1)$ . Là, plusieurs cas peuvent se présenter.

(1) Premier cas :  $n$  est impair. Dans ce cas,  $t$  a un unique point fixe sur  $C$ . Si on appelle *point axial*<sup>9</sup> un point fixe pour  $t$ , alors chaque cycle non chiral contient exactement un point axial. Par ailleurs,  $u$  admet également un unique point fixe, ce que nous appellerons un *point parabolique*.<sup>10</sup>

(2) Second cas :  $n$  est pair. Ce cas se subdivise lui-même en deux selon que  $b$  est pair ou impair. (2a):  $b$  est pair : dans ce cas, le cycle contient deux points axiaux et zéro point parabolique. (2b):  $b$  est impair, et le cycle contient zéro point axial et deux points paraboliques.

Dans les deux cas, chaque cycle non chiral contient deux points "remarquables" (axiaux ou paraboliques). Le calcul de ces points est particulièrement aisé puisqu'on peut directement éliminer l'une des coordonnées ( $x = y$  ou  $\frac{1}{2}(x^2 + c)$ ). Encore faut-il, pour que les remarques ci-dessus aient un intérêt, qu'il existe suffisamment de cycles non chiraux.

<sup>9</sup> Cette terminologie vient de ce que pour  $a = 1$ , un point est axial si et seulement s'il se trouve sur l'axe  $x = y$ .

<sup>10</sup> Voir la remarque précédente ; pour  $a = 1$ , les points paraboliques sont ceux situés sur la parabole d'équation  $y = \frac{1}{2}(x^2 + c)$ .

### 3. Une autre interprétation du groupe diédral

Nous avons dit plus haut qu'il revient au même de se donner un point  $n$ -périodique  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$  que de se donner un  $n$ -uplet circulaire  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ . Que devient ce "collier" quand on applique  $h$ ,  $t$  ou  $u$  au point  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$  ?

#### a) Le cas hamiltonien

Le plus simple, c'est  $h : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$  avec  $x_1 = x_0^2 + c - x_{-1}$ . Le collier obtenu est  $x'_k = x_{k+1}$ , c'est-à-dire qu'on décale la suite d'un cran vers la gauche.

L'application  $t$  permute  $x_0$  et  $x_{-1}$ , et comme elle commute avec  $h$ , on voit que le collier obtenu est  $x'_k = x_{-k-1}$ . Enfin, comme  $u = t \circ h$ , on voit que  $u$  transforme  $(x_k)$  en  $(x'_k)$  avec  $x'_k = x_{-k}$ .

On voit donc que l'action de  $D$  correspond exactement à l'action géométrique du groupe diédral :  $h$  correspond à une rotation d'un  $n$ -ième de tour, et  $t$  et  $u$  sont deux réflexions dont les axes font un angle d'un  $2n$ -ième de tour.

Nous sommes maintenant en mesure de compter le nombre de points axiaux et paraboliques.

**Théorème.** *Dans  $\text{PER}(n)$ , il y a  $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$  points axiaux et  $2^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}$  points paraboliques. Dans  $\text{Per}(n)$ , il y a donc  $\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$  points axiaux et  $\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}$  points paraboliques. Dans ces formules, les crochets représentent la partie entière.*

De plus ces résultats sont vrais pour tout  $c$ , pas seulement pour  $c$  générique.

*Preuve.* Commençons par le cas où  $n$  est impair. Se donner un point  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$  périodique axial revient à se donner un collier  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  avec  $x_{k+1} = x_k^2 + c - ax_{k-1}$  et  $x_k = x_{-k-1}$ . Il n'y a donc que  $k = \frac{1}{2}(n+1)$  inconnues effectives, qui sont  $x_0, \dots, x_{k-1}$ , et  $k$  équations effectives, toutes de degré 2, et sans solution à l'infini. Il y a donc  $2^{\frac{n+1}{2}}$  points axiaux. Le même raisonnement donnerait  $2^{\frac{n+1}{2}}$  points périodiques. On vérifie donc ce qui a été dit plus haut, à savoir qu'il y a un point axial et un point parabolique dans chaque cycle non chiral.

Si  $n$  est pair, le même raisonnement s'applique, à ceci près que pour le comptage des points axiaux, on a  $\frac{n}{2}$  inconnues effectives, et autant d'équations quadratiques, ce qui fait un total de  $2^{\frac{n}{2}}$  points axiaux, alors que pour le comptage des points paraboliques il y a  $\frac{n+2}{2}$  inconnues et équations effectives, ce qui fait  $2^{\frac{n+2}{2}}$  points paraboliques.

**Corollaire.** *Tous les cycles de longueur  $\leq 5$  sont non chiraux.*

Et 6 est la plus petite période pour laquelle il existe des cycles chiraux : sur neuf cycles, deux sont chiraux.

## b) Le cas anti-hamiltonien

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé le fait que la relation  $x_{k+1} = x_k^2 + c - x_{k-1}$  était invariante par translation, mais aussi par renversement, c'est-à-dire en remplaçant  $x_k$  par  $x_{-k}$ . Dans le cas anti-hamiltonien

$$x_{k+1} = x_k^2 + c + x_{k-1},$$

on remarque que la formule garde sa forme quand on remplace  $x_k$  par  $-x_{-k}$ . Ceci, en fait, est équivalent à dire que  $t$  conjugue  $h$  en  $h^{\circ-1}$ .

Si, comme plus haut, on identifie un point périodique  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$  avec le collier de Hénon  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ , alors l'action de  $D$  peut être décrite de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} h \\ t \\ u \end{array} \right\} : x_k \mapsto x'_k \quad \text{avec} \quad x'_k = \begin{cases} x_{k-1} & \text{(décalage)} \\ -x_{-k-1} & \text{(symétrie autour de } -\frac{1}{2}) \\ -x_{-k} & \text{(symétrie autour de 0)} \end{cases}$$

Pour le comptage, les choses se gâtent sérieusement par rapport au cas hamiltonien ; ainsi il n'existe évidemment qu'un seul point parabolique, c'est  $\begin{pmatrix} 0 \\ -c/2 \end{pmatrix}$ . Et, génériquement, ce point ne sera pas périodique.<sup>11</sup> Par conséquent, tous les cycles seront chiraux (au moins génériquement) pour  $n$  impair. Pour  $n$  pair, le cas où un cycle contient un point parabolique est non générique, il suffit donc de compter les points axiaux. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on montre qu'il y a  $2^{n/2}$  points périodiques axiaux.

## 4. Comptage des points périodiques axiaux et paraboliques à l'aide des fers à cheval complexes

Pour  $a$  fixé (dans notre cas  $a$  vaut  $\pm 1$ ) et  $c$  très grand, la dynamique de  $h$  sur  $K$  est conjuguée à un décalage de Bernoulli. Ceci vient de ce que les  $x_k$  sont très proches de l'une des racines carrées de  $-c$ . Si je choisis l'une de ces racines, et que je colorie le point  $k$  en blanc ou en noir selon que  $x_k$  est proche de celle-là ou de l'autre, j'obtiens un homéomorphisme entre  $K$  et  $\{\text{Blanc, Noir}\}^{\mathbb{Z}}$ . L'action de  $h$  se traduit par un décalage d'un cran vers la gauche,  $t$  par un renversement autour du point  $-\frac{1}{2}$  et  $u$  par un renversement autour de 0 (avec, de plus, changement de couleur si  $a = -1$ ). Et un point  $n$ -périodique revient à se donner un collier de  $n$  perles blanches ou noires. Affirmer que ce point est chiral revient à dire que le collier est différent de son image dans un miroir (dans le cas anti-hamiltonien, il faut également imaginer que le miroir *inverse* les couleurs). Affirmer que le point est parabolique (resp. axial) revient à dire qu'il existe un renversement du collier qui laisse une perle fixe (resp. qui échange deux perles consécutives). On retrouve ainsi tous les résultats des paragraphes précédents par des arguments uniquement combinatoires.

Par exemple, dans le cas hamiltonien, il est facile de voir que si on enfile au plus cinq perles blanches ou noires sur un collier, le collier présentera toujours un axe de symétrie. Les plus petits colliers chiraux contiennent six perles : il y en a seulement deux, énantiomorphes l'un de l'autre (voir figure ci-dessous).

<sup>11</sup> En particulier, si  $h$  est un fer à cheval complexe, l'origine n'est pas dans  $K$ .

Voici en résumé, deux tableaux indiquant le nombre de points axiaux et paraboliques dans les cas hamiltonien et anti-hamiltonien.

Cas hamiltonien ( $a = 1$ )						
$n$	Points axiaux	Points parab.	Cycles*			C/T (%)
			NC	C	T	
1	2	2	2	0	2	0 %
2	0	2	1	0	1	0 %
3	2	2	2	0	2	0 %
4	2	4	3	0	3	0 %
5	6	6	6	0	6	0 %
6	4	10	7	2	9	22 %
7	14	14	14	4	18	22 %
8	12	24	18	12	30	40 %
9	28	28	28	28	56	50 %
10	24	54	39	60	99	61 %
11	62	62	62	124	186	67 %
12	54	108	81	254	335	76 %

\* NC : non chiraux, C : chiraux, T : total.

Dans le cas anti-hamiltonien, il n'y a génériquement pas de points axiaux ou paraboliques pour  $n$  impair ; pour  $n$  pair, il n'y a — génériquement — que des points axiaux.

Cas anti-hamiltonien ( $a = -1$ ) générique					
$n$	Points axiaux	Cycles*			C/T (%)
		NC	C	T	
2	2	1	0	1	0 %
4	2	1	2	3	67 %
6	6	3	6	9	67 %
8	12	6	24	30	80 %

\* NC : non chiraux, C : chiraux, T : total.

## 5. Existence de points homoclines dans le cas hamiltonien

Si  $G$  est un point périodique hyperbolique, on note  $W^s(G)$  et  $W^u(G)$  ses variétés stable et instable, et  $W_*^s(G)$ ,  $W_*^u(G)$  les mêmes variétés privées du point  $G$ .

La situation dans le cas réel est connue :

**Théorème (Devaney).** *On suppose que  $a = \pm 1$  et que  $c$  est réel, et que  $G$  est un point fixe réel hyperbolique de  $H_{a,c}$ . Alors les variétés stable et instable de  $G$  admettent une intersection transverse réelle autre que  $G$ .*

Ceci entraîne en particulier que l'application de Hénon réelle, quand elle a deux points fixes, est d'entropie  $> 0$ . Ce résultat est prouvé dans [DEV] (référence complète ?)

Ici, nous nous placerons dans le cas  $a = 1$ , et  $c$  complexe quelconque, et nous nous proposons de prouver que les variétés stable et instable d'un point fixe s'intersectent. Ce résultat n'est ni plus fort, ni plus faible que celui de Devaney : le cas traité par Devaney ne concerne que le cas où  $c$  et le point fixe hyperbolique sont réels, mais sous ces hypothèses le résultat est plus fort, puisqu'il prouve qu'il existe un point homocline réel et transverse, et d'autre part le même résultat est vrai dans le cas anti-hamiltonien. Le résultat que nous allons prouver est le suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $G$  un point périodique hyperbolique, et  $G_0, G_1, G_2$  les points définis par  $G_k = t \circ h^{\circ k}(G)$ . Alors*

$$W_*^u(G) \cap [W_*^s(G_0) \cup W_*^s(G_1) \cup W_*^s(G_2)] \neq ?.$$

**Théorème 2.** *Même énoncé, en remplaçant  $G_0, G_1, G_2$  par  $G_{2p}, G_{2p+1}, G_{2p+2}$ , où  $p$  est un entier relatif quelconque.*

**Corollaire.** *Soit  $F$  l'un des points fixes de  $h$ . Si  $F$  est hyperbolique, alors  $W_*^u(F) \cap W_*^s(F) \neq ?$ .*

Evidemment ces résultats sont très en deça de ce qu'on peut espérer, à savoir que la variété instable de tout point périodique hyperbolique intersecte la variété stable de tout autre (ainsi que la sienne) en une infinité d'orbites hétéro(homo)clines. De plus, ces résultats sont valables seulement pour  $a = 1$ . Et puis ils reposent sur un miracle :

**Lemme.** *Soient  $V_0, V_1, V_2$  les ensembles de points fixes de  $t \circ h^{\circ k}$  pour  $k = 0, 1, 2$ . Alors ces trois courbes appartiennent à une même famille linéaire de courbes algébriques.*

**Corollaire.** *Il en est de même pour les courbes  $V_{2k}, V_{2k+1}$  et  $V_{2k+2}$ .*

*Preuve du lemme.* Les équations de  $V_0, V_1, V_2$  sont

$$V_0 : y = x$$

$$V_1 : y = (x^2 + c)/2$$

$$V_2 : y = (x^2 + c) - x$$

La famille cherchée est donc

$$C_a : y = \frac{1}{2}(x^2 + c) + a\left[\frac{1}{2}(x^2 + c) - x\right],$$

et le paramètre  $a$  de la courbe passant au point  $(x, y)$  est donc

$$a(x, y) = \frac{y - \frac{1}{2}(x^2 + c)}{\frac{1}{2}(x^2 + c) - x}.$$

Il n'est pas défini pour  $x = y = \frac{1}{2}(x^2 + c)$ , c'est-à-dire si  $(x, y)$  est un point fixe de  $h$ .

Maintenant, soit  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^2$  un paramétrage holomorphe de la variété instable  $W^u(G)$  vérifiant  $\forall z f(\lambda z) = h(f(z))$ , où  $\lambda$  est la valeur propre expansive de  $h'(G)$ . Soit  $f_*$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{C}^*$ . Comme  $f$  est injective, il en est de même de  $f_*$ , et de plus  $f_*$  évite  $f(0) = G$ .

**Lemme.** *L'image de  $f_*$  ne peut éviter à la fois  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .*

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\text{Im } f_*$  évite  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_2$ . Alors elle évite en particulier les points fixes  $F_1$  et  $F_2$  de l'application de Hénon. Par conséquent, la fonction  $a \circ f_*$  est bien définie ( $a : (x, y) \mapsto a(x, y)$  est donné par la formule ci-dessus), elle est méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , et elle évite les valeurs 1, 0 et  $-1$ . Elle est donc constante. Mais cela signifie que  $f_*$  prend ses valeurs dans l'une des courbes  $C_b$  de la famille linéaire. Comme surface de Riemann,  $C_b$  est un plan (et  $x$  est une coordonnée). Et l'image de  $f_*$ , contenue dans ce plan, doit éviter les points  $F_1$ ,  $F_2$  et  $G$ . Parmi ces trois points, deux au moins sont distincts sinon on aurait  $F_1 = F_2 = G$ , et dans ce cas  $G$  ne serait pas hyperbolique. Une fonction holomorphe non constante sur  $\mathbb{C}^*$  ne peut éviter deux points, ce qui donne la contradiction cherchée, et prouve le théorème 1. Le théorème 2 se démontre de même en considérant la famille linéaire passant par  $V_{2p}$ ,  $V_{2p+1}$  et  $V_{2p+2}$ .

### III. ETUDE PERTURBATIVE DE L'APPLICATION DE HENON

Soit  $c_0$  tel que le polynôme  $z \mapsto z^2 + c_0$  soit hyperbolique. Alors, pour  $(a, c)$  suffisamment proche de  $(0, c_0)$ , on peut étudier l'application  $H_{a,c}$  comme petite perturbation  $C^1$  du polynôme  $z \mapsto z^2 + c_0$ . De manière générale, une petite perturbation d'un système hyperbolique reste hyperbolique, mais là il faut faire un peu plus attention, car à la limite  $a \rightarrow 0$  l'application de Hénon dégénère en une application non bijective, qui plus est dans un espace de dimension inférieure.

Cette étude a été menée par Hubbard et Sibony (voir [HOV], [FS]) ; nous essaierons ici de donner une autre présentation de ces résultats.

Fixons d'abord les notations. On se donne  $c$  dans l'intérieur hyperbolique du lieu de connexité quadratique ; on note  $S_c$  la limite projective de  $\mathbb{C} - \overset{\circ}{K}_c$  sous l'action de  $P_c : z \mapsto z^2 + c$ . Et on veut étudier  $H_{a,c+d}$  pour  $(a, d)$  assez petit.

**Proposition 1.** *Pour  $a$  et  $d$  assez petits, il existe des fonctions*

$$f : S_c \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad m : S_c \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \longmapsto f(u, v) \quad \quad \quad u \longmapsto m(u)$$

*vérifiant les relation suivantes:*

$$m(u) = 2f(u, 0) - \frac{a}{m(\sqrt{u-c})}, \quad 0 < |m(u)| \leq \frac{1}{10},$$

$$f(u^2 + c, v.m(u)) = f(u, v)^2 + c + d - af(\sqrt{u-c}, v/m(\sqrt{u-c})).$$

Si nous définissons maintenant les fonctions

$$F : S_c \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(u, v) \longmapsto F(u, v) = \begin{bmatrix} f(u^2 + c, v.m(u)) \\ f(u, v) \end{bmatrix}$$

et

$$Z : S_c \times \mathbb{C} \longrightarrow S_c \times \mathbb{C}$$

$$(u, v) \longmapsto Z(u, v) = (u^2 + c, v.m(u))$$

nous obtenons le

**Théorème.** L'application  $F : S_c \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+$  vérifie les propriétés suivantes :

(o)  $F$  est continue sur  $S_c \times \mathbb{C}$  et analytique à l'intérieur ;

(i)  $F$  est un fibré localement trivial, à fibres discrètes et dénombrables. En particulier,  $F$  est surjective.

(ii) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_c \times \mathbb{C} & \xrightarrow{Z} & S_c \times \mathbb{C} \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+ & \xrightarrow{H} & \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+ \end{array}$$

(iii) On a  $F(u, v) = F(u', v')$  si et seulement si  $\exists s \geq 0$  tel que  $u_s - u'_s = 0$ , et<sup>13</sup>

$$v' - v = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \left( u_{-p} - \frac{d}{2u_{-p}} \right) \prod_{k=1}^p m(u_{-k}) - \left( u'_{-p} - \frac{d}{2u'_{-p}} \right) \prod_{k=1}^p m(u'_{-k}) \right]$$

(iv) A l'intérieur de  $S_c \times \mathbb{C}$ , le jacobien de  $F$  est non nul ;

(v) On a  $m(u) \sim \frac{a}{2u^2}$  quand  $|u| \rightarrow \infty$ .

*Preuve de la proposition.* Si  $f_0$  désigne la fonction  $f(\cdot, 0)$ , alors  $f_0$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$f_0(u^2 + c) = f_0(u)^2 + c + d - af_0(\sqrt{u - c}).$$

Or, il est clair que pour  $a = d = 0$ , l'application identité sur  $S_c$  est solution de cette équation ; pour  $a$  et  $d$  donnés, on va chercher  $f_0$  comme petite perturbation de l'identité. On part donc de

$$f_0^{[0]}(u) = u,$$

et pour  $n \geq 0$  on définit

$$f_0^{[n+1]}(u) = \sqrt{f_0^{[n]}(u^2 + c) - c - d + af_0^{[n]}(\sqrt{u - c})}.$$

(ceci est à comparer avec les méthodes itératives utilisées dans la première partie de ce chapitre). On vérifie que pour  $a$  et  $d$  suffisamment petit, les  $f_0^{[n]}$  convergent uniformément sur  $S_c$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ce point n'est quand même pas entièrement évident, et utilise de manière essentielle l'hyperbolicité de  $z \mapsto z^2 + c$ . Le cas le plus simple est celui où  $c$  est dans la grande cardioïde, l'application  $z \mapsto \sqrt{z - c}$  (du moins, chacune de ses branches) est contractante, si bien que l'opérateur  $f_0^{[n]} \mapsto f_0^{[n+1]}$  est contractant pour  $a$  et  $d$  assez petits. De manière générale, c'est la puissance  $k$ -ième de cet opérateur qui sera contractante, où  $k$  est la période du cycle attractif de  $z \mapsto z^2 + c$ . C'est une forme particulière du "shadowing lemma", où on a une petite perturbation analytique d'un système hyperbolique.

<sup>12</sup> Ici  $u_s$  désigne la projection de  $P_c^{\circ n}(u)$  sur  $\mathbb{C}$ .

<sup>13</sup> Avec les conventions habituelles  $\prod_{k=1}^0 x_k = 1$  et  $\prod_{k=1}^{-n} x_k = 1 / \prod_{k=1-n}^0 x_k$  pour  $n > 0$ .



Une fois qu'on a  $f_0$ , on voit que la fonction  $m$  (multiplicateur) est solution de l'équation  $m(u) = a/[2f_0(u^2 + c) - m(u^2 + c)]$ . Formellement, on pourrait écrire  $m(u)$  sous forme de fraction continue généralisée :

$$m(u) = \frac{a}{2f_0(u_1) -} \frac{a}{2f_0(u_2) -} \cdots$$

où on a posé  $u_k = P_c^{\circ k}(u)$ . En particulier, on voit que pour  $a = d = 0$  on a simplement  $m(u) = 0$ . Ici encore, on construit  $m$  par approximations successives, en posant  $m^{[0]}(u) = 0$  et  $m^{[n+1]}(u) = 2f_0(u^2 + c) - a/m^{[n]}(u^2 + c)$ . Le lecteur vérifiera sans peine que la suite de fonctions converge uniformément sur  $S_c$ .

Il reste à construire la fonction  $f$ . Celle-ci n'est sûrement pas unique dans la mesure où si  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  est une solution, alors  $(u, v) \mapsto f(u, Kv)$  aussi (pour toute constante  $K$ ), il y aura donc une normalisation à faire. Si on pose

$$f_1(u) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0),$$

on voit que  $f_1$  est solution de l'équation

$$\left[ m(u) - 2f_0(u) + \frac{a}{m(\sqrt{u-c})} \right] f_1(u) = 0,$$

c'est-à-dire qu'il n'y a *aucune* restriction sur  $f_1$  à cause précisément de l'équation fonctionnelle vérifiée par  $m$ . On va donc choisir  $f_1(u) = 1$  (par exemple), ce qui donne  $f(u, v) = f_0(u) + v + O(v^2)$ . Pour connaître plus précisément  $f$ , on considère la suite  $f^{[n]}$  définie par  $f^{[0]}(u, v) = f_0(u) + v$  et

$$f^{[n+1]}(u, v) = \frac{1}{a} \left\{ f^{[n]}(u^2 + c, v.m(u)) + c + d - f^{[n]}((u^2 + c)^2 + c, v.m(u).m(u^2 + c)) \right\}.$$

Cette famille de fonctions converge uniformément sur tout domaine de la forme  $|v| \leq \text{Cste}$ . Pour le voir, notons que l'équation fonctionnelle sur  $m$  entraîne que les fonctions  $f^{[n]}(u, v)$  sont non seulement égales en  $v = 0$ , mais également tangentes :

$$f^{[n+1]}(u, v) = f^{[n]}(u, v) + O(v^2)$$

et ce uniformément en  $u$ . On en déduit aisément que la convergence est uniforme sur tout domaine de la forme  $|v| \leq \text{Cste}$ . Ceci termine la preuve de la proposition.

Il est à noter que les propriétés de la fonction  $F$  dont il est question ici ressemblent beaucoup à celles de la fonction  $F$  de la section I. Il s'agit cependant ici d'un résultat plus délicat, qui présente l'avantage de donner également une description du bord de  $\mathbb{C}^2 - K^+$ .

*Preuve du théorème.* Tout d'abord, nous devons vérifier que  $F$  prend bien ses valeurs dans  $\mathbb{C}^2 - K^+$ . Mais il est clair<sup>14</sup> que  $F(u, v) \in \mathbb{C}^2 - K^+$  si  $u \notin \hat{J}_c$ ; par densité, on en déduit que  $F(S_c \times \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^2 - \overset{\circ}{K}^+$ .

Les points (o) et (ii) sont immédiats; les points (iv) et (v) sont laissés au lecteur. Passons au (iii): notons  $(u, v) \sim (u', v')$  la relation d'équivalence donnée par la formule. Un calcul direct montre que cette relation d'équivalence est invariante par  $Z$ .

Montrons d'abord que si  $(u, v) \sim (u', v')$ , alors  $F(u, v) = F(u', v')$ . Par densité, il suffit de prouver ce résultat quand  $u, u' \notin \hat{J}_c$ . Mais dans ce cas, les suites  $f \circ Z^{\circ n}(u, v)$  et  $f \circ Z^{\circ n}(u', v')$  sont des suites de Hénon jumelles, donc égales, et donc  $F(u, v) = F(u', v')$ . La vérification de ce point nécessite quelques calculs. Le résultat essentiel est le suivant:

**Lemme.** *Pour tout  $n \geq 0$ , on a*

$$\begin{aligned} f_0(u) &= \left(u_0 - \frac{d}{2u_0}\right) + m(u_{-1})\left(u_{-1} - \frac{d}{2u_{-1}}\right) + m(u_{-1})m(u_{-2})\left(u_{-2} - \frac{d}{2u_{-2}}\right) \\ &\quad + \cdots + m(u_{-1}) \times \cdots \times m(u_{-n})\left(u_{-n} - \frac{d}{2u_{-n}}\right) \\ &\quad + \text{termes d'ordre inférieur.} \end{aligned}$$

*au voisinage de l'infini.*

**Corollaire.** *Au voisinage de l'infini, on a*

$$\begin{aligned} f_0(u) &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(u_{-p} - \frac{d}{2u_{-p}}\right) \prod_{k=1}^p m(u_{-k}) \\ &\quad + \alpha \cdot u_0^{-2} + o(u_0^{-2}), \end{aligned}$$

*où  $\alpha$  est une constante.*

Il est facile d'obtenir les développements limités donnés ci-dessus comme dans la section I, c'est-à-dire en les réinjectant dans l'équation

$$f_0(u) = \left\{ f_0(u^2 + c) - c - d + a f_0(\sqrt{u - c}) \right\}^{1/2}.$$

Du corollaire on déduit facilement que les deux suites de Hénon sont jumelles. Inversement, le même argument montre que si  $F(u, v) = F(u', v')$  et si  $u$  ou  $u' \notin \hat{J}_c$ , alors  $(u, u') \sim (v, v')$ , sinon les suites de Hénon  $f \circ Z^{\circ n}(u, v)$  et  $f \circ Z^{\circ n}(u', v')$  ne seraient pas jumelles. Reste à traiter le cas où  $u, u' \in \hat{J}_c$  et  $F(u, v) = F(u', v')$ . On a alors  $F \circ Z^{\circ n}(u, v) = F \circ Z^{\circ n}(u', v')$  pour tout  $n \geq 0$ , et comme  $|m(u)| < 1$  pour tout  $u$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_0(u_n) - F_0(u'_n) = 0$ . Mais on a la

<sup>14</sup> Les itérées positives de  $F(u, v)$  s'échappent parce que  $H^{\circ n}F(u, v) = F(u_n, v_n)$  avec  $|u_n| \gg 1$  et  $v_n$  pas trop grand devant  $u_n$ . Le potentiel de  $F(u, v)$  vaut  $2h(u)$ , où  $h$  est le potentiel de l'ensemble de Julia.

**Proposition 2.** *L'application  $F_0$  réalise un homéomorphisme de  $\hat{J}_c$  sur  $J = K - \mathring{K}^+$ .*

Admettant provisoirement cette proposition, on voit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u'_n = 0$ , donc qu'il existe  $s \geq 0$  tel que  $u_s = u'_s$ . On peut donc trouver  $v''$  tel que  $(u', v') \sim (u, v'')$ . Utilisant le fait que  $F(u', v') = F(u, v'')$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $u = u'$ , et il s'agit alors de prouver que  $v = v'$ . Mais, de la relation

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, 0) = 1,$$

partout vraie, même pour  $u \in \hat{J}_c$ , on voit que  $F(u, \cdot)$  est localement injective, et ce de manière uniforme sur  $\hat{J}_c$ , i.e.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall u \in \hat{J}_c \quad \forall v \neq v' \in D(0, \varepsilon) \quad F(u, v) \neq F(u, v').$$

Or, quitte à appliquer  $Z$  un certain nombre de fois, on peut supposer  $|v|$  et  $|v'|$  arbitrairement petits. Donc  $v = v'$ , ce qui termine la preuve de (iii).

Passons maintenant à la démonstration du point (i). Une fois encore, le problème essentiel est celui de la surjectivité. Admettons provisoirement que  $F(S_c \times \mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+$ . L'application  $F$  est constante sur les classes d'équivalence de  $\sim$ , donc passe au quotient

$$S_c \times \mathbb{C} / \sim \xrightarrow{F^!} \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+$$

en une application  $F^!$  continue et *bijective*. Pour autant, on ne peut pas en déduire immédiatement qu'il s'agit d'un homéomorphisme parce que l'espace de départ est non compact. Si on arrive à prouver que  $F^!$  est un homéo, on aura prouvé le point (i). Essayons donc de démontrer la

**Proposition 3.** *L'application  $F^! : S_c \times \mathbb{C} / \sim \rightarrow \mathbb{C}^2 - \mathring{K}_+$  est propre.*

*Preuve.* Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit  $a_n = (u_n, v_n)$  une suite de  $S_c \times \mathbb{C}$  dont la projection  $\pi(a_n)$  sur  $S_c \times \mathbb{C} / \sim$  tend vers l'infini (i.e. sort de tout compact) mais  $F(a_n) \rightarrow p$  où  $p$  est un point à distance finie. On a alors

$$h^+[F(a_n)] \rightarrow h^+[p]$$

puisque  $h^+$  est continue, soit  $2h(u_n) \rightarrow h^+(p)$ . Par conséquent,  $u_n$  reste dans un compact. Pour  $(u, v) \in S_c \times \mathbb{C}$  notons

$$\theta(u, v) = \min_{F(u, v) = F(u', v')} |v'|.$$

C'est une fonction bien définie, continue, constante sur les fibres de  $F$  donc sur celles de  $\pi$ , et nulle si et seulement si  $F(u, v) \in J^-$  (voir la proposition 4 plus bas). Par abus de notation, nous écrirons simplement  $h^\pm$  pour  $h^\pm \circ F$ . On a ainsi trois fonctions continues sur  $S_c \times \mathbb{C} : h^+, h^-$  et  $\theta$ . Elles passent au quotient en des applications de  $S_c \times \mathbb{C} / \sim$  dans  $\mathbb{R}$  que nous noterons également  $h^+, h^-$  et  $\theta$ .

**Lemme 1.** Soit  $(u_n, v_n)$  une suite de  $S_c \times \mathbb{C}$  avec  $|u_n|$  bornée. Alors  $\pi(u_n, v_n) \rightarrow \infty$  dans  $S_c \times \mathbb{C} / \sim$  si et seulement si  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ .

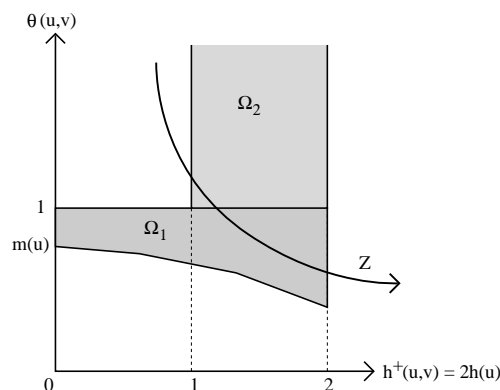
(laissé au lecteur). Par ailleurs, ces trois fonctions ont un comportement simple vis-à-vis de la dynamique :

$$\begin{aligned} h^+[Z(u, v)] &= 2h^+(u, v), \\ h^-[Z(u, v)] &= \frac{1}{2}h^-(u, v), \\ \theta[Z(u, v)] &= m(u)\theta(u, v). \end{aligned}$$

Nous savons maintenant que notre suite  $(u_n, v_n)$  de départ vérifie  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$  (en particulier  $v_n \rightarrow \infty$ ). La suite  $u_n$  étant bornée, on peut sans perte de généralité la supposer convergente :  $u_n \rightarrow u$ . On peut également supposer que  $h(u) \leq 1/10$ . Alors, pour  $n$  assez grand on aura  $2h(u_n) \leq 1$  et  $\theta(u_n, v_n) \geq 1$ . Considérons maintenant le domaine  $\Omega$  de  $S_c \times \mathbb{C}$  défini par

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \cup \Omega_2, \text{ où} \\ \Omega_1 &= \{(u, v) \in S_c \times \mathbb{C} : h^+(u, v) \leq 2 \text{ et } m(u) \leq \theta(u, v) \leq 1\} \\ \Omega_2 &= \{(u, v) \in S_c \times \mathbb{C} : 1 \leq h^+(u, v) \leq 2 \text{ et } \theta(u, v) \geq 1\} \end{aligned}$$

Ce domaine est représenté ci-dessous.



C'est, d'une certaine manière, un "domaine fondamental" pour la dynamique, en ce sens que si  $(u, v)$  est tel que  $h^+(u) \leq 1$  et  $\theta(u, v) \geq 1$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Z^{on}(u, v) \in \Omega$  (en fait, il peut en exister au plus deux). Si  $N(u, v)$  désigne le plus petit entier ayant cette propriété, il est clair que  $N(u, v) \rightarrow \infty$  quand  $h^+(u, v) \rightarrow 0$  et  $\theta(u, v) \rightarrow \infty$ . Le point essentiel est le suivant :

**Lemme 2.** La borne inférieure de  $h^-$  sur  $\Omega$  est strictement positive.

*Preuve.* Admettons la proposition 4 énoncée plus bas, on voit que  $h^-$  se n'annule pas sur  $\Omega$ . Par compacité, la borne inférieure de  $h^-$  sur  $\Omega_1$  est  $> 0$ . Supposons maintenant que  $\inf_{\Omega_2} h^- = 0$ , et soit  $(u_n, v_n)$  une suite de  $\Omega_2$  telle que  $h^-(u_n, v_n) \rightarrow 0$ . Et soit  $M = \max h^-(u_n, v_n)$ . Utilisant le

**Lemme 3.** *Pour toute constante  $C$ , le lieu*

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \max(h^+, h^-) \leq C \right\}$$

*est compact.*

... on voit que  $F(u_n, v_n)$  se promène dans un compact. Sans perte de généralité, on peut supposer cette suite convergente et noter  $\ell$  sa limite. Alors  $1 \leq h^+(\ell) \leq 2$  et  $h^-(\ell) \geq 1$ . Par surjectivité (voir prop. 4 plus bas) il existe  $(u, v)$  tel que  $F(u, v) = \ell$  avec  $h(u) > 0$ , et en ce point  $F$  est un difféo local. Par conséquent, on peut trouver des  $(u'_n, v'_n)$  proches de  $(u, v)$  tels que  $F(u_n, v_n) = F(u'_n, v'_n)$ , ce qui contredit manifestement l'hypothèse  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ .

Du lemme 2 on déduit le

**Lemme 4.** *Soit  $(u_n, v_n) \in S_c \times \mathbb{C}$  une suite telle que  $h^+(u_n, v_n) \rightarrow 0$  et  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$  ; alors  $h^-(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ .*

En d'autres termes,  $\lim_{h^+ \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty} h^- = \infty$ .

*Preuve.* On a  $h^-(u, v) \geq 2^{N(u, v)} \inf_{\Omega} h^-$ , comme l'infimum est strictement positif et

$$\lim_{h^+ \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty} N = \infty,$$

le lemme 4 en résulte. Un peu plus fort encore :

**Lemme 5.** *Soit  $(u_n, v_n)$  une suite de  $S_c \times \mathbb{C}$  telle que  $u_n$  soit bornée et  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ , alors  $h^-(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ .*

*Preuve.* Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit  $(u_n, v_n)$  une suite telle que  $h^+$  soit bornée,  $h^-$  ne tende pas vers l'infini et  $\theta \rightarrow \infty$ . Quitte à extraire une sous-suite on peut même supposer que  $h^-$  est bornée et que  $h^+$  converge. Le cas  $h(u_n) \rightarrow 0$  peut tout de suite être écarté grâce au lemme 4. Reste le cas où  $h(u_n) > 0$ , mais là on utilise le même argument que dans la démonstration du lemme 2 : la suite  $F(u_n, v_n)$  se balade dans un compact, on peut donc la supposer convergente, on note  $F(u, v)$  la limite et, utilisant le fait que  $F$  est un difféo local au voisinage de ce point (puisque  $h(u) > 0$ ) on en déduit qu'on ne peut avoir  $\theta(u_n, v_n) \rightarrow \infty$ . Ce qui prouve le lemme 5.

On voit alors que la proposition 3 n'est rien d'autre qu'une reformulation du lemme 5.

Reste encore à prouver la surjectivité, et un peu plus :

**Proposition 4.** *La fonction  $F$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $F(\cdot, 0) : \hat{J}_c \rightarrow J$  est un homéomorphisme,
- (ii)  $F(\cdot, 0) : S_c \rightarrow K^- = J^-$  est un homéomorphisme,
- (iii)  $F : \hat{J}_c \times \mathbb{C} \rightarrow J^+ = K^+ - \mathring{K}^+$  est surjective,
- (iv)  $F : S_c \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 - \mathring{K}^+$  est surjective.

Commençons par le (i). Il est clair que  $F_0(\hat{J}_c) \subset J$  et que  $F_0$  est continue. Reste donc à prouver la bijectivité. Ici encore, il s'agit d'une forme particulière du shadowing lemma ; on peut borner  $J$ , et de ces bornes déduire que  $J$  est un compact hyperbolique. Mais on peut également construire explicitement l'application inverse,  $F_0^{-1}$ , de la façon suivante :

on se donne une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  bornée, telle que  $x_{n+1} = x_n^2 + c + d - ax_{n-1}$ , et on doit construire une suite  $(y_n)$  telle que  $y_{n+1} = y_n^2 + c$  et “proche” de  $(x_n)$ , ce qu’on fait en itérant l’opérateur  $(u_n) \mapsto (v_n)$ , où  $v_n = (u_{n+1} - c)^{1/2}$  (on choisit celle des racines carrées qui est la plus proche de  $u_n$ ). Il est à noter que cet argument donne du même coup l’injectivité et la surjectivité, puisqu’on a construit une application inverse.<sup>15</sup>

La démonstration du point (ii) est analogue. Il s’agit ici encore d’un cas de “shadowing lemma”, sous une forme plus subtile cependant, essentiellement parce que  $S_c$  et  $\mathbb{C}^2 - \overset{\circ}{K}^+$  sont non compacts. Cependant, dire que “l’application  $z \mapsto z^2 + c$  est hyperbolique sur  $S_c$ ” a un sens : les problèmes ont lieu seulement pour  $z$  petit, et on peut imposer des conditions sur la métrique quand  $z \rightarrow \infty$ , par exemple que son coefficient tende vers 1. En particulier, pour ce qui nous intéresse, les algorithmes itératifs permettant de passer d’une suite  $(x_n)$  vérifiant  $x_{n+1} = x_n^2 + c + d - ax_{n-1}$  à une suite  $(y_n)$  voisine vérifiant  $y_{n+1} = y_n^2 + c$  et vice versa, “marchent”, c’est-à-dire sont convergents et définissent des applications inverses l’une de l’autre.

De même que le point (ii) exprimait que  $J^-$  était la variété instable de  $J$ , de même (iii) peut s’interpréter en disant que  $J^+$  est la variété stable de  $J$ . Soit donc  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \in J^+$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  l’unique suite prolongeant  $x_0, x_1$  et vérifiant  $x_{n+1} = x_n^2 + c + d - ax_{n-1}$ . On a vu que les itérées positives  $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$  du point s’accumulent sur  $J$ . D’après le lemme de poursuite (tiens ! Il a changé de nom), il existe une suite  $(x'_n)$  telle que  $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_0 \end{bmatrix} \in J$  et  $x_n - x'_n \rightarrow 0$ . Une telle suite n’est sûrement pas unique, mais elle existe : soit donc  $u \in \hat{J}_c$  tel que  $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_0 \end{bmatrix} = F_0(u)$ , i.e.  $f(u_n, 0) = x'_n$ . On veut trouver  $v$  tel que  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = F(u, v)$ , i.e.  $f(u_n, v_n) = x_n$ . Si un tel  $v$  existe, on doit avoir

$$x_n - x'_n = f(u_n, v_n) - f(u_n, 0) \sim \frac{\partial f}{\partial v}(u_n, 0) \cdot v_n \sim v_n$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  puisque  $v_n \rightarrow 0$ , et de la formule

$$v_n = v \prod_{k=0}^{n-1} m(u_k)$$

on déduit que  $v$  doit valoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x'_n}{\prod_{k=0}^{n-1} m(u_k)}.$$

On vérifie (par exemple en transformant la suite en série) que la limite existe : soit  $v$  cette limite. Posons  $x''_n = f(u_n, v_n)$ , nous devons prouver que  $x_n - x''_n = 0$ . Mais les suites  $(x_n)$  et  $(x''_n)$  se déplacent dans un compact (pour  $n \rightarrow +\infty$ ) et vérifient  $x_n - x''_n = o(\prod_{k=0}^{n-1} m(u_k))$ . On peut vérifier par un calcul direct que ceci entraîne  $x_n - x''_n = 0$ , mais il est plus simple d’utiliser le fait suivant : dans un compact de  $\mathbb{R}^n$ , les suites des itérées de deux points ne peuvent pas se rapprocher plus vite que ce qui est autorisé par la dérivée : plus précisément, on peut énoncer le

<sup>15</sup> Ceci prouve également la continuité de l’application inverse, mais ce n’est pas nécessaire ici parce que  $\hat{J}_c$  est compact.

**Lemme 6.** Soit  $V$  une variété riemannienne,  $f$  un difféo de  $M$ ,  $K$  un compact invariant,  $x$  et  $y$  deux points de  $K$ . On pose  $x_n = f^{\circ n}(x)$ ,  $y_n = f^{\circ n}(y)$ . On suppose que<sup>16</sup>

$$x_n - y_n = o\left(\prod_{k=0}^{n-1} \|[f'(x_k)]^{-1}\|\right) \quad \text{et} \quad \sum_0^{\infty} |x_n - y_n| < \infty.$$

Alors  $x = y$ .

Enfin, le point (iv) se prouve de même. Une fois qu'on a vérifié que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x'_n}{\prod_{k=0}^{n-1} m(u_k)}$$

existe, le fait que  $F(u, v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$  résulte directement du fait que deux suites de Hénon jumelles sont égales — fait que l'on peut considérer comme un analogue non compact du lemme 6.

## Bibliographie du chapitre quatre

- [BC] M. BENEDICKS and L. CARLESON, *The dynamics of the Hénon map*, preprint.
- [BS1] E. BEDFORD and J. SMILLIE, *Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ : Currents, Equilibrium, Measure and Hyperbolicity*, preprint.
- [BS2] E. BEDFORD and J. SMILLIE, *Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, preprint.
- [DEV] R. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin 1986
- [DN] R. DEVANEY and Z. NITECKI, *Shift automorphisms in the Hénon mapping*, Comm. Math. Phys **67**, 1979.
- [DJE] H. DJELLOULI, *Applications de Hénon et fers à cheval complexes*, notes d'exposé.
- [FM] S. FRIEDLAND and J. MILNOR, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, feb. 87, rough draft.
- [FS] J. E. FORNAESS and N. SIBONY, *Hénon mappings in  $\mathbb{C}^2$  and Fatou-Bieberbach domains*, publications mathématiques d'Orsay, 90-31.
- [HE1] M. HÉNON, *Numerical study of quadratic area preserving mappings*, Q. Appl. Math **27**, 1969.
- [HE2] M. HÉNON, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. **50**, 1976.
- [HOV] J. H. HUBBARD and R. OBERSTE-VORTH, *Complex horseshoes and the dynamics of mappings of two complex variables*, en préparation.

---

<sup>16</sup> Il est à noter qu'en général la deuxième hypothèse sera une conséquence de la première, et en particulier c'est le cas ici.