

Sur les retardateurs

Thierry BOUSCH*

21 juillet 2004

Abstract

A discrete-time retarder is a stochastic increasing function $u_\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, whose distribution is invariant by conjugation by the translations of \mathbb{Z} . Continuous-time retarders can be defined similarly.

About these objects, which can be composed, we prove theorems of two kinds. First, we establish various inequalities about the composition and iteration of retarders whose delay is $(p - 1)$ -integrable. Then we prove a super-multiplicative ergodic theorem, which can be used to define the “cycle time” of a retarder.

Résumé

Un retardateur à temps discret est une fonction croissante $u_\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ stochastique, dont la loi est invariante par conjugaison par les translations de \mathbb{Z} . On peut définir de manière similaire les retardateurs à temps continu.

Sur ces objets, qui sont composables, on démontre des théorèmes de deux types. D’abord, on établit diverses inégalités concernant la composition et l’itération des retardateurs dont le retard est $(p - 1)$ -intégrable. Ensuite, on démontre un théorème ergodique sur-multiplicatif, qui nous permet de définir le “temps de cycle” d’un retardateur.

Titre anglais: About retarders

Mots-clés: retardateur, théorème ergodique, temps de cycle

Classification AMS (2000): 37A30, 93C65

Table des matières

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------|----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 1.1 | Définition et premières propriétés | 2 |
| 1.2 | Motivations et exemples | 3 |
| 2 | Cumul des retards par composition et itération | 5 |
| 2.1 | Composition | 5 |
| 2.2 | Itération | 7 |

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr.

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3 Propriétés ergodiques des retardateurs | 9 |
| 3.1 Préliminaires | 9 |
| 3.2 Un théorème ergodique sur-multiplicatif | 11 |
| 3.3 Un cas où $0 = \rho_-(\omega) < \rho_+(\omega)$ presque partout | 16 |
| 3.4 Temps de cycle | 16 |
| Références | 18 |

1 Introduction

1.1 Définition et premières propriétés

Notons $\mathbb{Z}^{\uparrow\mathbb{Z}}$ l'ensemble des fonctions croissantes de \mathbb{Z} dans lui-même, muni de la tribu usuelle. Le groupe des translations de \mathbb{Z} (qu'on peut identifier au groupe additif \mathbb{Z}) agit par conjugaison sur cet ensemble. Un *retardateur* à temps discret est, par définition, une mesure positive finie sur $\mathbb{Z}^{\uparrow\mathbb{Z}}$, invariante par cette action.

Nous utiliserons plutôt la définition équivalente suivante¹. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{Z}, +)$ un ensemble muni d'une tribu et d'une mesure positive finie, et d'une action de \mathbb{Z} , notée additivement,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\longmapsto t + \omega \end{aligned}$$

qui préserve la mesure, c'est-à-dire telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $A \subseteq \Omega$ mesurable, $t + A$ est mesurable et de même mesure que A . Un retardateur à temps discret est alors une fonction

$$\begin{aligned} u : \Omega \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\omega, x) &\longmapsto u_\omega(x) \end{aligned}$$

mesurable, croissante en x pour tout ω fixé, et vérifiant

$$u_{t+\omega}(t+x) = t + u_\omega(x) \tag{1.1}$$

pour tous $\omega \in \Omega$ et $t, x \in \mathbb{Z}$ (homogénéité additive en loi). Afin d'avoir des objets composables, on appellera plutôt "retardateur" la fonction

$$\begin{aligned} U : \Omega \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \Omega \times \mathbb{Z} \\ (\omega, x) &\longmapsto (\omega, u_\omega(x)) \end{aligned}$$

qui contient évidemment la même information.

On peut définir de manière similaire les retardateurs à temps continu. Etant donné un espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{R}, +)$ muni d'une mesure positive finie et d'une action de \mathbb{R} préservant cette mesure, dans le sens donné plus haut², un retardateur à temps continu est une fonction

$$\begin{aligned} u : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, x) &\longmapsto u_\omega(x) \end{aligned}$$

mesurable, croissante en x pour tout ω fixé, et vérifiant (1.1) pour tous $\omega \in \Omega$ et $t, x \in \mathbb{R}$, ou plutôt la fonction $U : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ qui lui est associée.

¹Si on s'autorise à confondre une variable aléatoire avec sa loi.

²Certains auteurs définissent une "action mesurable de \mathbb{R} " de manière plus restrictive, en imposant que $t + \omega$ soit mesurable en le couple $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Nous n'aurons pas besoin de cette hypothèse; comme indiqué précédemment, on supposera simplement que $t + \omega$ est mesurable en ω , pour tout t fixé. En revanche, il est essentiel de supposer $u_\omega(t)$ mesurable en le couple (t, ω) , afin de pouvoir composer les retardateurs.

Par la suite, \mathbb{G} désignera toujours l'un des groupes \mathbb{Z} ou \mathbb{R} , ce qui nous permettra de donner des énoncés communs au temps discret et au temps continu.

Pour un quintuplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, +)$ fixé, l'ensemble des retardateurs est un monoïde, en général non commutatif: si $U : (\omega, x) \mapsto (\omega, u_\omega(x))$ et $V : (\omega, x) \mapsto (\omega, v_\omega(x))$ sont deux retardateurs, la fonction composée $V \circ U : (\omega, x) \mapsto (\omega, v_\omega u_\omega(x))$ est encore un retardateur, ainsi bien sûr que la fonction identité de $\Omega \times \mathbb{G}$ (c'est le *retardateur unité*, qu'on notera $\mathbf{1}$). C'est aussi un treillis distributif pour l'ordre naturel, les opérations du treillis étant données point par point, ainsi $U \vee V : (\omega, x) \mapsto (\omega, u_\omega(x) \vee v_\omega(x))$, etc. Ces deux structures sont "compatibles", en ce sens que la composition est distributive (à gauche et à droite) par rapport aux opérations du treillis.

Dualité. Soit U un $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, +)$ -retardateur. On peut lui associer un *retardateur dual*, qui est le $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, \star)$ -retardateur U' défini par $u'_\omega(t) = -u_\omega(-t)$, où \star est l'action de \mathbb{G} sur Ω définie par $t \star \omega = -t + \omega$. L'existence de cette dualité permet de "renverser le sens du temps" dans la plupart des énoncés sur les retardateurs, comme on le verra à plusieurs reprises dans la suite de cet article.

1.2 Motivations et exemples

L'idée des retardateurs est inspirée par les *fonctions topicales*, une notion due à Crandall et Tartar [CT] et utilisée de façon systématique par Gunawardena pour modéliser et analyser les systèmes à événements discrets (SED) [Gu1, GK]. Ce sont des fonctions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont croissantes (pour les ordres produits sur \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n) et *additivement homogènes*, dans le sens que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad f(t + \mathbf{x}) = t + f(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

avec la notation $t + (u_1, \dots, u_r) = (t + u_1, \dots, t + u_r)$. La dynamique de ces fonctions est maintenant bien comprise, pourvu qu'on ajoute une troisième condition naturelle, la condition de *causalité* [BM, Bou].

Les fonctions topicales, et en particulier les fonctions max-plus, sont bien adaptées à l'étude des SED déterministes [B+, Gu2]. Peuvent-elles être aussi utiles pour les SED stochastiques? Malheureusement, la transposition naïve de ces idées au cas stochastique, qui consiste à considérer une famille (f_ω) de fonctions topicales dépendant mesurablement d'un aléa ω , conduit à de sérieuses difficultés; et ce, déjà dans le cas max-plus, pour l'analyse des graphes d'événements avec des temporisations aléatoires. Une telle temporisation aléatoire se comporte comme suit: des "jetons" y entrent, aux dates $t_0, t_1, t_2 \dots$ et en ressortent aux dates $t'_0, t'_1, t'_2 \dots$, avec $t'_i = t_i + R_i$, où les R_i sont des variables aléatoires réelles (positives), indépendantes et équidistribuées. Le principal problème est que ce mécanisme n'est pas FIFO (first in, first out): les jetons entrés en premier ne ressortent pas forcément en premier. Si $t_1 - t_0$ est très petit, avec $t_0 < t_1$, la probabilité que $t'_0 > t'_1$ sera proche de 1/2 (pourvu que la loi des R_i soit sans atomes). Certes, ce phénomène de croisement des jetons ne peut se produire que si deux jetons traversent simultanément une temporisation. Mais si les jetons peuvent effectivement se croiser, alors toute la théorie développée dans [B+] devient inapplicable.

Un autre problème est qu'il n'existe "pas assez" de fonctions topicales. Ainsi, les seules fonctions topicales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les translations. De façon générale, toutes les fonctions topicales sont 1-lipschitziennes, en particulier continues; elles ne peuvent donc pas représenter des SED dont l'évolution des dateurs est donnée par des fonctions discontinues.

Gunawardena lui-même discute dans [Gu3] les limites du cadre topical, en se concentrant sur le cas déterministe: il estime que l'hypothèse de croissance sur f est beaucoup moins convaincante que l'hypothèse d'homogénéité additive. J'affirme que dans le cas stochastique, il faut au contraire garder absolument l'hypothèse que les fonctions $f_\omega : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont croissantes

(sans laquelle on ne peut rien faire) et affaiblir l’hypothèse d’homogénéité additive, en demandant qu’elle soit seulement valable *en loi*. Cela revient à dire (en négligeant les questions de mesurabilité) qu’il existe une action de \mathbb{R} sur Ω , notée additivement, telle que

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad f_{t+\omega}(t + \mathbf{x}) = t + f_\omega(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

formule qui généralise (1.2). Cette homogénéité additive “faible” décrit des objets intéressants déjà pour $m = n = 1$: ce sont des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui dépendent d’un aléa. On peut les voir comme des fonctions stochastiques qui, à une date d’entrée, associent une date de sortie. (C’est à cause de cette interprétation qu’elles sont appelées “retardateurs”.) Ces fonctions sont croissantes, ce qui revient à demander que le dispositif d’entrée/sortie correspondant soit FIFO. Comme les jetons ne peuvent pas se croiser, les méthodes de [B+] s’adaptent naturellement à ce nouveau formalisme.

Les retardateurs ont aussi un pouvoir de modélisation bien plus grand que les fonctions topicales (stochastiques), comme le montrent les exemples suivants.

Les moyens de transport (de personnes, d’objets, de données...), présentant une certaine régularité au cours du temps, sont de bons exemples de retardateurs. Considérons une ligne de tramway, et deux arrêts A et B sur cette ligne; on suppose que les tramways ne sont jamais bondés, si bien qu’on peut toujours monter dans le premier qui se présente à l’arrêt, et que leur vitesse ne dépend pas du nombre de passagers qu’ils transportent. Soit $u_\omega(x)$ l’instant où on arrive en B , si on s’était présenté en A à l’instant x . La fonction u_ω est croissante: si quelqu’un se présente après vous en A , il pourra au mieux prendre le même tramway que vous, ou alors l’un des suivants; et comme les tramways ne peuvent pas se doubler, il arrivera après vous en B . Il est plus difficile d’expliquer ce que représente l’aléa ω , et l’hypothèse d’homogénéité additive en loi; mais on pourrait imaginer que les horaires des trams puissent être légèrement décalés d’un jour sur l’autre.

Un *feu rouge* peut aussi être considéré comme un retardateur (pour les voitures comme pour les piétons). Prenons comme unité de temps la période du feu rouge; celui-ci sera vert pendant une durée $0 < v < 1$ et rouge pendant une durée $1 - v$. Ici, l’aléa est la phase du feu rouge à l’instant d’origine. On peut le représenter par un retardateur avec $\Omega = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, muni de la mesure de Lebesgue et de l’action usuelle de \mathbb{R} , avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < v, \\ 1 & \text{si } v \leq x < 1, \end{cases}$$

les autres valeurs de $u_\omega(x)$ étant déterminées par la condition d’homogénéité (1.1). Ces formules disent simplement que si x (l’instant d’arrivée de la voiture devant le feu) est dans l’intervalle de temps $[0, v[$, alors le feu est vert et la voiture peut passer tout de suite; sinon, le feu est rouge et la voiture doit attendre l’instant 1, où le feu redevient vert, pour passer.

Plus généralement, appelons *fonction de Poincaré* (d’après [Arn], §3.11) une fonction croissante $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui commute avec les translations entières de \mathbb{R} . Toute fonction de Poincaré $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s’étendre, par la formule (1.1), en un \mathbb{T} -retardateur $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de manière unique. Réciproquement, pour tout \mathbb{T} -retardateur $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Poincaré. On a donc une bijection naturelle entre fonctions de Poincaré et \mathbb{T} -retardateurs; mais surtout, cette bijection préserve la composition ainsi que les opérations du treillis — c’est un isomorphisme de monoïdes ordonnés. Ainsi, les fonctions de Poincaré peuvent être vues comme des retardateurs particuliers. (Inversement, on peut considérer les retardateurs comme une généralisation des fonctions de Poincaré.) Ceci montre incidemment que les retardateurs, quoique définis en termes probabilistes, peuvent aussi représenter des systèmes dynamiques parfaitement déterministes.

Dans l'interprétation d'un retardateur comme une "boîte noire" où des jetons entrent à la date x et ressortent à la date $u_\omega(x)$, il est naturel de vouloir estimer le "retard" $u_\omega(x) - x$, qui est le temps passé dans la boîte. La loi de ce retard ne dépend pas de x , puisque $u_\omega(x) - x = u_{-x+\omega}(0)$, qui a même loi que $u_\omega(0)$. Dans le §2, on tâchera d'évaluer (de majorer, en fait) les queues du retard $\mu\{\omega : |u_\omega(0)| > R\}$, ainsi que ses moments $\int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}$, pour des retardateurs obtenus par composition (ou itération) de retardateurs connus.

Le §3 se concentre au contraire sur des propriétés asymptotiques des retardateurs, quand la variable de temps ou le nombre d'itérations tend vers l'infini. Ici la théorie ergodique joue un rôle essentiel. On montre notamment l'existence d'un *temps de cycle*, un invariant de semi-conjugaison des retardateurs, qui généralise le nombre de rotation pour les fonctions de Poincaré.

2 Cumul des retards par composition et itération

2.1 Composition

Etant donnés deux retardateurs U et V , dont on connaît la loi des retards, que peut-on dire sur la loi des retards de $V \circ U$? Le lemme suivant donne une borne qui peut paraître grossière, vu la brutalité des majorations; comme on verra plus loin, il n'en est rien.

Lemme 2.1. *Soient U, V deux $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, +)$ -retardateurs. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mu\{\omega : |v_\omega u_\omega(0)| > x + y\} \leq \mu\{\omega : |u_\omega(0)| > x\} + \mu\{\omega : |v_\omega(0)| > y\}. \quad (2.1)$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas du temps continu, i.e. $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. Posons $A = \{\omega : u_\omega(0) > x\}$, $B = \{\omega : v_\omega(0) > y\}$, et $C = \{\omega : v_\omega u_\omega(0) > x + y\}$. J'affirme que

$$C \subseteq A \cup (x + B).$$

En effet, $\omega \notin A$ implique $v_\omega u_\omega(0) \leq v_\omega(x) = x + v_{-x+\omega}(0)$. Par conséquent, $\omega \in C - A$ implique $v_{-x+\omega}(0) > y$, c'est-à-dire $\omega \in x + B$, d'où l'inclusion ci-dessus. On en déduit $\mu(C) \leq \mu(A) + \mu(x + B) = \mu(A) + \mu(B)$, soit

$$\mu\{\omega : v_\omega u_\omega(0) > x + y\} \leq \mu\{\omega : u_\omega(0) > x\} + \mu\{\omega : v_\omega(0) > y\}. \quad (2.2)$$

En temps discret ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$), l'argument ci-dessus reste valable sous réserve que x soit entier; si x n'est pas entier, il faut d'abord écrire

$$\mu\{\omega : v_\omega u_\omega(0) > \lfloor x \rfloor + y\} \leq \mu\{\omega : u_\omega(0) > \lfloor x \rfloor\} + \mu\{\omega : v_\omega(0) > y\}$$

qui entraîne immédiatement (2.2), puisque $u_\omega(0)$ ne prend que des valeurs entières. Nous avons ainsi établi l'inégalité (2.2) dans tous les cas. En appliquant cette inégalité aux retardateurs duaux de U et V , nous obtenons l'inégalité "duale"

$$\mu\{\omega : -v_\omega u_\omega(0) > x + y\} \leq \mu\{\omega : -u_\omega(0) > x\} + \mu\{\omega : -v_\omega(0) > y\}$$

qui, sommée avec (2.2), donne le résultat cherché. \square

Pour tout retardateur U (à temps discret ou continu), et $1 \leq p \leq \infty$ (non nécessairement entier), définissons sa "norme" $\|U\|_p$, de la manière suivante:

$$\|U\|_p = \begin{cases} \mu\{\omega : u_\omega(0) \neq 0\} & \text{si } p = 1, \\ \left(\int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}\right)^{1/p} & \text{si } 1 < p < \infty, \\ \sup \text{ess } |u_\omega(0)| & \text{si } p = \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Il est évident que $\|U\|_p > 0$, sauf si $u_\omega(0) = 0$ p.p. (dans ce cas, $\|U\|_p = 0$). La “norme” $\|U\|_p$ peut être finie ou non. De l’inégalité de Hölder, on déduit facilement l’inégalité d’interpolation

$$\|U\|_r \leq \|U\|_p^\alpha \cdot \|U\|_q^{1-\alpha} \quad (2.4)$$

pour tous $1 \leq p, q \leq \infty$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, où $1/r = \alpha/p + (1 - \alpha)/q$.

On vérifie également sans difficulté que, si U, V sont deux $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, +)$ -retardateurs,

$$\begin{aligned} \|U \wedge V\|_p^p + \|U \vee V\|_p^p &= \|U\|_p^p + \|V\|_p^p \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|U \wedge V\|_\infty \vee \|U \vee V\|_\infty &= \|U\|_\infty \vee \|V\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de majorer $\|U \wedge V\|_p$ et $\|U \vee V\|_p$ en fonction de $\|U\|_p$ et $\|V\|_p$. Peut-on également borner $\|V \circ U\|_p$? Ici encore, la réponse est affirmative.

Théorème 2.2. *Soient U, V deux $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{G}, +)$ -retardateurs. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\|V \circ U\|_p \leq \|U\|_p + \|V\|_p. \quad (2.5)$$

D’autre part $\|\mathbf{1}\|_p = 0$.

Démonstration. Pour $p = 1$ et $p = \infty$, l’inégalité (2.5) se déduit immédiatement du lemme 2.1; on supposera donc $1 < p < \infty$ dans ce qui suit. Rappelons que, pour toute fonction mesurable $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\int_\Omega F(\omega)^{p-1} = (p-1) \int_0^\infty x^{p-2} \mu\{\omega : F(\omega) > x\} dx. \quad (2.6)$$

Soient f, g, h les fonctions définies par $f(x) = \mu\{\omega : |u_\omega(0)| > x\}$, $g(x) = \mu\{\omega : |v_\omega(0)| > x\}$, et $h(x) = \mu\{\omega : |v_\omega u_\omega(0)| > x\}$. Pour tout $0 < \theta < 1$ on a, d’après le lemme 2.1,

$$h(x) \leq f(\theta x) + g((1 - \theta)x)$$

d’où l’on déduit

$$\int_0^\infty x^{p-2} h(x) dx \leq \int_0^\infty x^{p-2} f(\theta x) dx + \int_0^\infty x^{p-2} g((1 - \theta)x) dx$$

et donc, en multipliant par $p - 1$,

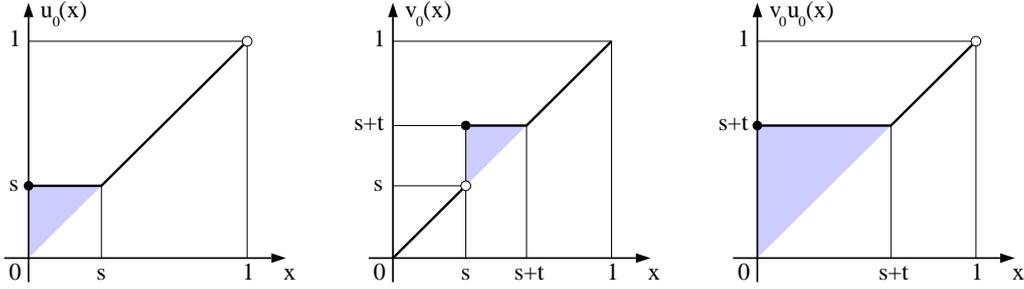
$$\int_\Omega |v_\omega u_\omega(0)|^{p-1} \leq \theta^{1-p} \int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1} + (1 - \theta)^{1-p} \int_\Omega |v_\omega(0)|^{p-1}$$

Le résultat ci-dessus étant valable pour tout $0 < \theta < 1$, on peut choisir θ de manière à minimiser le membre de droite. Un calcul élémentaire montre que

$$\inf_{0 < \theta < 1} a \theta^{1-p} + b (1 - \theta)^{1-p} = (a^{1/p} + b^{1/p})^p \quad (a, b \geq 0), \quad (2.7)$$

ce qui nous donne bien l’inégalité cherchée (2.5). \square

Commentaires. L’inégalité (2.5) est optimale. En effet, soient $0 < s, t < 1$ des réels tels que $s + t < 1$, et soient u_0, v_0 les fonctions de Poincaré définies par $u_0(x) = \max(s, x)$ pour tout $0 \leq x < 1$, tandis que $v_0(x) = x$ pour $0 \leq x < s$ et $v_0(x) = \max(s + t, x)$ si $s \leq x < 1$. (Imaginez deux feux rouges décalés, placés l’un derrière l’autre.) La fonction de Poincaré composée est donnée par $v_0 u_0(x) = \max(s + t, x)$ pour tout $0 \leq x < 1$, et les retardateurs U, V correspondants vérifient $\|U\|_p = \kappa s$, $\|V\|_p = \kappa t$ et $\|VU\|_p = \kappa(s + t)$, où $\kappa = p^{-1/p}$ (voir figure).



Donnons une application “pratique” de ce théorème. Vous devez aller d’un point A à un point C en tramway, avec une correspondance en B . Le premier tramway vous conduit de A à B en 4 minutes en moyenne (ceci comprenant le temps d’attente, plus le trajet proprement dit), et le second tramway de B à C en 9 minutes en moyenne. Combien de temps faut-il en moyenne pour aller de A à C ?

La réponse évidente — 13 minutes — n’est valable que si les horaires des tramways peuvent être considérés indépendants. Sinon, l’heure à laquelle le premier tramway vous dépose en B n’est pas “quelconque” pour ce qui est du second tramway: elle peut faciliter ou non la correspondance. L’intérêt du théorème 2.2 (utilisé ici avec $p = 2$) est justement d’être valable même en présence de corrélations: il vous dit que dans tous les cas, le temps moyen pour aller de A à C n’excède pas $(\sqrt{4} + \sqrt{9})^2 = 25$ minutes. Cette borne ne peut pas être améliorée, et je laisse au lecteur le soin de transposer l’exemple précédent des “feux rouges décalés” en un scénario plausible dans le cas des tramways.

2.2 Itération

Soit U un retardateur et U^n ses itérées ($n \geq 0$). Chaque fonction u_ω est croissante, si bien que la suite $u_\omega^n(x)$ des itérées d’un point x donné est monotone: croissante si $u_\omega(x) \geq x$, décroissante si $u_\omega(x) \leq x$. En particulier, on a toujours

$$0 = [u_\omega^0(0)]^+ \leq [u_\omega^1(0)]^+ \leq [u_\omega^2(0)]^+ \leq \dots \quad (2.8)$$

$$0 = |u_\omega^0(0)| \leq |u_\omega^1(0)| \leq |u_\omega^2(0)| \leq \dots \quad (2.9)$$

et par conséquent

$$0 = \|U^0\|_p \leq \|U^1\|_p \leq \|U^2\|_p \leq \dots \quad (2.10)$$

pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Réciproquement, on peut majorer $\|U^n\|_p$ en fonction des $\|U^i\|_p$ pour $i < n$, avec le théorème 2.2; mais l’inégalité (2.5) est très loin d’être optimale quand U, V sont des puissances d’un même retardateur, et il est possible d’obtenir des bornes bien plus fines en utilisant le théorème suivant.

Théorème 2.3. Soit U un retardateur, et $p > 1$ réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$\|U : n\|_p = \left(\sum_{k=0}^n \int_{\Omega} |u_\omega^k(0)|^{p-1} \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=0}^n \|U^k\|_p^p \right)^{1/p} \quad (2.11)$$

Cette suite est sous-additive, i.e.

$$\|U : m + n\|_p \leq \|U : m\|_p + \|U : n\|_p \quad (2.12)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme le théorème 2.2, le théorème ci-dessus se déduit d'un lemme sur les queues des retards, que voici. Pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(x) = \mu\{\omega : u_\omega^n(0) > x\}$ et $h_n(x) = \mu\{\omega : |u_\omega^n(0)| > x\}$, ainsi que $G_n = g_0 + g_1 + \dots + g_n$ et $H_n = h_0 + h_1 + \dots + h_n$. J'affirme qu'on a les inégalités

$$G_{m+n}(x+y) \leq G_m(x) + G_n(y), \quad H_{m+n}(x+y) \leq H_m(x) + H_n(y), \quad (2.13)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Si les retardateurs sont à temps discret, on voit facilement qu'il suffit d'établir ces inégalités pour x, y entiers. Nous supposons donc $x, y \in \mathbb{G}^+$ dans ce qui suit.

Remarquons que $u_\omega^k(0) \leq x$ et $u_\omega^\ell(x) \leq x+y$ impliquent $u_\omega^{k+\ell}(0) \leq x+y$, autrement dit,

$$u_\omega^k(0) \leq x \text{ et } u_{-x+\omega}^\ell(0) \leq y \implies u_\omega^{k+\ell}(0) \leq x+y.$$

Notons $f_{n,x}(\omega)$ le plus grand $k \in [0, n]$ tel que $u_\omega^k(0) \leq x$. D'après l'implication précédente,

$$f_{m+n, x+y}(\omega) \geq f_{m,x}(\omega) + f_{n,y}(-x+\omega) \quad (2.14)$$

Notons $\eta_n(\omega)$ la fonction caractéristique de l'événement $\{\omega : u_\omega^n(0) > x\}$. D'après (2.8), ces événements dépendent de façon croissante de n , si bien que

$$f_{n,x}(\omega) = n - (\eta_0 + \dots + \eta_n)(\omega)$$

et par conséquent $\int_\Omega f_{n,x}(\omega) = n\mu(\Omega) - G_n(x)$. On peut maintenant intégrer en ω l'inégalité (2.14), ce qui nous donne

$$(m+n)\mu(\Omega) - G_{m+n}(x+y) \geq m\mu(\Omega) - G_m(x) + n\mu(\Omega) - G_n(y)$$

et établit la première inégalité de (2.13). En combinant celle-ci avec l'inégalité duale, on obtient la deuxième inégalité de (2.13).

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $0 < \theta < 1$ on a

$$H_{m+n}(x) \leq H_m(\theta x) + H_n((1-\theta)x).$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{p-2} H_{m+n}(x) dx &\leq \int_0^\infty x^{p-2} H_m(\theta x) dx + \int_0^\infty x^{p-2} H_n((1-\theta)x) \\ &= \theta^{1-p} \int_0^\infty x^{p-2} H_m(x) dx + (1-\theta)^{1-p} \int_0^\infty x^{p-2} H_n(x) dx \end{aligned}$$

d'où, après multiplication par $p-1$,

$$\sum_{k=0}^{m+n} \int_\Omega |u_\omega^k(0)|^{p-1} \leq \theta^{1-p} \sum_{k=0}^m \int_\Omega |u_\omega^k(0)|^{p-1} + (1-\theta)^{1-p} \sum_{k=0}^n \int_\Omega |u_\omega^k(0)|^{p-1}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $0 < \theta < 1$, on peut ajuster θ de manière à minimiser le second membre; et ceci nous donne l'inégalité recherchée, grâce à la formule (2.7). \square

Corollaire 2.4. *Soit U un retardateur, et $p > 1$ réel. Pour tout $n \geq 1$,*

$$\int_\Omega |u_\omega^n(0)|^{p-1} \leq [n^p - (n-1)^p] \int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}. \quad (2.15)$$

Démonstration. On peut supposer $\|U\|_p < \infty$, sinon l'inégalité est triviale. Alors tous les $\|U : n\|_p$ sont finis, et pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_{\omega}^n(0)|^{p-1} &= \|U : n\|_p^p - \|U : n-1\|_p^p \\ &\leq \left[\|U : n-1\|_p + \|U\|_p \right]^p - \|U : n-1\|_p^p \\ &= p \int_0^{\|U\|_p} \left[\|U : n-1\|_p + t \right]^{p-1} dt \\ &\leq p \int_0^{\|U\|_p} \left[(n-1) \|U\|_p + t \right]^{p-1} dt = [n^p - (n-1)^p] \|U\|_p^p \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Les inégalités (2.12) et (2.15) sont optimales: le retardateur U correspondant à la fonction de Poincaré

$$u_0(x) = 1 + [x] \quad (2.16)$$

réalise l'égalité dans chacune d'elles.

3 Propriétés ergodiques des retardateurs

3.1 Préliminaires

Rappelons un résultat classique, *l'inégalité de Wiener* [Kre, Wie]: si $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une transformation préservant la mesure, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i \omega) \right| > \alpha \right\} \leq \alpha^{-1} \|f\|_1 \quad (3.1)$$

pour tout $\alpha > 0$.

Proposition 3.1. *Soit U un retardateur, et $p \geq 1$ un réel tel que $\|U\|_p < \infty$. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a $u_{\omega}(t) = t + o(|t|^{1/p})$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.*

En particulier, tout retardateur vérifie $u_{\omega}(t) \sim t$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration. Nous traiterons le cas $t \rightarrow +\infty$; l'autre cas, $t \rightarrow -\infty$, s'en déduit par dualité. On peut se limiter aux valeurs entières de t , à cause de la monotonie des u_{ω} . Aussi, dans cette démonstration, t désignera un entier positif.

Soit $0 < \alpha < 1$ quelconque. Pour tout $N \geq 0$, définissons la fonction

$$f_N(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u_{\omega}(0)| \leq N, \\ |u_{\omega}(0)|^{p-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

J'affirme que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|u_{\omega}(t) - t|}{t^{1/p}} > 2\alpha \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_N(-k + \omega) \geq \frac{\alpha^p}{2} \quad (3.2)$$

En effet, soit $t > 0$ tel que $|u_{\omega}(t) - t| > 2\alpha t^{1/p}$. Si $u_{\omega}(t) - t > 2\alpha t^{1/p}$, cela entraîne $u_{\omega}(s) - s > \alpha t^{1/p}$ pour tout entier s entre t et $t + \alpha t^{1/p}$. Si au contraire $u_{\omega}(t) - t < -2\alpha t^{1/p}$, alors

$u_\omega(s) - s < -\alpha t^{1/p}$ pour tout s entre $t - \alpha t^{1/p}$ et t . Dans les deux cas, il existe au moins $\alpha t^{1/p}$ entiers s entre 0 et $2t - 1$ tels que $|u_{-s+\omega}(0)| = |u_\omega(s) - s| \geq \alpha t^{1/p}$. Pour $t > (N/\alpha)^p$, ces entiers s vérifient $f_N(-s + \omega) = |u_{-s+\omega}(0)|^{p-1} \geq (\alpha t^{1/p})^{p-1}$, et par conséquent,

$$\frac{1}{2t} \sum_{s=0}^{2t-1} f_N(-s + \omega) \geq \frac{1}{2t} (\alpha t^{1/p}) \cdot (\alpha t^{1/p})^{p-1} = \frac{\alpha^p}{2}$$

ce qui prouve (3.2). On a donc

$$\mu \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|u_\omega(t) - t|}{t^{1/p}} > 2\alpha \right\} \leq \mu \left\{ \omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_N(-k + \omega) \geq \frac{\alpha^p}{2} \right\}$$

pour tous $0 < \alpha < 1$ et $N \geq 0$. D'autre part, on a l'inégalité de Wiener

$$\mu \left\{ \omega : \sup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_N(-k + \omega) > \frac{\alpha^p}{3} \right\} \leq \frac{3}{\alpha^p} \|f_N\|_1$$

et par suite

$$\mu \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|u_\omega(t) - t|}{t^{1/p}} > 2\alpha \right\} \leq \frac{3}{\alpha^p} \|f_N\|_1$$

Mais $\|f_N\|_1 \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$, par hypothèse, donc le membre de gauche est nul, quel que soit $0 < \alpha < 1$. \square

Lemme 3.2. Soit $U : (\omega, t) \mapsto (\omega, u_\omega(t))$ un retardateur. Pour tout réel $x \geq 0$,

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{|u_\omega^n(0)|}{n} > 2x \right\} \leq 2\mu \left\{ \omega \in \Omega : |u_\omega(0)| > x \right\} \quad (3.3)$$

Une conséquence importante de cette inégalité, obtenue en faisant tendre $x \rightarrow \infty$, est que la suite $u_\omega^n(0)/n$ est bornée pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration. On va en fait démontrer l'inégalité

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{u_\omega^n(0)}{n} > 2x \right\} \leq 2\mu \left\{ \omega \in \Omega : u_\omega(0) > x \right\} \quad (3.4)$$

qui, sommée avec l'inégalité duale, donnera le résultat cherché. On voit facilement que, pour un retardateur à temps discret, il suffit d'établir l'inégalité pour x entier. On supposera donc $x \in \mathbb{G}$ dans ce qui suit.

Soient $f_{n,x}(\omega)$ les fonctions définies dans la preuve du théorème 2.3, et $\eta_1(\omega) = 1 - f_{1,x}(\omega)$ la fonction caractéristique de l'événement $\{\omega : u_\omega(0) > x\}$. Alors

$$f_{2n,2nx}(\omega) \geq f_{1,x}(\omega) + f_{1,x}(-x + \omega) + \cdots + f_{1,x}(-(2n-1)x + \omega)$$

d'après (2.14), ou encore

$$2n - f_{2n,2nx}(\omega) \leq \sum_{i=0}^{2n-1} \eta_1(T^i \omega)$$

où $T : \omega \mapsto -x + \omega$. Comme par ailleurs $u_\omega^n(0) > 2nx$ équivaut à $2n - f_{2n,2nx}(\omega) > n$, on a

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{u_\omega^n(0)}{n} > 2x \right\} \leq \mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_1(T^i \omega) > \frac{1}{2} \right\}$$

et le second membre est borné par $2\|\eta_1\|_1 = 2\mu\{\omega : u_\omega(0) > x\}$ d'après l'inégalité de Wiener, ce qui montre (3.4). \square

Lemme 3.3. Soit $\rho : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction mesurable vérifiant $\rho(x+\omega) \leq \rho(\omega)$ pour tous $x \in \mathbb{G}^+, \omega \in \Omega$. Alors il existe Ω' (mesurable) de mesure pleine dans Ω et invariant, tel que la restriction $\rho|_{\Omega'}$ soit invariante.

Démonstration. Définissons les fonctions $\rho_x(\omega) = \rho(-x + \omega)$, pour tout $x \in \mathbb{G}$. Par hypothèse, cette famille de fonctions est croissante: pour tous $x, y \in \mathbb{G}$ tels que $x \leq y$, on a $\rho_x \leq \rho_y$, et comme ρ_x et ρ_y ont même mesure image, cela entraîne $\rho_x = \rho_y$ p.p. par un argument standard (voir par exemple [Ste]). Alors l'ensemble

$$\Omega' = \bigcap_{x, y \in \mathbb{G}} \{\omega : \rho_x(\omega) = \rho_y(\omega)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \rho_{-n}(\omega) = \rho_n(\omega)\}$$

répond à la question posée. □

3.2 Un théorème ergodique sur-multiplicatif

Théorème 3.4. Soit U_1, U_2, \dots une suite sur-multiplicative de retardateurs, c'est-à-dire telle que $U_{n+p} \geq U_n \circ U_p$. Écrivons $U_n(\omega, t) = (\omega, u_{n,\omega}(t))$, et soient $\rho_-, \rho_+ : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ les fonctions définies par

$$\rho_-(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n}, \quad \rho_+(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n}. \quad (3.5)$$

Alors $\rho_-(\omega) > -\infty$ presque partout, et l'ensemble

$$\{\omega : \rho_-(\omega) = 0\} \cup \{\omega : \rho_-(\omega) = \rho_+(\omega)\} \quad (3.6)$$

est de mesure pleine dans Ω .

Bien entendu, il existe aussi une version duale de ce théorème, pour les suites sous-multiplicatives de retardateurs.

Démonstration. Notons d'abord que $u_{n,\omega}(0) \geq u_{1,\omega}^n(0)$; comme la suite $u_{1,\omega}^n(0)/n$ est presque sûrement bornée, par la remarque suivant le lemme 3.2, on en déduit que $\rho_-(\omega) > -\infty$ presque partout.

Il reste à montrer que $\rho_-(\omega) = 0$ ou $\rho_-(\omega) = \rho_+(\omega)$ presque partout. Il suffit en fait de traiter le cas des retardateurs à temps discret, grâce à la réduction suivante. Si les U_1, U_2, \dots sont des retardateurs à temps continu, soient V_1, V_2, \dots les retardateurs à temps discret (sur le même espace Ω , l'action de \mathbb{R} étant restreinte aux entiers) définis par

$$v_{n,\omega}(x) = \lfloor u_{n,\omega}(x) \rfloor$$

pour tous $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}$. Il est facile de voir que la suite (V_n) est sur-multiplicative si la suite (U_n) l'était, et que les fonctions ρ_- et ρ_+ restent inchangées si on remplace les U_n par les V_n . On supposera donc maintenant que les U_n sont des retardateurs à temps discret.

Grâce au lemme 3.3 on peut supposer, quitte à restreindre Ω de manière inessentielle, que les fonctions ρ_- et ρ_+ sont rigoureusement invariantes par l'action de $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$. De la même façon, on peut supposer $u_\omega(t) \sim t$ quand $t \rightarrow \pm\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$, d'après la remarque qui suit la proposition 3.1. Il en résulte facilement que, pour tous $k \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{kn,\omega}(0)}{kn} = \rho_-(\omega), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{kn,\omega}(0)}{kn} = \rho_+(\omega).$$

Il suffit de démontrer que, pour tous $A, C > 0$ rationnels, les ensembles $I_C = \{\omega : \rho_-(\omega) < -C < \rho_+(\omega)\}$ et $J_{A,C} = \{\omega : A < \rho_-(\omega) < C < \rho_+(\omega)\}$ sont de mesure nulle. Ces ensembles étant invariants, il peuvent jouer le rôle de Ω dans les lemmes 3.5 et 3.6.

Appliquons d'abord le lemme 3.5 avec I_C au lieu de Ω . Pour tout $\omega \in I_C$, on a

$$\text{Sup}_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} \geq \rho_+(\omega) > -C > \rho_-(\omega)$$

si bien que l'inégalité (3.8) s'écrit simplement

$$\mu \left\{ \omega \in I_C : \rho_-(\omega) < \frac{-C}{1-\lambda} \right\} = 0$$

pour tout $0 < \lambda < 1$. En faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, il vient $0 = \mu \{ \omega \in I_C : \rho_-(\omega) < -C \} = \mu(I_C)$.

Examinons maintenant les $J_{A,C}$, pour $A, C > 0$ fixés. Soient $k, \ell \geq 1$ deux entiers, et soient V_1, V_2, \dots les fonctions de $\Omega \times \mathbb{Z}$ dans lui-même définies par

$$v_{n,\omega}(x) = \lfloor u_{kn,\omega}(\ell x) / \ell \rfloor$$

On vérifie que les V_n sont des retardateurs, pour l'action de \mathbb{Z} sur Ω donnée par $(t, \omega) \mapsto \ell t + \omega$, et qu'ils forment une suite sur-multiplicative. On peut donc leur appliquer le lemme 3.6 avec $J_{A,C}$ au lieu de Ω , et C/A au lieu de C . Comme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n} = \frac{k}{\ell} \rho_-(\omega), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n} = \frac{k}{\ell} \rho_+(\omega),$$

on voit que pour $\ell \leq Ak$ la formule (3.12) se réduit à

$$\lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in J_{A,C} : \rho_-(\omega) < \frac{\ell}{k} \frac{C}{A + 2\lambda C} \right\} \leq \mu \left\{ \omega \in J_{A,C} : \text{Inf}_{n \geq 1} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n} < 1 \right\}$$

D'autre part, on voit facilement que

$$\text{Inf}_{n \geq 1} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n} < 1 \iff \text{Inf}_{n \geq 1} \frac{u_{kn,\omega}(0)}{kn} < \frac{\ell}{k} \implies \text{Inf}_{n \geq k} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < \frac{\ell}{k} \leq A$$

et on a donc

$$\lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in J_{A,C} : \rho_-(\omega) < \frac{\lfloor Ak \rfloor}{k} \frac{C}{A + 2\lambda C} \right\} \leq \mu \left\{ \omega \in J_{A,C} : \text{Inf}_{n \geq k} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < A \right\}$$

pour tout entier $k \geq 1/A$, en prenant $\ell = \lfloor Ak \rfloor$. En faisant tendre $k \rightarrow \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, il vient

$$\mu \left\{ \omega \in J_{A,C} : \rho_-(\omega) < \frac{C}{1 + 2\lambda C/A} \right\} = 0$$

puisque $\rho_-(\omega) > A$ partout sur $J_{A,C}$, et cette égalité est valable pour tout $0 < \lambda < 1$. Faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, il vient $0 = \mu \{ \omega \in J_{A,C} : \rho_-(\omega) < C \} = \mu(J_{A,C})$. Ceci termine la preuve du théorème (modulo les lemmes 3.5 et 3.6). \square

Lemme 3.5. Soit U_1, U_2, \dots une suite sur-multiplicative de retardateurs à temps discret. Pour tous $C, D \geq 0$ et $0 < \lambda < 1$ réels et $N \geq 1$ entier,

$$\lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in \Omega : \text{Inf}_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0) + D}{n} < \frac{-C}{1-\lambda} \right\} \leq \mu \left\{ \omega \in \Omega : \text{Sup}_{1 \leq n \leq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < -C \text{ ou } \text{Inf}_{1 \leq n < N} u_{n,\omega}(0) < -D \right\} \quad (3.7)$$

et par conséquent

$$\lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < \frac{-C}{1-\lambda} \right\} \leq \mu \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} \leq -C \right\} \quad (3.8)$$

Démonstration. Posons $U_0 = \mathbf{1}$, et définissons les événements

$$E = \left\{ \omega : \sup_{1 \leq n \leq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < -C \text{ ou } \inf_{1 \leq n < N} u_{n,\omega}(0) < -D \right\}$$

$$F = \left\{ \omega : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_E(i + \omega) > \lambda \right\}$$

où $\mathbf{1}_E$ est la fonction caractéristique de E . On a $\mu(F) \leq \lambda^{-1} \mu(E)$ d'après l'inégalité de Wiener. Il reste à montrer que $F \supseteq G$, où

$$G = \left\{ \omega : \inf_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0) + D}{n} < \frac{-C}{1-\lambda} \right\}$$

Soit $\omega \notin F$. Pour un tel ω , l'ensemble $B = \{i \in \mathbb{N} : i + \omega \notin E\}$ des "bons entiers" vérifie

$$\#(B \cap [0, n[) \geq (1-\lambda)n \quad (3.9)$$

pour tout $n \geq 0$. En particulier, B est infini et contient 0. Parmi les entiers naturels, les éléments de B sont caractérisés ainsi:

$$i \in B \iff \exists j \in [1, N] \ u_{j,\omega}(-i) \geq -i - Cj \text{ et } \forall j \in [0, N[\ u_{j,\omega}(-i) \geq -i - D.$$

Ceci permet de définir par récurrence deux suites d'entiers naturels x_0, x_1, \dots et y_0, y_1, \dots , en imposant $x_0 = 0$, $-y_k = (-x_k) \wedge u_{j_k,\omega}(-x_k)$, l'entier $j_k \in [1, N]$ étant choisi de manière à ce que $y_k - x_k \leq Cj_k$, et x_{k+1} est le plus petit majorant de y_k dans B . Ainsi, par construction, tous les x_k sont des "bons" entiers, avec $0 = x_0 \leq y_0 \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots$, et tous les éléments de $[y_k, x_{k+1}[$ sont des "mauvais" entiers:

$$\sum_{i=y_k}^{x_{k+1}-1} \mathbf{1}_E(i + \omega) = x_{k+1} - y_k$$

et par conséquent

$$\lambda x_k \geq \sum_{i=0}^{x_k-1} \mathbf{1}_E(i + \omega) \geq \sum_{i=0}^{k-1} x_{i+1} - y_i = x_k - \sum_{i=0}^{k-1} y_i - x_i$$

d'où

$$C \sum_{i=0}^{k-1} j_i \geq \sum_{i=0}^{k-1} y_i - x_i \geq (1-\lambda)x_k \quad (3.10)$$

Soit maintenant un entier $n \geq 1$ quelconque. On peut l'écrire, de manière unique,

$$n = j_0 + \dots + j_{k-1} + r$$

avec $k \geq 0$ et $0 \leq r < j_k \leq N$. Comme $u_{j_i,\omega}(-x_i) \geq -y_i \geq -x_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n,\omega}(0) &\geq u_{r,\omega} u_{j_{k-1},\omega} \dots u_{j_0,\omega}(-x_0) \\ &\geq u_{r,\omega}(-x_k) \geq -x_k - D \end{aligned}$$

et donc

$$u_{n,\omega}(0) + D \geq -x_k \geq \frac{-C}{1-\lambda}(j_0 + \dots + j_{k-1}) \geq \frac{-C}{1-\lambda}n$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que $\omega \notin G$. Ceci étant valable pour tout $\omega \notin F$, on a bien $F \supseteq G$ et le lemme est démontré. \square

Lemme 3.6. Soit U_1, U_2, \dots une suite sur-multiplicative de retardateurs à temps discret. Pour tous $C \geq 0$ et $0 < \lambda < 1$ réels et $N \geq 1$ entier,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in \Omega : \inf_{n \geq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n - N + 1} < \frac{C}{1 + 2\lambda C} \right\} \leq \\ \mu \left\{ \omega \in \Omega : \inf_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < 1 \text{ ou } \sup_{1 \leq n \leq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < C \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < \frac{C}{1 + 2\lambda C} \right\} \leq \\ \mu \left\{ \omega \in \Omega : \inf_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < 1 \text{ ou } \sup_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} \leq C \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Démonstration. Soient E, F les événements définis par

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \omega : \inf_{n \geq 1} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < 1 \text{ ou } \sup_{1 \leq n \leq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} < C \right\} \\ F &= \left\{ \omega : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_E(-i + \omega) > \lambda \right\} \end{aligned}$$

Ici encore on a $\mu(F) \leq \lambda^{-1} \mu(E)$ par l'inégalité de Wiener, et on doit démontrer que $F \supseteq G$, où

$$G = \left\{ \omega : \inf_{n \geq N} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n - N + 1} < \frac{C}{1 + 2\lambda C} \right\}$$

Soit $\omega \notin F$. Ici encore l'ensemble $B = \{i \in \mathbb{N} : -i + \omega \notin E\}$ des "bons entiers" vérifie l'inégalité (3.9) pour tout $n \geq 0$; en particulier, il est infini et contient 0. Les "bons entiers" sont caractérisés comme suit:

$$i \in B \iff \exists j \in [1, N] \ u_{j,\omega}(i) \geq i + Cj \text{ et } \forall j \in \mathbb{N} \ u_{j,\omega}(i) \geq i + j.$$

En particulier $0 \in B$ et donc $u_{n,\omega}(0) \geq n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne évidemment $\omega \notin G$ si $C/(1 + 2\lambda C) \leq 1$. On supposera donc par la suite que $C > 1 + 2\lambda C$, autrement dit $C > 0$ et $C^{-1} + 2\lambda < 1$. D'autre part,

$$u_{n+1,\omega}(0) \geq u_{n,\omega} u_{1,\omega}(0) \geq u_{n,\omega}(0)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $u_{n,\omega}(0)$ est croissante, et commence par 0.

Définissons par récurrence trois suites d'entiers naturels $x_0, x_1, \dots, y_0, y_1, \dots$, et z_0, z_1, \dots comme suit. On pose $x_0 = 0$. Si x_k est un bon entier, on peut trouver $j_k \in [1, N]$ tel que $y_k = u_{j_k,\omega}(x_k)$ vérifie $y_k - x_k \geq Cj_k$. On définit alors z_k et x_{k+1} comme le plus grand minorant et le plus petit majorant, respectivement, de y_k dans B , et on pose $v_k = x_{k+1} - z_k$. Si y_k est un bon

entier, alors $v_k = 0$, sinon $v_k \geq 2$; dans les deux cas, $(v_k - 1)^+ \geq v_k/2$. Comme x_{k+1} est (par définition) un bon entier, on peut itérer cette construction.

Il est évident que $x_k \leq z_k \leq y_k \leq x_{k+1}$, et comme z_k est un bon entier, $u_{v_k, \omega}(z_k) \geq z_k + v_k = x_{k+1}$ et par conséquent $u_{j_k + v_k, \omega}(x_k) \geq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$u_{j_0 + v_0 + \dots + j_{k-1} + v_{k-1}, \omega}(0) \geq x_k \quad (3.13)$$

pour tout $k \geq 0$. D'autre part, les intervalles (disjoints) $]z_k, x_{k+1}[$ sont constitués entièrement de mauvais entiers, et donc

$$\lambda x_k \geq \sum_{i=0}^{x_k-1} \mathbf{1}_E(-i + \omega) \geq \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - z_i - 1)^+ = \sum_{i=0}^{k-1} (v_i - 1)^+ \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} v_i \quad (3.14)$$

tandis que

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} x_{i+1} - x_i \geq \sum_{i=0}^{k-1} y_i - x_i \geq C \sum_{i=0}^{k-1} j_i \quad (3.15)$$

Soit n un entier naturel quelconque; nous allons distinguer trois cas, selon sa valeur. En premier lieu, supposons

$$n = j_0 + v_0 + \dots + j_{k-1} + v_{k-1}$$

pour un certain $k \geq 0$. Alors $u_{n, \omega}(0) \geq x_k$ d'après (3.13), tandis que

$$n = (j_0 + \dots + j_{k-1}) + (v_0 + \dots + v_{k-1}) \leq C^{-1} x_k + 2\lambda x_k$$

d'après (3.14) et (3.15), et donc $u_{n, \omega}(0) \geq n/(C^{-1} + 2\lambda)$ dans ce cas.

Considérons maintenant le cas où

$$n = j_0 + v_0 + \dots + j_{k-1} + v_{k-1} + r$$

avec $k \geq 0$ et $0 \leq r < j_k \leq N$. Le résultat précédent s'applique avec $n - r$ au lieu de n , et comme la suite $u_{n, \omega}(0)$ est croissante,

$$u_{n, \omega}(0) \geq u_{n-r, \omega}(0) \geq \frac{n-r}{C^{-1} + 2\lambda} \geq \frac{n-N+1}{C^{-1} + 2\lambda}$$

Traitons enfin le cas où

$$n = j_0 + v_0 + \dots + j_{k-1} + v_{k-1} - s$$

avec $k \geq 1$ et $0 \leq s \leq v_{k-1}$. Alors, d'après (3.13),

$$\begin{aligned} u_{n, \omega}(0) &\geq u_{v_{k-1}-s, \omega} u_{j_{k-1}, \omega} u_{j_0 + v_0 + \dots + v_{k-2}, \omega}(0) \\ &\geq u_{v_{k-1}-s, \omega} u_{j_{k-1}, \omega}(x_{k-1}) \geq u_{v_{k-1}-s, \omega}(z_{k-1}) \\ &\geq z_{k-1} + v_{k-1} - s = x_k - s \end{aligned}$$

tandis que, d'après (3.14) et (3.15),

$$\begin{aligned} n &= (j_0 + \dots + j_{k-1}) + (v_0 + \dots + v_{k-1}) - s \\ &\leq (C^{-1} + 2\lambda)x_k - s \leq (C^{-1} + 2\lambda)(x_k - s) \end{aligned}$$

car $C^{-1} + 2\lambda < 1$, et donc $u_{n, \omega}(0) \geq n/(C^{-1} + 2\lambda)$ ici encore.

Nous avons ainsi démontré que $u_{n, \omega}(0) \geq (n - N + 1)/(C^{-1} + 2\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\omega \notin G$. On a donc bien $F \supseteq G$ et le lemme est démontré. \square

Ce théorème est très similaire au théorème ergodique sous-additif de Kingman [Kin], et la démonstration donnée ici ressemble beaucoup à la preuve de Steele [Ste] du théorème de Kingman. Les détails diffèrent, cependant, et je ne pense pas qu'on puisse déduire le théorème 3.4 du théorème de Kingman ou vice-versa. La différence la plus frappante est que, contrairement aux théorèmes ergodiques classiques (dont celui de Kingman), le théorème 3.4 ne nécessite aucune hypothèse d'intégrabilité; en un sens, cette information est déjà contenue dans l'hypothèse que les U_i sont des retardateurs. C'est plus visible encore avec le théorème 3.7, qui est un corollaire direct du théorème 3.4, et qui affirme l'existence et la finitude p.p. du temps de cycle d'un retardateur *arbitraire*.

3.3 Un cas où $0 = \rho_-(\omega) < \rho_+(\omega)$ presque partout

En voyant le théorème 3.4, on est naturellement amené à se demander si, sous les mêmes hypothèses, l'ensemble $\{\omega : \rho_-(\omega) = \rho_+(\omega)\}$ est de mesure pleine. Ce n'est pas forcément le cas, comme le montre l'exemple suivant.

Prenons pour Ω l'ensemble \mathbb{Z}_2 des entiers 2-adiques, muni de la mesure de probabilité de Haar, et de l'action usuelle de \mathbb{Z} , et considérons les retardateurs à temps discret V_0, V_1, \dots définis par $v_{\ell, \omega}(x) = x + R_\ell(-x + \omega)$, où

$$R_\ell(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \equiv 0 \pmod{2^\ell}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite V_0, V_1, \dots est croissante, si bien que la suite de retardateurs U_1, U_2, \dots définie par $U_n = V_{\ell(n)}^n$, où $\ell(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$, est sur-multiplicative. En effet,

$$U_{n+p} = V_{\ell(n+p)}^{n+p} = V_{\ell(n+p)}^n V_{\ell(n+p)}^p \geq V_{\ell(n)}^n V_{\ell(p)}^p = U_n U_p.$$

Notons $\omega_\ell \in [0, 2^\ell[$ la réduction modulo 2^ℓ de ω . On vérifie facilement (par récurrence sur r) que, pour tous $\ell, r \geq 0$,

$$v_{\ell, \omega}^r(0) = r \wedge \omega_\ell$$

et donc $u_{n, \omega}(0) = \omega_{\ell(n)}$ pour tout $n \geq 1$, puisque $n \geq 2^{\ell(n)} > \omega_{\ell(n)}$. On en déduit

$$\rho_-(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{\ell(n)}}{n} = \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\omega_\ell}{2^{\ell+1}}, \quad \rho_+(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{\ell(n)}}{n} = \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\omega_\ell}{2^\ell}.$$

Mais on sait bien que la suite $\omega_\ell/2^\ell$ est dense dans l'intervalle $[0, 1]$, d'où $\rho_-(\omega) = 0$ et $\rho_+(\omega) = 1$, pour presque tout $\omega \in \Omega$.

3.4 Temps de cycle

Théorème 3.7. *Soit U un retardateur. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $u_\omega^n(0)/n$ converge dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Soit $U_n = U^n$ la suite des itérées de U , ρ_- et ρ_+ les fonctions définies par (3.5), et $E = \{\omega : \rho_-(\omega) \neq \rho_+(\omega)\}$. La suite U_n étant sur-multiplicative, on peut lui appliquer le théorème 3.4, qui affirme que $\rho_-(\omega) = 0$ pour presque tout $\omega \in E$. Mais la suite U_n est aussi sous-multiplicative, et le théorème dual de 3.4 nous dit que $\rho_+(\omega) = 0$ pour presque tout $\omega \in E$. Donc $\rho_-(\omega) = \rho_+(\omega) = 0$ p.p. sur E , en contradiction avec la définition de E , sauf si E est de mesure nulle.

Les fonctions ρ_- et ρ_+ sont donc presque partout égales sur Ω , et elles sont presque partout finies d'après la remarque qui suit le lemme 3.2. \square

On notera $\text{CT}_U(\omega)$ la limite des $u_\omega^n(0)/n$, si elle existe (dans \mathbb{R}). Définie pour μ -presque tout ω , c'est la *fonction temps de cycle* du retardateur. Elle est p.p. invariante, d'après le lemme 3.3; en particulier, elle est p.p. constante si l'action de \mathbb{G} est ergodique. Pour un \mathbb{T} -retardateur, cette constante n'est autre que le nombre de rotation de la fonction de Poincaré correspondante.

Permettant ainsi une généralisation du nombre de rotation, le théorème 3.7 est à rapprocher d'un résultat analogue de Kwapisz [Kwa], qui affirme l'existence d'un nombre de rotation (ou temps de cycle) pour les fonctions continues croissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x) - x$ est presque périodique.

La fonction temps de cycle, tout comme le nombre de rotation pour les fonctions de Poincaré, est un invariant de semi-conjugaison:

Proposition 3.8. *Soient U, V, H trois retardateurs faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{G} & \xrightarrow{U} & \Omega \times \mathbb{G} \\ H \downarrow & & H \downarrow \\ \Omega \times \mathbb{G} & \xrightarrow{V} & \Omega \times \mathbb{G} \end{array}$$

i.e. $HU = VH$. Alors $\text{CT}_U = \text{CT}_V$ presque partout.

Ceci résulte immédiatement des définitions de CT_U, CT_V et de la remarque qui suit la proposition 3.1.

Proposition 3.9. *Soit U un retardateur, et $p > 1$ un réel tel que $\|U\|_p < \infty$. Alors les fonctions $u_\omega^n(0)/n$ convergent vers $\text{CT}_U(\omega)$ dans $L^{p-1}(\Omega)$, de manière dominée, et*

$$\left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\text{CT}_U(\omega)|^{p-1} \right)^{1/p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|U : n\|_p}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\|U : n\|_p}{n}. \quad (3.16)$$

Ce résultat est à rapprocher du ‘‘théorème ergodique dominé’’ de Fukamiya et Wiener pour les moyennes de Birkhoff [Fuk, Wie].

Démonstration. La fonction $G(\omega) = \sup_{n \geq 1} |u_\omega^n(0)/n|$ vérifie, d'après le lemme 3.2,

$$\mu\{\omega : G(\omega) > 2x\} \leq 2\mu\{\omega : |u_\omega(0)| > x\}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En multipliant cette inégalité par x^{p-2} et en intégrant sur \mathbb{R}^+ , il vient

$$\int_{\Omega} G(\omega)^{p-1} \leq 2^p \int_{\Omega} |u_\omega(0)|^{p-1} < \infty$$

Les fonctions $|u_\omega^n(0)/n|^{p-1}$ sont donc bien dominées par une fonction intégrable, et leur limite p.p. $|\text{CT}_U(\omega)|^{p-1}$ est intégrable; soit I son intégrale. Par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\Omega} |u_\omega^n(0)|^{p-1} = n^{p-1}(I + o(1))$$

quand $n \rightarrow \infty$, et par suite

$$\begin{aligned} \|U : n\|_p^p &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} |u_\omega^k(0)|^{p-1} = (1^{p-1} + \dots + n^{p-1})(I + o(1)) \\ &= n^p(I/p + o(1)) \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité de (3.16). La deuxième égalité, quant à elle, résulte simplement de la sous-additivité des $\|U : n\|_p$ (théorème 2.3). \square

Comme corollaire de ce résultat, notons que $\|U\|_p$, en fait tout $\|U: n\|_p/n$ pour $n \geq 1$, est un majorant de $(I/p)^{1/p}$:

$$\int_{\Omega} |\text{CT}_U(\omega)|^{p-1} \leq p \int_{\Omega} |u_{\omega}(0)|^{p-1} \quad (3.17)$$

quel que soit $p > 1$. On aurait aussi pu obtenir cette borne à partir de (2.15) et du lemme de Fatou. Elle est optimale: le retardateur U donné par la fonction de Poincaré (2.16) réalise l'égalité dans (3.17).

Références

- [Arn] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir (1980)
- [B+] F. BACCELLI, G. COHEN, G. J. OLSDER & J.-P. QUADRAT, *Synchronization and linearity*, Wiley (1992)
- [Bou] T. BOUSCH, *Fonctions topicales et causalité*, manuscrit (2003)
- [BM] T. BOUSCH & J. MAIRESSE, *Fonctions topicales à portée finie et fonctions uniformément topicales*, préprint 2003-002, LIAFA (2003)
- [CT] M. CRANDALL & L. TARTAR, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. AMS **78** (1980), pp. 385–390
- [Fuk] M. FUKAMIYA, *On dominated ergodic theorems in L_p ($p \geq 1$)*, Tôhoku Math. J. **46** (1939), pp. 150–153
- [Gu1] J. GUNAWARDENA, *Timing analysis of digital circuits and the theory of min-max functions*, préprint HPL-94-39, Hewlett-Packard (1994)
- [Gu2] J. GUNAWARDENA (dir.), *Idempotency*, Cambridge University Press (1998)
- [Gu3] J. GUNAWARDENA, *From max-plus algebra to nonexpansive mappings: a nonlinear theory for discrete event systems*, Theor. Comp. Sci. **293** (2003), pp. 141–167
- [GK] J. GUNAWARDENA & M. KEANE, *On the existence of cycle times for some non-expansive maps*, préprint HPL-BRIMS-95-003, Hewlett-Packard (1995)
- [Kin] J. F. C. KINGMAN, *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*, J. Roy. Statist. Soc. B **30** (1968), pp. 499–510
- [Kre] U. KRENGEL, *Ergodic theorems*, de Gruyter (1985)
- [Kwa] J. KWAPISZ, *Poincaré rotation number for maps of the real line with almost periodic displacement*, Nonlinearity **13** (2000), pp. 1841–1854
- [Ste] J. M. STEELE, *Kingman's subadditive ergodic theorem*, Ann. IHP Proba. Stat. **25** (1989), pp. 93–98
- [Wie] N. WIENER, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939), pp. 1–18