Le lemme de Mañé-Conze-Guivarc'h pour les systèmes amphidynamiques rectifiables

Thierry Bousch*

21 mai 2007

Abstract

The Mañé-Conze-Guivarc'h lemma (in Lipschitz class) is proved, for amphidynamical systems which satisfy some hyperbolicity condition, called "rectifiability". Various applications are given.

Résumé

On démontre le lemme de Mañé-Conze-Guivarc'h (en classe Lipschitz) pour les systèmes amphidynamiques vérifiant une certaine condition d'hyperbolicité: la "rectifiabilité". Diverses applications sont données.

Titre anglais: The Mañé-Conze-Guivarc'h lemma for rectifiable amphidynamical systems

Mots-clés: optimisation ergodique, hyperbolicité, cobord lipschitzien

Classification AMS (2000): 37J50 (primaire), 37D20 (secondaire)

1 Introduction

Le problème de l'"optimisation ergodique" consiste à trouver, parmi toutes les mesures de probabilité invariantes d'un système dynamique donné $T : X \to X$, celles qui minimisent l'intégrale d'une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ donnée [Bo1, YH]. L'existence de ces mesures est garantie par des arguments abstraits, dans une très grande généralité (X compact non vide, T, u continues), mais leur détermination explicite est un problème difficile. Ce n'est possible qu'avec des hypothèses additionnelles sur la dynamique (T dilatante ou hyperbolique) et sur la régularité de u (condition de Hölder, ou de Walters), et grâce à un résultat essentiel, le théorème (ou lemme) de Mañé-Conze-Guivarc'h.

Parfois attribué à Mañé [Man], il apparaît pour la première fois (à ma connaissance) dans un préprint de Conze et Guivarc'h [CG], essentiellement sous la forme suivante: si T est dilatante et u hölderienne, et si u est de moyenne positive sur toute orbite périodique, alors $u \geqslant vT - v$ pour une certaine fonction $v : X \to \mathbb{R}$, hölderienne de même exposant que u, et avec une constante comparable.

De nombreuses variantes et extensions de ce résultat ont été obtenues indépendamment [Bo1, Bo2, CLT, LT1, LT2, Sav], certaines preuves faisant apparaître des similitudes avec des problèmes d'origine différente [Bar, BM, Fat, Lei]. La plupart de ces énoncés concernent le

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

cas où T est dilatante. Quand T est seulement hyperbolique, le "lemme de Mañé version hyperbolique" de [Bo2] affirme l'existence d'une fonction v continue, si u est Walters, mais sans donner de module de continuité explicite.

Toujours dans le cas où T est hyperbolique, un article plus récent de Lopes et Thieullen [LT1] affirme qu'il existe v hölderienne, si u est hölderienne, mais avec un exposant *plus petit* que celui de u, et [LT2] donne un résultat analogue pour les flots hyperboliques.

Ces résultats pessimistes sont à comparer au théorème de Lifchitz [Liv], qui affirme que si l'equation $u = vT - v$ a une solution, alors v est aussi régulière que u, et ce aussi bien dans le cas hyperbolique que dans le cas dilatant. D'autre part, le théorème de Yuan et Hunt [YH] sur l'instabilité des mesures minimisantes non-périodiques repose, dans sa démonstration originale, sur des estimations qui *suggèrent* l'existence d'une solution v de l'inéquation cohomologique $u \geqslant vT - v$ ayant même régularité que u (même exposant de Hölder, et constantes comparables). Quant à la nouvelle démonstration que j'ai proposée récemment de ce théorème [Bo3], elle repose de manière essentielle, et explicite, sur un lemme de Mañé-Conze-Guivarc'h où il n'y a aucune perte de régularité entre u et v. Voilà autant de motivations pour chercher à améliorer le résultat de [LT1].

Le but du présent article est justement de montrer que, sous une certaine hypothèse d'hyperbolicité de T, que j'appelle *rectifiabilité*, il existe v aussi régulière que u. Plus précisément, on suppose u lipschitzienne de constante $\leqslant 1$ (quitte à modifier la distance sur X), et on montre qu'il existe v lipschitzienne, de constante bornée, vérifiant l'inéquation cohomologique. Ce théorème, qui est strictement plus fort que celui de [LT1], est précisément celui dont j'ai besoin (et que j'avais promis) dans [Bo3].

Le théorème de Mañé-Conze-Guivarc'h sera ici énoncé dans le cas des *systèmes amphidynamiques*, qui consistent en la donnée de deux espaces métriques compacts et deux fonctions continues $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$. Ce formalisme a été introduit dans [Bo3] afin d'unifier les énoncés et les preuves concernant les systèmes dynamiques, qui correspondent à $X_0 \xleftarrow{\mathrm{Id}} X_0 \xrightarrow{T} X_0$, et une classe de modèles, considérés notamment par Leizarowitz [Lei], qui correspondent à $X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_0^2 \xrightarrow{\pi_1} X_0$, où π_0, π_1 sont les projections naturelles, et peuvent être vus comme des systèmes lagrangiens à temps discret. Pour un système amphidynamique, l'inéquation cohomologique s'écrit $u \geqslant v\partial_1 - v\partial_0$, où $u : X_1 \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée et $v : X_0 \to \mathbb{R}$ la fonction inconnue.

Le premier resultat de cet article, le lemme 1.1, montre en toute généralité que l'existence de v (avec un module de continuité prescrit) équivaut à un ensemble d'inégalités concernant non seulement les orbites, mais aussi toutes les pseudo-orbites du système (amphi)dynamique considéré. Sa démontration, en substance, revient à se ramener au cas $X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_0^2 \xrightarrow{\pi_1} X_0$, ce qui illustre encore l'importance et le caractère "universel" de ces systèmes amphidynamiques particuliers.

Dans le chapitre 2, j'introduis la notion de *rectifiabilité*, sorte de condition d'hyperbolicité de nature métrique, ne nécessitant aucune structure différentiable sur X_0 ou X_1, et donc utilisable aussi bien sur des variétés que des laminations ou des cantors. Cette condition, assez facile à vérifier en pratique, entraîne un "lemme de poursuite" (lemme 2.1) permettant de "rectifier" les pseudo-orbites en de vraies orbites, à quelques détails près.

De ces deux lemmes on déduit le théorème principal (théorème 3.1), avec quelques complications techniques quand la distance limite de rectification L est finie; cela fait l'objet du chapitre 3.

Enfin, le chapitre 4 donne divers exemples de systèmes amphidynamiques rectifiables: les multigraphes finis, les systèmes $X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_0^2 \xrightarrow{\pi_1} X_0$, les sous-décalages unilatères et bilatères de type fini, les applications dilatantes, les difféomorphismes d'Anosov, ainsi que certaines correspondances particulières.

Lemme 1.1. *Soit (X_0,d) un espace métrique, X_1 un ensemble, $\partial_0,\partial_1 : X_1 \to X_0$ et $u : X_1 \to \mathbb{R}$ des fonctions. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) Pour tout $n \geqslant 1$ et toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ d'éléments de X_1,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} u(x_i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) \geqslant 0 \tag{1.1}$$

(ii) Il existe une fonction 1-lipschitzienne $v : X_0 \to \mathbb{R}$ telle que $u \geqslant v\partial_1 - v\partial_0$.

Démonstration. (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons $u \geqslant v\partial_1 - v\partial_0$ avec v 1-lipschitzienne. Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_i u(x_i) &\geqslant \sum_i v\partial_1(x_i) - v\partial_0(x_i) = \sum_i v\partial_1(x_i) - v\partial_0(x_{i+1})\\ &\geqslant \sum_i -d(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1})\end{aligned}$$

qui est l'inégalité cherchée.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons les inégalités (1.1) satisfaites. Ecartons immédiatement les cas triviaux où X_0 ou X_1 est vide, et choisissons un point p dans X_0. Soient $v_0, v_1, v_2, \ldots : X_0 \to [-\infty,\infty[$ les fonctions définies par

$$\begin{aligned}v_0(x) &= d(p,x)\\ v_{n+1}(x) &= \operatorname*{Inf}_{s\in X_1} v_n(\partial_0 s) + u(s) + d(\partial_1 s, x)\end{aligned}$$

et $v : X_0 \to [-\infty,\infty[$ leur borne inférieure.
Les fonctions v_n sont 1-lipschitziennes, i.e. satisfont $v_n(y) \leqslant v_n(x) + d(x,y)$ pour tous x, y, et donc v aussi. Par hypothèse, $v_n(p) \geqslant 0$ $\forall n$, donc $v(p) \geqslant 0$ et par suite $v(x) \geqslant -d(p,x)$ pour tout x, ce qui montre que v est à valeurs réelles. D'autre part, les inégalités

$$v(x) \leqslant v_{n+1}(x) \leqslant v_n(\partial_0 s) + u(s) + d(\partial_1 s, x)$$

entraînent, par passage à la borne inférieure,

$$v(x) \leqslant v(\partial_0 s) + u(s) + d(\partial_1 s, x)$$

pour tous $x \in X_0$, $s \in X_1$. En particulier, pour $x = \partial_1 s$ on obtient

$$v(\partial_1 s) \leqslant v(\partial_0 s) + u(s)$$

pour tout $s \in X_1$, ce qu'il fallait démontrer. □

2 Systèmes amphidynamiques rectifiables

Soient (X_0,d_0) et (X_1,d_1) deux espaces métriques compacts, et $\partial_0,\partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions continues. Disons que le système amphidynamique $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ est L-rectifiable, pour un $L \in\,]0,\infty]$ donné, s'il vérifie la propriété suivante : quels que soient $x, y \in X_1$ tels que $d_0(\partial_1 x, \partial_0 y) < L$, il existe $x', y' \in X_1$ tels que $\partial_1 x' = \partial_0 y'$ et

$$d_1(x,x') + d_1(y,y') + d_0(\partial_0 x, \partial_0 x') + d_0(\partial_1 y, \partial_1 y') \leqslant d_0(\partial_1 x, \partial_0 y). \tag{2.1}$$

Les systèmes amphidynamiques rectifiables satisfont le *lemme de poursuite* (shadowing lemma) suivant.

Lemme 2.1. *Soient (X_0, d_0) et (X_1, d_1) deux espaces métriques compacts et $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions continues. On suppose que le système amphidynamique $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ est L-rectifiable pour un certain $0 < L \leqslant \infty$. Alors, pour tout $n \geqslant 2$ et toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ d'éléments de X_1, il existe une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ d'éléments de X_1 vérifiant*

$$\sum_i d_1(x_i, y_i) \; + \; \sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) \; \leqslant \; \sum_i d_0(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) \tag{2.2}$$

et telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $\partial_1 y_i = \partial_0 y_{i+1}$ ou bien $d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) \geqslant L$.

Notons en particulier que si les (x_i) vérifient $\sum_i d_0(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) < L$, alors (y_i) sera une orbite du système amphidynamique, i.e. $\partial_1 y_i = \partial_0 y_{i+1}$ $\forall i$.
Il ne faudrait pas être tenté de croire qu'on puisse se passer de l'hypothèse $n \geqslant 2$ dans le lemme. Le résultat n'est pas vrai pour $n = 1$; il existe notamment des systèmes amphidynamiques ∞-rectifiables sans point fixe (i.e. $\partial_0 x \neq \partial_1 x$ pour tout $x \in X_1$).

Démonstration. Considérons l'ensemble $X = (X_1)^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, muni de la distance de Manhattan

$$d(s,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d(s_i, t_i)$$

et la fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_0(\partial_1 t_i, \partial_0 t_{i+1}).$$

Soit $x = (x_i)$, et $\Psi : X \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \Phi(t) + d(x,t)$. L'ensemble

$$\{t \in X : \Psi(t) = \operatorname{Inf} \Psi\}$$

est un sous-ensemble compact non vide de X, sur laquelle la fonction Φ restreinte atteint son minimum, en un point que je noterai y. Autrement dit, y est tel que

$$\forall z \in X \qquad \Psi(z) > \Psi(y) \text{ ou } \big[\Psi(z) = \Psi(y) \text{ et } \Phi(z) \geqslant \Phi(y)\big]. \tag{2.3}$$

On a en particulier $\Psi(x) \geqslant \Psi(y)$, qui est précisément l'inégalité (2.2).
Il reste à voir que les distances $d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1})$ sont toutes dans $\{0\} \cup [L, \infty[$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un indice i tel que $0 < d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) < L$. D'après l'hypothèse de rectification, il existe $u, v \in X_1$ tels que $\partial_1 u = \partial_0 v$ et

$$d_1(y_i, u) + d_1(y_{i+1}, v) + d_0(\partial_0 y_i, \partial_0 u) + d_0(\partial_1 y_{i+1}, \partial_1 v) \leqslant d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}). \tag{2.4}$$

Définissons alors $z = (z_j)$ de la façon suivante,

$$z_j = \begin{cases} y_j & \text{si } j \notin \{i, i+1\}, \\ u & \text{si } j = i, \\ v & \text{si } j = i+1, \end{cases}$$

si bien que $d(y,z) = d_1(y_i, u) + d_1(y_{i+1}, v) > 0$. Un calcul simple (dans lequel il est bon de distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$) montre que

$$\Phi(y) - \Phi(z) \geqslant d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) - d_0(\partial_0 u, \partial_0 y_i) - d_0(\partial_1 v, \partial_1 y_{i+1})$$

et cette inégalité, combinée avec (2.4), donne

$$\Phi(y)-\Phi(z)\geqslant d_1(y_i,u)+d_1(y_{i+1},v)=d(y,z).$$

Sachant que $d(y,z)\geqslant d(x,z)-d(x,y)$ et d'autre part $d(y,z)>0$, cela entraîne simultanément $\Psi(y)\geqslant\Psi(z)$ et $\Phi(y)>\Phi(z)$, en contradiction avec (2.3).

Il aurait été plus naturel d'utiliser le lemme d'Ekeland [Eke] pour établir le résultat, mais comme ici X est compact, j'ai préféré en donner une preuve directe. □

3 Le lemme de Mañé-Conze-Guivarc'h

Théorème 3.1. *Soient (X_0,d_0) et (X_1,d_1) deux espaces métriques compacts non vides, et $\partial_0,\partial_1:X_1\to X_0$ deux fonctions continues. On suppose que le système amphidynamique $X_0\xleftarrow{\partial_0}X_1\xrightarrow{\partial_1}X_0$ est L-rectifiable, pour un certain $0<L\leqslant\infty$.*

Soit $u:X_1\to\mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne, vérifiant

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}u(x_i)\geqslant 0 \tag{3.1}$$

pour tout $n\geqslant 1$ et toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ d'éléments de X_1 telle que $\partial_1x_i=\partial_0x_{i+1}$ $\forall i$.

Alors il existe une fonction C-lipschitzienne $v:X_0\to\mathbb{R}$ telle que $u\geqslant v\partial_1-v\partial_0$, avec

$$C=(2N-1)\max\bigl(1,\sup(-u/L)\bigr) \tag{3.2}$$

où N est le cardinal maximum d'une partie de X_0 où toutes les distances mutuelles sont $\geqslant L$. (En particulier, $N=1$ et $C=1$ quand $L=\infty$.)

Démonstration. On pose $B=\max\bigl(1,\sup(-u/L)\bigr)$, si bien que $C=(2N-1)B\geqslant B\geqslant 1$ et $u\geqslant -BL$. Montrons d'abord deux résultats auxiliaires, dont j'aurai besoin plus tard.

Premier résultat auxiliaire: soient $t_0,t_1,\dots,t_{n-1}$ des points de X_1, avec $n\geqslant 2$, vérifiant $\partial_1t_i=\partial_0t_{i+1}$ $\forall i\in[0,n-1[$ et $d_0(\partial_1t_{n-1},\partial_0t_0)<L$. On a alors

$$\sum_{0\leqslant i<n}u(t_i)\geqslant -d_0(\partial_1t_{n-1},\partial_0t_0)>-L\geqslant -BL. \tag{3.3}$$

En effet, d'après le lemme 2.1 et la remarque qui suit, il existe une orbite $(z_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_i d_1(t_i,z_i)\leqslant d_0(\partial_1t_{n-1},\partial_0t_0)$, et par conséquent

$$0\leqslant\sum_i u(z_i)\leqslant\sum_i u(t_i)+\sum_i d_1(t_i,z_i)\leqslant\sum_i u(t_i)+d_0(\partial_1t_{n-1},\partial_0t_0)$$

ce qui démontre (3.3).

Deuxième résultat auxiliaire: soient $t_0,t_1,\dots,t_{n-1}$ des points de X_1, avec $n\geqslant 1$, vérifiant $\partial_1t_i=\partial_0t_{i+1}$ $\forall i\in[0,n-1[$. J'affirme que

$$\sum_{0\leqslant i<n}u(t_i)\geqslant -CL. \tag{3.4}$$

En effet, soient $p_0,p_1,\dots,p_n$ les points de X_0 tels que $\partial_0t_i=p_i$ et $\partial_1t_i=p_{i+1}$ pour tout $i\in[0,n[$. Soit $w:\mathbb{N}\to[0,n]$ la fonction définie par

$$w(0)=0$$
$$w(k+1)=\max(1+\eta w(k),n)$$

où $\eta : [0, n] \to [0, n]$ est la fonction qui à tout indice i, associe le plus grand indice j tel que $d_0(p_i, p_j) < L$. Notons $s \geqslant 1$ le plus petit entier pour lequel $\eta w(s-1) = n$. On a

$$0 \leqslant w(0) < w(1) < \cdots < w(s-1) \leqslant w(s) = n.$$

L'implication $\eta(i) < j \implies d_0(p_i, p_j) \geqslant L$ entraîne en particulier $d_0(p_{w(k)}, p_{w(\ell)}) \geqslant L$ pour tous $k, \ell \in [0, s[$ tels que $k < \ell$. Il en résulte $s \leqslant N$.

Nous pouvons maintenant écrire

$$\sum_{0 \leqslant i < n} u(x_i) = \sum_{0 \leqslant k < s} \left[\sum_{w(k) \leqslant i < \eta w(k)} u(x_i) \right] + \sum_{0 \leqslant k < s-1} u(x_{\eta w(k)}).$$

Or toutes les sommes $\sum_{w(k) \leqslant i < \eta w(k)} u(x_i)$ sont minorées par $-BL$, d'après (3.3) si la somme contient au moins deux termes, et sinon parce que $u \geqslant -BL$. Idem pour les termes $u(x_{\eta w(k)})$. Finalement,

$$\sum_{0 \leqslant i < n} u(x_i) \geqslant -(2s-1)BL \geqslant -(2N-1)BL$$

ce qui démontre (3.4).

Revenons à la preuve du théorème 3.1. D'après le lemme 1.1, il s'agit de montrer que u satisfait les inégalités

$$\sum_i u(x_i) + C \sum_i d_0(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) \geqslant 0 \tag{3.5}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ de points de X_1.

Nous pouvons omettre le cas $n = 1$, qui est une conséquence des autres, et supposer $n \geqslant 2$. Appliquons alors le lemme de poursuite (lemme 2.1). La suite (y_i) vérifie

$$\frac{1}{C} \sum_i d_1(x_i, y_i) \leqslant \sum_i d_1(x_i, y_i) \leqslant \sum_i d_0(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) - \sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1})$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &\sum_i u(x_i) + C \sum_i d_0(\partial_1 x_i, \partial_0 x_{i+1}) \\ &\qquad \geqslant \sum_i \big[u(y_i) - d_1(x_i, y_i)\big] + C \Big[\sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) + \frac{1}{C} \sum_i d_1(x_i, y_i)\Big] \\ &\qquad = \sum_i u(y_i) + C \sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) \end{aligned}$$

et donc, pour démontrer l'inégalité (3.5), il suffit de démontrer l'inégalité analogue

$$\sum_i u(y_i) + C \sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Disons que $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un "bon indice" si $\partial_1 y_i = \partial_0 y_{i+1}$, et un "mauvais indice" dans le cas contraire, i.e. $d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1}) \geqslant L$. Notons M le nombre de mauvais indices. Si $M = 0$, l'inégalité se réduit à $\sum_i u(y_i) \geqslant 0$, inégalité qui est satisfaite par hypothèse, puisque (y_i) est une orbite.

Traitons maintenant le cas $M \geqslant 1$. Evidemment, ce n'est possible que si L est fini. Notons $b(0), \ldots, b(M-1)$ les mauvais indices, avec

$$0 \leqslant b(0) < b(1) < \cdots < b(M-1) \leqslant n-1$$

et posons $b(M) = n + b(0)$. On peut alors écrire

$$\sum_i u(y_i) + C \sum_i d_0(\partial_1 y_i, \partial_0 y_{i+1})$$
$$= \sum_{0 \leqslant j < M} \left[\sum_{b(j) < i \leqslant b(j+1)} u(y_i) \ + \ C\, d_0\big(\partial_1 y_{b(j)}, \partial_0 y_{b(j)+1}\big) \right].$$

Or chacune des sommes $\sum_{b(j)<i\leqslant b(j+1)} u(y_i)$ est minorée par $-CL$, d'après notre deuxième résultat auxiliaire (3.4), donc les expressions entre crochets sont positives, et l'inégalité (3.6) est démontrée, ce qui achève la démonstration du théorème 3.1. □

4 Quelques applications

Multigraphes finis. Soient X_0, X_1 deux ensembles finis et $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions. Le diagramme $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ constitue un multigraphe[1] (orienté, fini), où X_0 est l'ensemble des "sommets", X_1 l'ensemble des "arêtes", et ∂_0, ∂_1 sont les fonctions qui à chaque arête associent ses extrémités gauche et droite; voir par exemple [LS], Article III.5 et III.6.

Munissons maintenant X_0 et X_1 de la distance discrète (qui vaut 1 entre deux points distincts quelconques), ce qui fait de notre multigraphe $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ un système amphidynamique. Celui-ci est trivialement 1-rectifiable, et satisfait donc le lemme de Mañé-Conze-Guivarc'h (théorème 3.1) qui, dans ce cas précis, est bien connu et tout à fait élémentaire: l'inéquation cohomologique $u \geqslant v\partial_1 - v\partial_0$ admet des solutions si et seulement si u est de moyenne positive sur tout circuit du multigraphe. (En pratique, il suffit de vérifier cette propriété sur les circuits simples, c'est-à-dire qui ne passent pas deux fois par le même sommet; en effet, tout circuit peut se décomposer en circuits simples.)

Correspondances. Si un système amphidynamique $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ est tel que la fonction $(\partial_0, \partial_1) : X_1 \to X_0^2$ est injective, alors X_1 est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de X_0^2. Appelons donc *correspondance* sur un espace métrique compact (X_0, d_0) n'importe quelle partie fermée X_1 de X_0^2. Toute correspondance X_1 sur X_0 définit un diagramme $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ où ∂_0, ∂_1 sont les restrictions à X_1 des projections canoniques $X_0^2 \to X_0$, et pour faire de ce diagramme un système amphidynamique, il ne reste plus qu'à spécifier une distance d_1 sur X_1. Il est naturel de choisir la distance induite par la distance de Manhattan sur X_0^2, éventuellement à un facteur près:

$$d_1(x, y) = \lambda\big[d_0(\partial_0 x, \partial_0 y) + d_0(\partial_1 x, \partial_1 y)\big] \tag{4.1}$$

avec $0 < \lambda \leqslant 1$. (La condition (2.1) ne peut pas être satisfaite si $\lambda > 1$, sauf dans le cas trivial $\partial_1 x = \partial_0 y$.)

Disons que la correspondance X_1 est *L-rectifiable avec coefficient* λ (où $0 < L \leqslant \infty$, $0 < \lambda \leqslant 1$) si le système amphidynamique $X_0 \xleftarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0$ est L-rectifiable, où X_1 est muni de la distance (4.1). Il est bien clair que cette condition est d'autant plus forte que L et λ sont grands.

La situation la plus favorable est celle de la "correspondance pleine" $X_1 = X_0^2$, qui est ∞-rectifiable avec coefficient 1. C'est une situation assez rare; j'en donnerai un autre exemple plus loin dans ce chapitre.

[1] Certains auteurs appellent simplement "graphe" un tel diagramme. Le préfixe "multi" fait référence au fait que la fonction jointe $(\partial_0, \partial_1) : X_1 \to X_0^2$ n'est pas supposée injective, c'est-à-dire qu'il peut exister plusieurs arêtes joignant deux sommets donnés.

Applications dilatantes. Toute endofonction continue $T : X_0 \to X_0$ est, par son graphe $X_1 = \{(x,y) \in X_0^2 : y = Tx\}$, une correspondance sur X_0 d'un type particulier (où ∂_0 est bijective). Supposons T *dilatante*, dans le sens suivant[2]: il existe des constantes $0 < L \leqslant \infty$ et $0 < \eta < 1$ telles que, pour tous $x, y \in X_0$ vérifiant $d_0(Tx, y) < L$, il existe $x' \in T^{-1}(y)$ tel que $d_0(x, x') \leqslant \eta\, d_0(Tx, Tx')$. Alors T est L-rectifiable avec coefficient $\lambda = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, comme on le voit facilement. En particulier, les sous-décalages de type fini unilatères sont "dilatants" en ce sens, et donc rectifiables.

Homéomorphismes. Supposons maintenant que $T : X_0 \to X_0$ est un homéomorphisme (autrement dit, une correspondance où ∂_0 et ∂_1 sont bijectives). La condition de rectifiabilité prend alors la forme suivante: T est L-rectifiable avec coefficient λ si et seulement si, pour tous $x, y \in X_0$ tels que $d_0(x,y) < L$, il existe $z \in X_0$ tel que

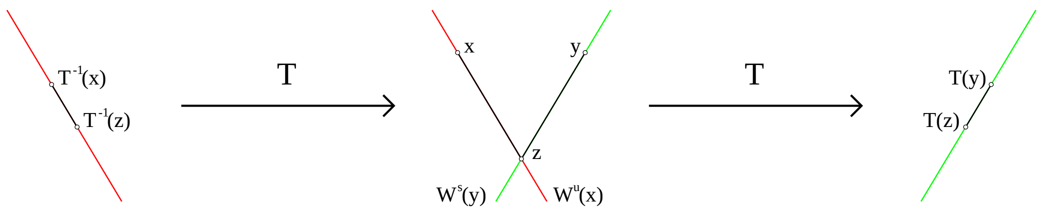
$$(1+\lambda)\big[d_0(T^{-1}x, T^{-1}z) + d_0(Tz, Ty)\big] + \lambda\big[d_0(x,z) + d_0(z,y)\big] \;\leqslant\; d_0(x,y). \tag{4.2}$$

Notons que s'il existe $0 < \eta < 1$ tel que $d_0(T^{-1}x, T^{-1}z) \leqslant \eta\, d_0(x,z)$ et $d_0(Tz, Ty) \leqslant \eta\, d_0(z,y)$, alors il *suffit*, pour avoir (4.2), que soit satisfaite l'inégalité

$$d_0(x,z) + d_0(z,y) \;\leqslant\; \frac{1}{(1+\lambda)\eta + \lambda}\, d_0(x,y). \tag{4.3}$$

Comme le membre de gauche est minoré par $d_0(x,y)$, ce n'est possible que si $(1+\lambda)\eta + \lambda \leqslant 1$, c'est-à-dire $\lambda \leqslant \frac{1-\eta}{1+\eta}$.

Considérons maintenant un difféomorphisme d'Anosov T sur une variété compacte X_0 de classe C^1, et tâchons d'en prouver la rectifiabilité pour L et λ assez petits, et pour une distance convenable sur X_0, équivalente à la distance originale. Les arguments ci-dessus suggèrent de choisir z de manière à ce que la distance entre x et z soit contractée par T^{-1} et la distance entre z et y soit contractée par T; c'est-à-dire que z doit être proche de la variété instable locale de x, et proche de la variété stable locale de y. On pourrait par exemple prendre pour z le *produit local* de x et y, c'est-à-dire leur intersection $W^u(x) \cap W^s(y)$, comme sur la figure ci-dessous:



Il reste à satisfaire la condition (4.3), qui exprime que $d_0(x,z) + d_0(z,y)$ doit être à peine supérieur à $d_0(x,y)$. Ce n'est pas forcément réalisable avec une distance d_0 riemannienne, mais c'est toujours possible avec une distance de Finsler, qui sera infinitésimalement la somme des distances le long des directions stable et instable.

Cette preuve, on le voit, laisse beaucoup de marge dans le choix de z. En particulier, on peut remplacer les feuilletages stable et instable, qui en général ne sont pas connus explicitement, par des feuilletages suffisamment proches, et ainsi obtenir pour z un "produit local approché" de x et y.

Dans le même esprit, il est à noter que la L-rectifiabilité (avec un coefficient non spécifié) est une propriété *ouverte* en T (en topologie C^1). Plus précisément, si d_0 est (équivalente à) une distance de Riemann ou de Finsler sur la variété X_0, ou une puissance d'une telle distance, T est un difféo L-rectifiable avec coefficient λ, et $\lambda' \in]0, \lambda[$, alors tout difféo suffisamment proche

[2]On comparera avec la condition (WE) de [Bo2].

de T en topologie C^1 est L-rectifiable avec coefficient λ'. Cela se déduit facilement de la formule (4.2).

Sous-décalages de type fini bilatères. Soit A un ensemble fini, B un sous-ensemble de A^2, et X_0 le sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ constitué des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que $(x_i, x_{i+1}) \in B$ pour tout i. Etant donné un réel $0 < \eta < 1$, soit d_0 la distance sur X_0 (et $A^{\mathbb{Z}}$) définie par $d_0(x, y) = \eta^{-k} + \eta^{-\ell}$, où k (resp. ℓ) est la borne inférieure des entiers naturels i tels que $x_i \neq y_i$ (resp. $x_{-i} \neq y_{-i}$). Notons enfin $T : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$ l'application de décalage vers la gauche.

L'homéomorphisme T est 2-rectifiable avec coefficient $\lambda = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, et cela se démontre par le même type d'argument que précédemment. En effet, étant donné $x, y \in X_0$ tels que $d_0(x, y) < 2$, c'est-à-dire $x_0 = y_0$, considérons le point z de X_0 défini par

$$z_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \leqslant 0, \\ y_i & \text{si } i \geqslant 0. \end{cases}$$

Il vérifie $d_0(T^{-1}x, T^{-1}z) = \eta\, d_0(x, z)$, $d_0(Tz, Ty) = \eta\, d_0(z, y)$ et $d_0(x, z) + d_0(z, y) = d_0(x, y)$, donc l'inégalité (4.2) est satisfaite pour $\lambda = \frac{1-\eta}{1+\eta}$.

Autres exemples. Voici pour finir quelques exemples particuliers n'entrant pas dans les catégories précédentes; les preuves sont laissées au soin du lecteur.

1. Soit $X_0 = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la distance riemannienne usuelle. La correspondance

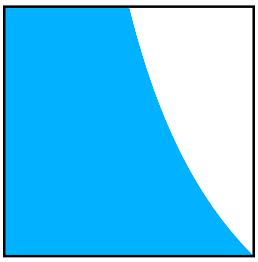
$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : 3x = 2y\}$$

(qu'on pourrait écrire $x \mapsto \frac{3}{2}x$) est ∞-rectifiable avec coefficient $1/5$.

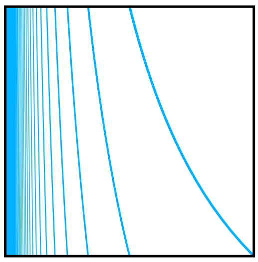
2. Soit $X_0 = [0, 1]$, et X_1, X_1' les correspondances sur X_0 définies par

$$X_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x(1 + y) \leqslant 1\},$$
$$X_1' = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x = 0 \text{ ou bien } 1/x - y \text{ entier} \geqslant 1\},$$

et dont les graphes sont représentés ci-dessous:



x(1+y) ≤ 1



1/x-y entier >0 (ou x=0)

La correspondance X_1 est ∞-rectifiable avec coefficient 1, quelle que soit la distance d_0 sur X_0. Quant à X_1', elle n'est pas rectifiable pour la distance usuelle sur X_0, mais elle est ∞-rectifiable avec coefficient $1/\sqrt{5}$ pour la distance d_0 donnée par

$$d_0(x, y) = \left| \frac{1}{\phi + x} - \frac{1}{\phi + y} \right|$$

où $\phi = 1.618\ldots$ est le nombre d'or. Ces correspondances sont utiles pour démontrer des inégalités sur les quotients complets successifs d'une fraction continue, comme dans [Jen].

Références

[Bar] N. E. Barabanov, *On the Lyapunov exponent of discrete inclusions I*, Avtomat. i Telemekh. **2** (1988), 40–46, traduction anglaise dans: Automat. Remote Control **49** (1988), 152–157

[Bo1] T. Bousch, *Le poisson n'a pas d'arêtes*, Ann. Inst. H. Poincaré (Proba. & Stat.) **36** (2000), 489–508

[Bo2] T. Bousch, *La condition de Walters*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **34** (2001), 287–311

[Bo3] T. Bousch, *Nouvelle preuve d'un théorème de Yuan et Hunt*, manuscrit (2006)

[BM] T. Bousch & J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 77–111

[CLT] G. Contreras, A. Lopes & P. Thieullen, *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **21** (2001), 1379–1409

[CG] J.-P. Conze & Y. Guivarc'h, *Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel*, manuscrit (1993)

[Eke] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353

[Fat] A. Fathi, *Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Math. **324** (1997)

[Jen] O. Jenkinson, *On sums of powers of inverse complete quotients*, à paraître

[LS] F. W. Lawvere & S. H. Schanuel, *Conceptual mathematics: a first introduction to categories*, Cambridge University Press (1997)

[Lei] A. Leizarowitz, *Infinite horizon autonomous systems with unbounded cost*, Appl. Math. Optim. **13** (1985), 19–43

[Liv] A. N. Livšic, *Homology properties of Y-systems*, Math. Zametki **10** (1971), traduction anglaise dans: Math. Notes **10** (1971)

[LT1] A. Lopes & P. Thieullen, *Sub-actions for Anosov diffeomorphisms*, Geometric methods in dynamics II, Astérisque **287** (2003), 135–146

[LT2] A. Lopes & P. Thieullen, *Sub-actions for Anosov flows*, à paraître

[Man] R. Mañé, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity **9** (1996)

[Sav] S. V. Savchenko, *Cohomological inequalities for topological Markov chains*, Funkts. Anal. Prilozh. **33** (1999), 91–93

[YH] G. Yuan & B. R. Hunt, *Optimal orbits of hyperbolic systems*, Nonlinearity **12** (1999), 1207–1224