Quasimorphismes sur le monoïde libre, et substitutions dans les mesures invariantes

Thierry Bousch[*]

20 novembre 2012

Abstract

It will be shown how a morphism $\sigma : A^\star \to B^\star$ between two finitely generated free monoids can transform an invariant mesure on $A^{\mathbb{N}}$ into an invariant measure on $B^{\mathbb{N}}$. The existence of this operation is intimately related to a representation result for homogeneous quasimorphisms on the free monoid.

Résumé

On montre comment un morphisme $\sigma : A^\star \to B^\star$ entre deux monoïdes libres de type fini peut transformer une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$ en une mesure invariante sur $B^{\mathbb{N}}$. L'existence d'une telle opération est intimement liée à un résultat de représentation des quasimorphismes homogènes sur le monoïde libre.

Titre anglais: Quasimorphisms on the free monoid, and substitutions in invariant measures
Mots-clés: quasimorphisme, substitution, norme de réarrangement
Classification AMS (2000): 20M50, 37B10

Table des matières

[*]Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

1 Introduction

L'objectif de cet article est de traiter deux problèmes, *a priori* sans rapport.

Le premier problème est de décrire certaines fonctionnelles affines sur les mesures invariantes. De façon plus précise, considérons l'espace symbolique $X = A^{\mathbb{N}}$ muni de l'application de décalage $\lhd$, et soit $\mathcal{M}^1_{\lhd}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité $\lhd$-invariantes sur X. Le formalisme thermodynamique, et l'optimisation ergodique, consistent à se donner une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, et à chercher les mesures de probabilité invariantes μ sur X qui minimisent la fonctionnelle

$$\mu \longmapsto \langle f, \mu \rangle - T.\operatorname{ent}(\mu)$$

où $T \geqslant 0$ est un paramètre fixé: strictement positif en thermodynamique, nul en optimisation ergodique. Comme on le sait, le formalisme thermodynamique et l'optimisation ergodique ne marchent pas très bien pour des fonctions f continues "générales". Pour obtenir des résultats intéressants, on doit imposer à f un peu plus de régularité: la condition de Bowen, ou la condition de Walters qui est similaire, mais un peu plus forte et plus maniable. Ces classes englobent notamment toutes les fonctions hölderiennes $X \to \mathbb{R}$.

On note que dans ce problème, la fonction f n'intervient que par ses intégrales $\langle f, \mu \rangle$ par les mesures invariantes. En particulier, le problème reste inchangé si on ajoute à f un cobord, c'est-à-dire une fonction de la forme $g\lhd - g$. Ce degré de liberté est largement utilisé, aussi bien en thermodynamique qu'en optimisation ergodique, pour ramener f à une fonction "plus simple". Serait-il possible d'aller plus loin, et de faire la théorie en se basant uniquement sur la fonctionnelle

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}^1_{\lhd}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mu & \longmapsto & \langle f, \mu \rangle \end{array} \tag{1.1}$$

au lieu de la fonction $f : X \to \mathbb{R}$?

Cette question était d'abord motivée par une construction, dans l'article [BM], d'une fonctionnelle affine continue $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{M}^1_{\lhd}(X)$, la "hauteur moyenne". Obtenue par un passage à la limite, la fonctionnelle $\mathcal{H}$ n'a pas de représentation explicite de la forme (1.1). On peut toutefois faire de l'optimisation ergodique sur $\mathcal{H}$, avec des méthodes un peu différentes, et tout se passe "aussi bien" que si elle était de la forme (1.1) avec f Walters, disons.

Une autre motivation serait d'unifier certains résultats connus, en thermodynamique et en optimisation ergodique, mais dont les preuves connues diffèrent grandement selon que f est supposée Walters ou seulement Bowen; je pense en particulier à l'unicité (et l'ergodicité) de la mesure d'équilibre (pour $T > 0$) et au principe de subordination (pour $T = 0$). Le bon cadre unificateur, à mon avis, serait de considérer toutes les fonctionnelles affines sur $\mathcal{M}^1_{\lhd}(X)$ qui sont lipschitziennes pour la *distance de réarrangement*[1]. Cela inclut toutes celles de la forme (1.1) avec f continue Bowen. En existe-t-il d'autres? J'en suis convaincu, mais je ne sais pas le démontrer. En revanche, je donnerai dans le présent article (Corollaire 2.6) un autre résultat de représentation de ces fonctionnelles, peut-être plus important: elles s'identifient à une certaine classe de fonctions, les "quasimorphismes homogènes", sur le monoïde libre $A^\star$.

Le second problème, qui provient de l'optimisation ergodique, est de construire des familles paramétrées de mesures invariantes sur $A^{\mathbb{N}}$, similaires à (ou étendant) la famille des mesures sturmiennes sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, par une "composition infinie" de substitutions. Ce problème se décompose lui-même en deux. Premièrement, on sait faire agir une substitution sur un mot fini ou infini, mais comment faire agir une substitution sur une mesure invariante de $A^{\mathbb{N}}$? Deuxièmement, est-il possible de composer les actions d'une infinité de telles substitutions, et obtenir à la limite un objet (une mesure invariante) bien défini? On verra que c'est possible, sous une certaine

[1] Le lecteur se référera à [Bou] pour toutes les définitions et propriétés de cette distance.

forme et avec une hypothèse très faible, grâce à une propriété de contraction de la distance de réarrangement par l'action des substitutions.

2 Les quasimorphismes homogènes sur le monoïde libre

2.1 Rappels

Il existe une abondante littérature sur les quasimorphismes (et la cohomologie bornée), et l'article [Kot] fournit un bon point de départ. A l'opposé, le livre de Calegari [Cal] est très détaillé et pédagogique, et traite amplement de la dualité de Bavard [Bav], un thème dans lequel on pourrait aussi ranger le présent article.

Soit M un monoïde, noté multiplicativement et d'élément neutre $\mathbf{1}$, et E un espace vectoriel normé (réel). Une application $q : M \to E$ est appelée *quasimorphisme* s'il existe une constante $D \geqslant 0$ telle que

$$\forall x, y \in M \qquad \|q(xy) - q(x) - q(y)\| \leqslant D. \tag{2.1}$$

La plus petite constante D qui convient est le *défaut* du quasimorphisme. En particulier, les homomorphismes $M \to E$ sont des quasimorphismes (de défaut nul). Les fonctions bornées sont aussi, évidemment, des quasimorphismes.

Un quasimorphisme $q : M \to E$ est dit *homogène* s'il vérifie

$$\forall x \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad q(x^n) = n\, q(x) \tag{2.2}$$

Quelques propriétés bien connues des quasimorphismes homogènes sont:
(i) $q(\mathbf{1}) = 0$;
(ii) si $r, s \in M$ sont tels que $rs = \mathbf{1}$, alors $q(r) + q(s) = 0$;
(iii) si $x, y \in M$ commutent, alors $q(xy) = q(x) + q(y)$;
(iv) si $x, y, h \in M$ sont tels que $hx = yh$, alors $q(x) = q(y)$;
(v) $q(xy) = q(yx)$ pour tous $x, y \in M$.

Si E est complet, tout quasimorphisme $q : M \to E$ peut s'écrire, d'une manière unique, comme somme d'un quasimorphisme homogène $\bar{q}$ et d'une fonction bornée. Et on a

$$\bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{q(x^n)}{n} \tag{2.3}$$

2.2 L'application "classe de conjugaison" cc

Considérons maintenant le monoïde libre $M = A^\star$, où l'alphabet A est un ensemble fini quelconque (peut-être même vide). Dans un tel monoïde, la relation de semi-conjugaison $x \rightharpoonup y$, qui exprime l'existence d'un élément h tel que $hx = yh$, est symétrique, et je parlerai simplement de conjugaison. Deux mots dans $A^\star$ sont conjugués ssi ils sont circulairement équivalents, i.e. de la forme uv et vu.

A tout mot non vide w de $A^\star$, associons le "mot infini" w^∞, élément de $A^{\mathbb{N}}$ obtenu en répétant w périodiquement. C'est évidemment un point périodique pour l'application de décalage $\lhd$ sur $A^{\mathbb{N}}$, dont la période divise $|w|$, la longueur de w. Définissons $\mathrm{cc}(w)$ comme l'unique mesure positive invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, portée par l'orbite de w^∞ et de masse $|w|$, autrement dit,

$$\mathrm{cc}(w) \;=\; \sum_{0\leqslant i<|w|} \mathrm{dirac}(\lhd^i\, w^\infty). \tag{2.4}$$

On complète cette définition de cc en posant

$$\mathrm{cc}(\mathbf{1}) = 0. \tag{2.5}$$

Nous avons ainsi construit une fonction

$$\mathrm{cc} : A^\star \longrightarrow \mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$$

que nous allons examiner de plus près. Tout d'abord, elle n'est pas injective; on a

$$\mathrm{cc}(x) = \mathrm{cc}(y) \iff x, y \text{ conjugués.}$$

On peut donc voir $\mathrm{cc}(x)$ comme la classe de conjugaison de x dans $A^\star$, d'où la notation 'cc'. Ensuite, on a la propriété d'homogénéité

$$\forall x \in A^\star \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{cc}(x^n) = n \cdot \mathrm{cc}(x)$$

parce que deux mots non vides de $A^\star$ dont l'un est une puissance de l'autre définissent la même orbite périodique dans $A^\mathbb{N}$.

Bien sûr, la fonction cc prend ses valeurs dans $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$, le sous-espace de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ constitué des mesures à support fini.

Proposition 2.1. *L'application* $\mathrm{cc} : A^\star \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ *est un quasimorphisme homogène, pour la norme de réarrangement; on a*

$$\|\mathrm{cc}(xy) - \mathrm{cc}(x) - \mathrm{cc}(y)\|_R \leqslant 4 \tag{2.6}$$

pour tous $x, y \in A^\star$.

Démonstration. On a déjà vu la propriété d'homogénéité (quasiment évidente) de cc. Il reste à montrer l'inégalité (2.6). Bien sûr, on peut se limiter au cas où les mots x, y sont non vides.

Ecrivons $x = x_0 x_1 \dots x_{m-1}$ et $y = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$, avec $m = |x|$ et $n = |y|$. Soient ξ_1, ξ_2 les mesures positives sur $\Delta_1(A^\mathbb{N}) = \big\{(u,v) \in A^\mathbb{N} \times A^\mathbb{N} : u_0 = v_0\big\}$, définies par

$$\xi_1 = \sum_{0 \leqslant i < m} \mathrm{dirac}[\triangleleft^i x^\infty, \triangleleft^i (xy)^\infty]$$
$$\xi_2 = \sum_{0 \leqslant i < n} \mathrm{dirac}[\triangleleft^i y^\infty, \triangleleft^i (yx)^\infty]$$

et posons $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Si on note $A^\mathbb{N} \xleftarrow{\partial_0} \Delta_1(A^\mathbb{N}) \xrightarrow{\partial_1} A^\mathbb{N}$ les projections naturelles, on voit que $\partial_0 \xi = \mathrm{cc}(x) + \mathrm{cc}(y)$ et $\partial_1 \xi = \mathrm{cc}(xy) = \mathrm{cc}(yx)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \lll \xi_1 - \xi_1 &= -\,\mathrm{dirac}[x^\infty, (xy)^\infty] + \mathrm{dirac}[x^\infty, (yx)^\infty] \\ \lll \xi_2 - \xi_2 &= -\,\mathrm{dirac}[y^\infty, (yx)^\infty] + \mathrm{dirac}[y^\infty, (xy)^\infty] \end{aligned}$$

donc $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant 4$, et la majoration $\|\partial_1 \xi - \partial_0 \xi\|_R \leqslant \|\lll \xi - \xi\|_{TV}$ (voir [Bou], formule 3.2) donne le résultat. ☐

2.3 Une propriété universelle de cc

Le quasimorphisme homogène $\mathrm{cc} : A^\star \to \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ est universel, dans le sens suivant:

Théorème 2.2. *Soit A un ensemble fini, et E un espace vectoriel normé. Pour toute application linéaire continue $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_\triangleleft(A^\mathbb{N}) \to E$ (relativement à la norme de réarrangement), l'application composée $f \circ \mathrm{cc}$ est un quasimophisme homogène $A^\star \to E$. Réciproquement, pour tout quasimorphisme homogène $q : A^\star \to E$, il existe une et une seule application linéaire continue $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_\triangleleft(A^\mathbb{N}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$.*

Ce théorème exprime que les quasimorphismes homogènes $A^\star \to E$ sont "la même chose" que les applications linéaires continues $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$.

Lemme 2.3. *Soit $q : A^\star \to E$ une fonction vérifiant $q(x^n) = n\,q(x)$ et $q(xy) = q(yx)$, pour tous $x, y \in A^\star$ et $n \geqslant 0$, et donc en particulier $q(\mathbf{1}) = 0$. Il existe alors une et une seule application linéaire $f : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$.*

Notons que, dans ce lemme, les conditions sur q sont évidemment nécessaires.

Preuve du lemme. Unicité. Supposons que $f_1, f_2 : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ soient deux solutions du problème posé, et soit $g = f_2 - f_1$. Alors $g[\mathrm{cc}(w)] = 0$ pour tout mot w. Mais toute mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$ à support fini est combinaison linéaire d'orbites périodiques, c'est-à-dire que les $\mathrm{cc}(w)$, pour w décrivant $A^\star$, forment une partie génératrice de $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}})$. Donc $g = 0$, i.e. $f_1 = f_2$.

Existence. On peut supposer l'alphabet A muni d'un ordre total, ce qui induit un ordre lexicographique sur $A^\star$. Disons qu'un mot w est *premier* s'il est non vide, et ne peut pas s'écrire comme puissance d'un mot plus court. Toute mesure portée par une orbite périodique de période (exactement) p peut s'écrire comme multiple d'un $\mathrm{cc}(w)$ avec w mot premier de longueur p. Comme w peut évidemment être remplacé par n'importe quel conjugué, on peut se ramener au cas où w est minimal, pour l'ordre lexicographique, parmi ses conjugués. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des mots premiers vérifiant cette propriété.

Toute mesure invariante à support fini peut s'écrire, de manière unique, comme somme d'un nombre fini de mesures invariantes portées par des orbites périodiques (distinctes), c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}})$ peut s'écrire, d'une manière et d'une seule,

$$\sum_{w \in \mathcal{R}} a_w \,\mathrm{cc}(w)$$

où les a_w sont des nombres réels, tous nuls sauf un nombre fini. En d'autres termes, les $\mathrm{cc}(w)$ pour w décrivant $\mathcal{R}$ engendrent librement l'espace vectoriel $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}})$.

Par la propriété universelle des modules libres, une application linéaire $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ est "la même chose" qu'une fonction $\mathcal{R} \to E$. De façon précise, il existe une (et une seule) application linéaire $f : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que

$$f\big[\mathrm{cc}(w)\big] = q(w) \tag{2.7}$$

pour tout $w \in \mathcal{R}$. Par ailleurs, on a fait l'hypothèse que q était constante sur les classes de conjugaison, donc la formule ci-dessus est valable pour tout mot conjugué à un mot de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire tout mot premier. Enfin, l'hypothèse d'homogénéité sur q permet d'étendre cette formule à toutes les puissances de mots premiers, c'est-à-dire tous les mots, et on a bien $f \circ \mathrm{cc} = q$. □

Pour tout $z \in A^{\mathbb{N}}$ et $n \geqslant 0$, définissons la mesure positive

$$c(n, z) = \sum_{0 \leqslant k < n} \mathrm{dirac}(\triangleleft^i z)$$

Ces mesures vérifient la relation de cocycle $c(m+n, z) = c(m, z) + c(n, \triangleleft^m z)$ pour tous $m, n \geqslant 0$ et $z \in A^{\mathbb{N}}$, et en particulier $c(0, z) = 0$.

Lemme 2.4. *Soit $q : A^\star \to E$ un quasimorphisme homogène, de défaut au plus D, et $f : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ une application linéaire telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$. Soit μ une mesure sur $A^{\mathbb{N}}$ de la forme*

$$\mu = \mu_a = \sum_{\substack{n > 0 \\ z \text{ périodique}}} a_{n,z} c(n, z)$$

où les $a_{n,z}$ sont des réels positifs, tous nuls sauf un nombre fini, et supposons μ invariante. Alors

$$\Big\|\sum_{n,z} a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu)\Big\| \leqslant D \sum_{n,z} a_{n,z} \ . \tag{2.8}$$

Démonstration. Soit F l'ensemble des couples (n,z) pour lesquels $a_{n,z} > 0$ (avec n entier strictement positif, et z point périodique de $A^{\mathbb{N}}$). L'ensemble

$$\mathcal{H} = \big\{ b = (b_{n,z})_{(n,z)\in F} : \mu_b \text{ invariante} \big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^F$ défini par des équations à coefficients rationnels, donc les points rationnels de $\mathcal{H}$ sont denses dans $\mathcal{H}$. Il suffit donc de démontrer (2.8) dans le cas où les $a_{n,z}$ sont rationnels — et même, par homogénéité, dans le cas où ils sont *entiers*.

Supposons donc les $a_{n,z}$ entiers (positifs). On va démontrer l'inégalité (2.8) par récurrence sur l'entier $N = \sum a_{n,z}$. Pour $N = 0$ c'est trivial. Démontrons-la maintenant pour un entier $N \geqslant 1$ donné, en supposant qu'elle est valable pour tous les entiers plus petits.

Puisque $N > 0$, on peut trouver un entier $\bar{n} > 0$ et un point périodique $\bar{z}$ tels que $a_{\bar{n},\bar{z}} > 0$. Posons $\gamma = c(\bar{n},\bar{z})$. On a

$$\lhd\gamma - \gamma = \operatorname{dirac}(\lhd^{\bar{n}}\bar{z}) - \operatorname{dirac}(\bar{z})$$

Distinguons les cas $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} = \bar{z}$ et $\neq \bar{z}$.

Premier cas: $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} = \bar{z}$. Alors γ est une mesure invariante, ainsi que

$$\mu' = \mu - a_{\bar{n},\bar{z}}\gamma = \sum a'_{n,z} c(n,z)$$

où les coefficients $a'_{n,z}$ sont donnés par

$$a'_{n,z} = \begin{cases} a_{n,z} & \text{si } (n,z) \neq (\bar{n},\bar{z}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $N' = \sum a'_{n,z} = N - a_{\bar{n},\bar{z}} < N$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à μ' :

$$\Big\|\sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu')\Big\| \leqslant DN' \leqslant DN \tag{2.9}$$

D'autre part $q(\bar{z}_0 \cdots \bar{z}_{\bar{n}-1}) = f\big(\operatorname{cc}(\bar{z})\big) = f(\gamma)$ et donc

$$\sum_{n,z} a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu) = \sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu')$$

ce qui, combiné avec (2.9), établit l'inégalité (2.8) dans ce cas.

Second cas: $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} \neq \bar{z}$. L'invariance de μ revient à dire que

$$\sum_{n,z} a_{n,z} \operatorname{dirac}(\lhd^n z) = \sum_{n,z} a_{n,z} \operatorname{dirac}(z).$$

En particulier, au terme $a_{\bar{n},\bar{z}} \operatorname{dirac}(\lhd^{\bar{n}}\bar{z})$ qui apparaît à gauche, doit correspondre au moins un terme à droite, c'est-à-dire qu'il existe un entier $\tilde{n} > 0$ et un point périodique $\tilde{z}$ tels que $a_{\tilde{n},\tilde{z}} > 0$ et $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} = \tilde{z}$ (et donc $\tilde{z} \neq \bar{z}$, par notre hypothèse). Soit $b > 0$ le minimum de $a_{\bar{n},\bar{z}}$ et $a_{\tilde{n},\tilde{z}}$. La relation de cocycle

$$c(\bar{n} + \tilde{n}, \bar{z}) = c(\bar{n},\bar{z}) + c(\tilde{n},\tilde{z})$$

permet de récrire μ sous la forme $\sum a'_{n,z} c(n,z)$, avec

$$a'_{n,z} = \begin{cases} a_{n,z} & \text{si } (n,z) \neq (\bar{n},\bar{z}),\ (\tilde{n},\tilde{z}) \text{ et } (\bar{n}+\tilde{n},\bar{z}) \\ a_{n,z} - b & \text{si } (n,z) = (\bar{n},\bar{z}) \text{ ou } (\tilde{n},\tilde{z}) \\ a_{n,z} + b & \text{si } (n,z) = (\bar{n}+\tilde{n},\bar{z}) \end{cases}$$

Cette nouvelle écriture satisfait $\sum a'_{n,z} = N - b < N$ et on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence:

$$\Big\| \sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu) \Big\| \leqslant D(N-b) \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) &= \sum a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) \\ &\quad + b\big[q(\bar{z}_0 \cdots \bar{z}_{\bar{n}-1}) + q(\tilde{z}_0 \cdots \tilde{z}_{\tilde{n}-1}) - q(\bar{z}_0 \cdots \bar{z}_{\bar{n}-1}\tilde{z}_0 \cdots \tilde{z}_{\tilde{n}-1})\big] \end{aligned} \tag{2.11}$$

et l'expression entre crochets est de norme $\leqslant D$, ce qui, combiné avec (2.11), établit l'inégalité (2.8) dans ce deuxième cas. $\square$

Lemme 2.5. *Soit F une partie finie de $A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lhd F = F$, c.à.d. une union finie d'orbites périodiques, et ξ une mesure positive sur $\Delta_1 F$, non nulle, telle que $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant 2$, et ne chargeant pas la diagonale ΔF. Alors ξ est une combinaison convexe de mesures de la forme*

$$c(n,x,y) = \sum_{0 \leqslant i < n} \mathrm{dirac}[\lhd^i x, \lhd^i y]$$

où les triplets $(n,x,y) \in \mathbb{N} \times F \times F$ sont tels que $n \geqslant 1$, $x \neq y$ et $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$.

Démonstration. Observons qu'il n'existe qu'un nombre fini (et $\neq 0$) de triplets vérifiant les conditions ci-dessus; l'enveloppe convexe des $c(n,x,y)$ est donc une partie compacte, convexe et non vide de $\mathcal{M}(\Delta_1 F - \Delta F)$. Supposons qu'elle ne contienne pas ξ. Il existerait alors une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{M}(\Delta_1 F - \Delta F)$, autrement dit une fonction $\phi : \Delta_1 F - \Delta F \to \mathbb{R}$, et un réel c tels que

$$\langle \phi, \xi \rangle > c \tag{2.12}$$

tandis que

$$\langle \phi, c(n,x,y) \rangle \leqslant c$$

pour tous $n \geqslant 1$ et x, y distincts tels que $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$, i.e.

$$\sum_{0 \leqslant i < n} \phi(\lhd^i x, \lhd^i y) \leqslant c$$

Comme dans la Proposition 3.1 de [Bou], ces inégalités entraînent l'existence d'une fonction $\beta : F^2 \to [0, c]$ telle que

$$\forall (x,y) \in \Delta_1 F - \Delta F \qquad \phi(x,y) \leqslant \beta(\lhd x, \lhd y) - \beta(x,y)$$

autrement dit, ϕ est majorée par $\beta \lll -\beta$ sur $\Delta_1 F - \Delta F$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle \phi, \xi \rangle &\leqslant \langle \beta \lll - \beta, \xi \rangle = \langle \beta, \lll \xi - \xi \rangle \\ &\leqslant \langle \beta, (\lll \xi - \xi)^+ \rangle \qquad (\text{car } \beta \geqslant 0) \\ &\leqslant c \left\| (\lll \xi - \xi)^+ \right\|_{TV} \quad (\text{car } \beta \leqslant c) \\ &= \tfrac{1}{2} c \, \|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant c \end{aligned}$$

ce qui contredit (2.12). $\square$

Démonstration du Théorème 2.2. Il est bien clair que composer le quasimorphisme homogène cc avec une quelconque application linéaire continue va encore donner un quasimorphisme homogène.

Examinons la réciproque: soit $q : A^\star \to E$ un quasimorphisme homogène, de défaut au plus D. Par le lemme 2.3, il existe une et une seule application linéaire $f : \mathcal{M}_{\triangleleft}^{\text{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$. Il reste à montrer que f est continue en norme de réarrangement. Pour cela, nous allons d'abord établir que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{\triangleleft}^{\text{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \qquad \pi_0\mu = 0 \implies \|f(\mu)\| \leqslant D\,\|\mu\|_R \tag{2.13}$$

Soit donc μ une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, non nulle, à support fini (qu'on notera F), telle que $\pi_0\mu = 0$, et $\mu^+ - \mu^-$ sa décomposition de Jordan. Par le théorème de dualité (Théorème 3.2 dans [Bou]), il existe ξ couplage de μ^- et μ^+, porté par $\Delta_1(A^{\mathbb{N}})$ et tel que $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} = \|\mu\|_R$. Par le lemme 2.5, on peut écrire

$$\xi = \sum_{n,x,y} a_{n,x,y}\, c(n,x,y)$$

où les $a_{n,x,y}$ sont des réels positifs, définis pour $n \geqslant 1$ et $x, y \in F$ distincts tels que $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$, avec

$$\sum a_{n,x,y} = \tfrac{1}{2}\,\|\mu\|_R\,.$$

On a donc $\mu^- = \partial_0\xi = \sum a_{n,x,y}\, c(n,x)$, et par le lemme 2.4,

$$\Big\|\sum a_{n,x,y}\, q(x_0 \cdots x_{n-1}) - f(\mu^-)\Big\| \leqslant D \sum a_{n,x,y} = \tfrac{1}{2} D\,\|\mu\|_R \tag{2.14}$$

et similairement pour $\mu^+ = \partial_1\xi = \sum a_{n,x,y}\, c(n,y)$,

$$\Big\|\sum a_{n,x,y}\, q(y_0 \cdots y_{n-1}) - f(\mu^+)\Big\| \leqslant \tfrac{1}{2} D\,\|\mu\|_R\,. \tag{2.15}$$

Notons que les sommes $\sum a_{n,x,y}\, q(x_0 \cdots x_{n-1})$ et $\sum a_{n,x,y}\, q(y_0 \cdots y_{n-1})$ sont identiques, puisque la sommation est restreinte à des triplets (n,x,y) pour lesquels $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$. De cette observation et des inégalités (2.14) et (2.15), on déduit

$$\|f(\mu)\| = \big\|f(\mu^+) - f(\mu^-)\big\| \leqslant D\,\|\mu\|_R$$

qui est l'inégalité cherchée (2.13).

Pour finir la démonstration, il nous faut une majoration similaire de $\|f(\mu)\|$ valable globalement, sans la condition $\pi_0\mu = 0$. Voici une solution possible: à toute mesure invariante μ de support fini, associons la mesure $\bar\mu$ de même homologie (i.e. $\pi_0\mu = \pi_0\bar\mu$) et portée par les points fixes du décalage, à savoir,

$$\bar\mu = \sum_{a \in A} (\pi_0\mu)\{a\} \cdot \mathrm{cc}(a)$$

Notons que $\|\bar\mu\|_R = \|\pi_0\mu\| \leqslant \|\mu\|_R$ et donc $\|\mu - \bar\mu\|_R \leqslant 2\,\|\mu\|_R$. L'estimation (2.13) appliquée à $\mu - \bar\mu$, et combinée avec

$$\|f(\bar\mu)\| \leqslant M\,\|\pi_0\mu\| \leqslant M\,\|\mu\|_R$$

où $M = \sup_a \|q(a)\|$, nous donne

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{\triangleleft}^{\text{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \qquad \|f(\mu)\| \leqslant (2D + M)\,\|\mu\|_R$$

ce qui établit la continuité (globale) de f, et termine la preuve du théorème. $\square$

Si E est complet, la densité de $\mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ dans $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ (pour la norme de réarrangement) entraîne que les fonctions linéaires continues $\mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ s'identifient aux fonctions linéaires continues $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to E$, via les opérations évidentes de restriction et de prolongement continu. En particulier, le dual topologique de $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ s'identifie à l'espace des quasimorphismes homogènes $A^\star \to \mathbb{R}$. De façon précise:

Corollaire 2.6. *Pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$, continue relativement à la norme de réarrangement, la fonction $q : A^\star \to \mathbb{R}$ définie par $q = \ell \circ \mathrm{cc}$ est un quasimorphisme homogène. Inversement, pour tout quasimorphisme homogène $q : A^\star \to \mathbb{R}$, il existe une et une seule forme linéaire continue ℓ sur $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ telle que $q = \ell \circ \mathrm{cc}$.*

Par ailleurs, on peut identifier les formes linéaires continues sur $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ avec les fonctions affines lipschitziennes $\mathcal{M}^1_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$, modulo les opérations évidentes de restriction et de prolongement linéaire. Le corollaire ci-dessus peut aussi s'exprimer en ces termes, ce qui répond à une des questions posées dans l'introduction.

On notera $\nu \mapsto \langle q, \nu \rangle$ la forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ associée à un quasimorphisme homogène $q : A^\star \to \mathbb{R}$.

Naturalité. Considérons un morphisme $\sigma : A^\star \to B^\star$ entre deux monoïdes libres de type fini, et soient $\mathrm{cc}_A : A^\star \to \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$, $\mathrm{cc}_B : B^\star \to \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(B^{\mathbb{N}})$ les quasimorphismes homogènes universels sur $A^\star$ et $B^\star$. Le pull-back $\sigma^*(\mathrm{cc}_B) = \mathrm{cc}_B \circ \sigma$, comme tout q.m.h. sur $A^\star$, se factorise d'une manière et d'une seule à travers cc_A, c'est-à-dire qu'il existe exactement une application linéaire continue $\sigma_* : \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(B^{\mathbb{N}})$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^\star & \xrightarrow{\mathrm{cc}_A} & \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & {\scriptstyle\sigma_*}\big\downarrow \\ B^\star & \xrightarrow{\mathrm{cc}_B} & \mathcal{M}^{\text{fin}}_{\lhd}(B^{\mathbb{N}}) \end{array}$$

Bien sûr, σ_* dépend fonctoriellement de σ: on a $(\tau\sigma)_* = \tau_*\sigma_*$ et $(\mathrm{Id})_* = \mathrm{Id}$. Cette définition de σ_* est malheureusement assez abstraite, et limitée aux mesures invariantes de support fini. Le but du chapitre suivant est de construire directement des applications linéaires continues $\sigma_* : \mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_{\lhd}(B^{\mathbb{N}})$ vérifiant la même relation de commutation, et d'étudier leur comportement sur des mesures invariantes générales.

3 Substitutions dans les mesures invariantes

3.1 Construction de σ_*

Un monoïde libre $A^\star$ agit naturellement (à gauche) sur l'espace symbolique $A^{\mathbb{N}}$, par concaténation: à tout mot fini $w \in A^\star$ et tout mot infini à droite $x \in A^{\mathbb{N}}$, on associe le mot (infini à droite) $w.x$.

Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution, c'est-à-dire un morphisme quelconque[2] entre deux monoïdes libres de type fini. Disons qu'une fonction $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ est *compatible* avec σ si

$$\forall w \in A^\star \quad \forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad S(w.x) = \sigma(w).S(x) \tag{3.1}$$

Si la substitution σ est non-effaçante, c'est-à-dire envoie tout mot non vide sur un mot non vide, on voit facilement qu'il existe exactement une fonction S vérifiant cette condition, et que cette fonction est continue; elle est donnée par

$$S(x) = \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots$$

[2]Certains auteurs donnent au mot “substitution” un sens plus restrictif, mais dans le présent article, “substitution” et “morphisme” (entre monoïdes libres) seront rigoureusement synonymes.

formule qui a bien un sens, parce que le membre de droite est un mot infini (tous les $\sigma(x_0)$ sont non vides) quels que soient les x_i. A l'inverse, si certaines lettres de A sont "effacées" par σ, c'est-à-dire envoyées sur le mot vide, le membre de droite peut être de longueur finie — et donc, n'être pas dans $B^{\mathbb{N}}$. On a cependant le résultat suivant, pour des substitutions arbitraires:

Lemme 3.1. *Soient A, B deux ensembles finis, avec B non vide, et $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution. Il existe au moins une fonction mesurable $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ compatible avec σ.*

Démonstration. Soit z un quelconque élément de $B^{\mathbb{N}}$. Définissons les fonctions $S_n : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$, pour tout entier $n \geqslant 0$, par la formule

$$S_n(x) = \sigma(x_0 \dots x_{n-1}).z$$

Elles vérifient évidemment la relation de récurrence

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{n+1}(x) = \sigma(x_0).S_n(\lhd x) \tag{3.2}$$

J'affirme que pour tout x dans $A^{\mathbb{N}}$, la suite $S_n(x)$ est convergente dans $B^{\mathbb{N}}$. Pour le voir, distinguons deux cas:
(I) Il existe une infinité d'indices n tels que $\sigma(x_n) \neq \mathbf{1}$. Alors la longueur de $\sigma(x_0 \dots x_{n-1})$ tend vers l'infini, et $S_n(x)$ tend vers le mot infini $\sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots$
(II) On a $\sigma(x_n) = \mathbf{1}$ pour tout n assez grand. Alors la suite $S_n(x)$ est stationnaire, *a fortiori* convergente.

Les fonctions S_n étant continues, leur limite simple S est une fonction mesurable, et en passant à la limite dans (3.2), on obtient

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad S(x) = \sigma(x_0).S(\lhd x)$$

condition visiblement équivalente à (3.1). □

Observons que la formule ci-dessus implique

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \lhd^{h(x)} S(x) = S(\lhd x)$$

avec $h(x) = |\sigma x_0|$, i.e., une itération de $\lhd$ sur x correspond à $h(x)$ itérations sur $S(x)$. Ceci suggère que S devrait pouvoir s'exprimer à l'aide d'un système intégré (une "tour") sur $(A^{\mathbb{N}}, \lhd)$, avec h comme fonction hauteur de la tour (i.e., la fonction temps de retour sur la base). Ce n'est pas possible en général, car la fonction h peut prendre la valeur 0, et la tour est mal définie dans ce cas; cependant, la construction de σ_* que je vais donner présente de grandes similitudes avec certaines opérations classiques sur les tours.

Définissons la *norme* d'une substitution $\sigma : A^\star \to B^\star$ comme

$$\|\sigma\| \;=\; \operatorname*{Sup}_{w \in A^\star - \{\mathbf{1}\}} \frac{|\sigma w|}{|w|} \;=\; \operatorname*{Sup}_{a \in A} |\sigma a|$$

si A est non vide (et 0 si A est vide). Notons que cette norme est $\geqslant 1$ pour toute substitution non triviale.

Théorème 3.2. *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Il existe une et une seule application linéaire continue $\sigma_* : \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\lhd(B^{\mathbb{N}})$, relativement aux normes de réarrangement, vérifiant*

$$\sigma_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}(\sigma w) \tag{3.3}$$

pour tout w dans $A^\star$. En outre, on a les inégalités

$$\|\sigma_*\mu\|_{TV} \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_{TV} \tag{3.4}$$

$$\|\sigma_*\mu\|_R \leqslant \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \, \|\pi_0\mu\| \tag{3.5}$$

pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$. En particulier,

$$\pi_0\mu = 0 \implies \|\sigma_*\mu\|_R \leqslant \|\mu\|_R \, . \tag{3.6}$$

Démonstration. Unicité. Supposons que $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\triangleleft(B^{\mathbb{N}})$ soient deux solutions au problème. Alors $\Sigma_2 - \Sigma_1$ s'annule sur tous les $\mathrm{cc}(w)$ et, par linéarité, sur leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire toutes les mesures invariantes à support fini. Celles-ci sont denses dans $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$ pour la norme de réarrangement, et donc, par continuité, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ partout.

Existence. On peut évidemment supposer A, B non vides. Par le lemme 3.1, il existe une fonction mesurable $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ compatible avec σ. Posons $\mathbf{S} = (\sigma, S)$. En notant $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées $X \to \mathbb{R}$ (où X est un ensemble muni d'une tribu), on peut considérer l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{S}^* : & \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(A^{\mathbb{N}}) \\ & f & \longmapsto & \mathbf{S}^* f \end{array}$$

défini par

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad (\mathbf{S}^* f)(x) = \sum_{0 \leqslant i < |\sigma x_0|} f(\triangleleft^i S x) \ . \tag{3.7}$$

J'affirme que cet opérateur admet un opérateur adjoint $\mathbf{S}_* : \mathcal{M}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}(B^{\mathbb{N}})$, c'est-à-dire que pour toute mesure μ sur $A^{\mathbb{N}}$, il existe exactement une mesure $\mathbf{S}_*\mu$ sur $B^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\langle f, \mathbf{S}_*\mu \rangle = \langle \mathbf{S}^* f, \mu \rangle \tag{3.8}$$

pour toute fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.

En effet, soit μ une quelconque mesure sur $A^{\mathbb{N}}$, non nécessairement invariante. En prenant pour f une fonction caractéristique d'ensemble mesurable dans (3.8), on voit que la mesure $\mathbf{S}_*\mu$, si elle existe, doit être donnée par

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_*\mu)(E) &= \langle \mathbf{1}_E, \mathbf{S}_*\mu \rangle = \langle \mathbf{S}^*(\mathbf{1}_E), \mu \rangle \\ &= \int_{A^{\mathbb{N}}} \Big[\sum_{0 \leqslant i < |\sigma x_0|} \mathbf{1}_E(\triangleleft^i S x) \Big] \, d\mu(x) \\ &= \sum_{a \in A} \int_{a.A^{\mathbb{N}}} \Big[\sum_{0 \leqslant i < |\sigma a|} \mathbf{1}_E(\triangleleft^i S x) \Big] \, d\mu(x) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{0 \leqslant i < |\sigma a|} \mu\big\{ x \in A^{\mathbb{N}} : x_0 = a \ \text{ et } \ \triangleleft^i S x \in E \big\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour tout E mesurable dans $B^{\mathbb{N}}$. Cette formule définit une fonction sur les boréliens de $B^{\mathbb{N}}$, et on voit facilement qu'elle est σ-additive; c'est donc bien une mesure sur $B^{\mathbb{N}}$. Par construction, elle vérifie la condition (3.8) pour les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, et par linéarité, pour toutes les fonctions f étagées. Le cas général d'une fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ s'en déduit, en notant que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme de fonctions étagées.

L'opérateur $\mathbf{S}_*$ est évidemment linéaire. J'affirme maintenant qu'il envoie toute mesure invariante (de $A^{\mathbb{N}}$) sur une mesure invariante (de $B^{\mathbb{N}}$). Cela découle de l'identité

$$\forall f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \mathbf{S}^*(f\lhd - f) = fS\lhd - fS\,,$$

que le lecteur vérifiera. En effet, si μ est une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, pour toute fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ on aura

$$\langle f\lhd - f, \mathbf{S}_*\mu\rangle = \langle \mathbf{S}^*(f\lhd - f), \mu\rangle = \langle fS\lhd - fS, \mu\rangle = 0$$

donc $\mathbf{S}_*\mu$ est bien invariante.

Notons que (3.7) peut se récrire

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \langle \mathbf{S}^* f, \mathrm{dirac}(x)\rangle = \big\langle f, c\big(|\sigma x_0|\,, Sx\big)\big\rangle$$

ce qui revient à dire que

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \mathbf{S}_*\big[\mathrm{dirac}(x)\big] = c\big(|\sigma x_0|\,, Sx\big)$$

et on en déduit que, plus généralement,

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{S}_*\big[c(n,x)\big] = c\big(|\sigma(x_0 \ldots x_{n-1})|\,, Sx\big).$$

En appliquant cette formule à $x = w^\infty$, où w est un mot non vide de $A^\star$ et n sa longueur, on obtient

$$\mathbf{S}_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}(\sigma w)$$

ce qui établit (3.3).

On a manifestement $\|\mathbf{S}^* f\| \leqslant \|\sigma\| \cdot \|f\|$ en norme uniforme, et donc, par dualité,

$$\|\mathbf{S}_*\mu\|_{TV} \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_{TV}$$

pour toute mesure μ sur $A^{\mathbb{N}}$.

Terminons sur ce qui est peut-être la propriété la plus remarquable de $\mathbf{S}^*$:

$$\forall f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \mathrm{bw}(\mathbf{S}^* f) \leqslant \mathrm{bw}(f). \tag{3.10}$$

En effet, soit $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, x, y deux points de $A^{\mathbb{N}}$, et $n \geqslant 0$ un entier tel que $x_0 \ldots x_{n-1} = y_0 \ldots y_{n-1}$. Alors Sx et Sy ont comme préfixe commun le mot $\sigma(x_0 \ldots x_{n-1})$; soit m sa longueur. On a

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i<n} (\mathbf{S}^* f)(\lhd^i y) - (\mathbf{S}^* f)(\lhd^i x) &= \langle \mathbf{S}^* f, c(n,y) - c(n,x)\rangle \\ &= \langle f, \mathbf{S}_* c(n,y) - \mathbf{S}_* c(n,x)\rangle \\ &= \langle f, c(m,Sy) - c(m,Sx)\rangle \\ &\leqslant 2\,\mathrm{bw}(f)\end{aligned}$$

ce qui montre que la constante de Bowen de $\mathbf{S}^* f$ est bien majorée par celle de f.

Soit μ une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$. Pour toute fonction $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ localement constante telle que $\mathrm{Nbw}(f) \leqslant 1$, la fonction (mesurable) $g = \mathbf{S}^* f$ vérifie $\|g\| \leqslant \|\sigma\|$ et $\mathrm{bw}(g) \leqslant 1$, d'après ce qu'on vient de voir. Par ailleurs, d'après [Bou], Proposition 3.3, on sait que

$$\langle g, \mu\rangle \leqslant \mathrm{bw}(g)\big[\|\mu\|_R - \|\pi_0\mu\|\big] + \|g\| \cdot \|\pi_0\mu\|\,.$$

Par conséquent

$$\langle f, \mathbf{S}_*\mu\rangle = \langle g, \mu\rangle \leqslant \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \cdot \|\pi_0\mu\|$$

pour toute fonction f l.c. telle que $\mathrm{Nbw}(f) \leqslant 1$, donc

$$\|\mathbf{S}_*\mu\|_R \leqslant \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \cdot \|\pi_0\mu\| \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_R$$

En particulier, l'opérateur restreint $\mathbf{S}_* : \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\lhd(B^{\mathbb{N}})$ est bien continu pour les normes de réarrangement, ce qui termine la preuve du théorème. □

3.2 Autres propriétés de σ_*

Positivité. Tout d'abord, l'opérateur $\sigma_* : \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\lhd(B^{\mathbb{N}})$ est positif, c'est-à-dire que $\mu \geqslant 0$ entraîne $\sigma_*\mu \geqslant 0$. Cela résulte de la formule d'adjonction (3.8) et de la positivité de $\mathbf{S}^*$ ou, plus directement, de la formule (3.9).

Ergodicité. Une mesure positive invariante μ est appelée *ergodique*, si toute mesure positive invariante $\leqslant \mu$ est colinéaire à μ. Avec cette définition, la mesure 0 est ergodique. L'ergodicité est préservée par les substitutions:

Proposition 3.3. *Soient $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini, μ une mesure positive invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, et ν une mesure positive invariante sur $B^{\mathbb{N}}$, telles que $\nu \leqslant \sigma_*\mu$. Il existe alors une mesure positive invariante $\mu' \leqslant \mu$ telle que $\sigma_*\mu' = \nu$.*

Corollaire 3.4. *Soient $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini, et μ une mesure positive invariante sur $A^{\mathbb{N}}$. Si μ est ergodique, alors $\sigma_*\mu$ aussi.*

Démonstration. Ecrivons $\nu = h \cdot (\sigma_*\mu)$, avec $h : B^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ mesurable et invariante ($h\lhd = h$); voir [Phe], Lemme 10.1. La fonction $h' = hS : A^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ est également mesurable et invariante (pour le décalage sur $A^{\mathbb{N}}$), donc $\mu' = h' \cdot \mu$ est une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, positive et $\leqslant \mu$. On voit facilement que

$$\forall f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \mathbf{S}^*(h \cdot f) = h' \cdot (\mathbf{S}^* f)$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \langle f, \sigma_*\mu' \rangle &= \langle \mathbf{S}^* f, h' \cdot \mu \rangle = \langle h' \cdot (\mathbf{S}^* f), \mu \rangle = \langle \mathbf{S}^*(h \cdot f), \mu \rangle \\ &= \langle h \cdot f, \sigma_*\mu \rangle = \langle f, h \cdot (\sigma_*\mu) \rangle = \langle f, \nu \rangle\end{aligned}$$

ce qui montre que $\sigma_*\mu' = \nu$. □

Entropie. A toute mesure positive invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$ on peut associer son entropie $\mathrm{ent}(\mu)$; la fonctionnelle $\mathrm{ent} : \mathcal{M}^+_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}^+$ est additive et homogène, i.e. $\mathrm{ent}(\mu+\nu) = \mathrm{ent}(\mu) + \mathrm{ent}(\nu)$ et $\mathrm{ent}(\lambda\mu) = \lambda\,\mathrm{ent}(\mu)$, pour toutes μ, ν mesures positives invariantes et tout réel $\lambda \geqslant 0$. L'entropie est diminuée par les substitutions:

Proposition 3.5. *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure positive invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$,*

$$\mathrm{ent}(\sigma_*\mu) \leqslant \mathrm{ent}(\mu).$$

Démonstration. Cet énoncé est très similaire à la formule d'Abramov pour l'entropie des systèmes induits, ou des tours [Abr, CFS]; il ne s'y ramène pas, mais se démontre par les mêmes idées.

Soit $h_\mu : A^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ la fonction définie par

$$h_\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}})$$

C'est une fonction mesurable, vérifiant $h_\mu(\lhd x) \leqslant h_\mu(x)$ et donc p.p. invariante; il sera commode de considérer également la fonction $\hbar_\mu$ définie par

$$\hbar_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(\lhd^n x) = \inf_{n\geqslant 0} h_\mu(\lhd^n x)$$

qui est exactement invariante et p.p. égale à h_μ. Par le théorème de Shannon-McMillan-Breiman,

$$\operatorname{ent}(\mu) = \int_{A^{\mathbb{N}}} h_\mu(x)\, d\mu(x) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \hbar_\mu(x)\, d\mu(x) \tag{3.11}$$

et de même, l'entropie de $\nu = \sigma_*\mu$ est donnée par

$$\operatorname{ent}(\nu) = \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu(y)\, d\nu(y)$$

Définissons également la fonction (mesurable bornée, invariante) $\ell : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\ell(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma(x_0 \dots x_{n-1})|}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma x_0| + \cdots + |\sigma x_{n-1}|}{n}$$

Pour tout $M \geqslant 0$, définissons $h_\nu^M(y) = M \wedge h_\nu(y)$ et similairement $\hbar_\nu^M$. Les fonctions $\hbar_\nu^M$ tendent vers $\hbar_\nu$ en croissant, quand $M \to \infty$, et par le théorème de convergence monotone, les intégrales

$$I(M) = \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu^M(y)\, d\nu(y)$$

tendent vers $\operatorname{ent}(\nu)$ en croissant. Il suffit donc de montrer que $I(M) \leqslant \operatorname{ent}(\mu)$, pour tout M. Pour cela, nous allons établir que

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \sigma x_0 \neq \mathbf{1} \implies h_\mu(x) \geqslant h_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x) \tag{3.12}$$

En effet, soit x dans $A^{\mathbb{N}}$ tel que $|\sigma x_0| \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$ un entier quelconque. La formule (3.9) appliquée au cylindre $E = \sigma(x_0 \dots x_{n-1}).B^{\mathbb{N}}$ donne

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \sum_{a\in A} \sum_{0\leqslant i<|\sigma a|} \mu\big\{z \in A^{\mathbb{N}} : z_0 = a \text{ et } \lhd^i Sz \in E\big\} \\
&\geqslant \mu\big\{z \in A^{\mathbb{N}} : z_0 = x_0 \text{ et } Sz \in E\big\} \\
&\geqslant \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}})
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
-\log \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}}) &\geqslant -\log \nu(\sigma(x_0 \dots x_{n-1}).B^{\mathbb{N}}) \\
&\geqslant h_\nu^M(Sx)\, |\sigma(x_0 \dots x_{n-1})| + o(n)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_\mu(x) &= \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}}) \\
&\geqslant h_\nu^M(Sx) \cdot \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma(x_0 \dots x_{n-1})|}{n} = h_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x)
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.12).
De (3.12) on peut déduire que

$$\forall x \in A^{\mathbb{N}} \qquad h_\mu(x) \geqslant \hbar_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x) \tag{3.13}$$

En effet, soit x un point quelconque de $A^{\mathbb{N}}$. L'inégalité est évidente si $\ell(x) = 0$. Inversement, si $\ell(x) > 0$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\sigma x_k \neq \mathbf{1}$, et on peut appliquer (3.12) au point $\lhd^k x$ au lieu de x, ce qui donne

$$h_\mu(x) \geqslant h_\mu(\lhd^k x) \geqslant h_\mu^M(S\lhd^k x) \cdot \ell(\lhd^k x) \geqslant \hbar_\mu^M(Sx) \cdot \ell(x).$$

La dualité (3.8) donne

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu^M(y)\, d\nu(y) = \int_{A^{\mathbb{N}}} (\mathbf{S}^* \hbar_\nu^M)(x)\, d\mu(x) \\ &= \int_{A^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu^M(Sx)\ (\mathbf{S}^*\mathbf{1})(x)\, d\mu(x) = \int_{A^{\mathbb{N}}} |\sigma x_0|\, \hbar_\nu^M(Sx)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

La mesure $\hbar_\nu^M(Sx)\, d\mu(x)$ étant invariante, on peut remplacer $|\sigma x_0|$ par n'importe quelle fonction cohomologue, comme $|\sigma x_k|$, et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$I(M) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \frac{|\sigma x_0| + \cdots + |\sigma x_{n-1}|}{n}\, \hbar_\nu^M(Sx)\, d\mu(x)$$

et par convergence dominée,

$$I(M) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \ell(x)\, \hbar_\nu^M(Sx)\, d\mu(x) \leqslant \int_{A^{\mathbb{N}}} h_\mu(x)\, d\mu(x) = \operatorname{ent}(\mu)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Adjonction entre σ^* et σ_*. Pour tout monoïde M, notons $\operatorname{Qmh}(M)$ l'ensemble des quasimorphismes homogènes $M \to \mathbb{R}$. Cet espace vectoriel est contravariant en M: tout morphisme de monoïdes $\sigma : M \to M'$ induit une application linéaire $\sigma^* : \operatorname{Qmh}(M') \to \operatorname{Qmh}(M)$ donnée par $\sigma^*(q) = q \circ \sigma$. Quand M, M' sont des monoïdes libres, on peut se demander si cet opérateur σ^* est lié à l'opérateur σ_* donné par le Théorème 3.2. C'est bien le cas:

Proposition 3.6. *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$, et tout quasimorphisme homogène $q : B^\star \to \mathbb{R}$,*

$$\langle \sigma^* q, \mu \rangle = \langle q, \sigma_* \mu \rangle \tag{3.14}$$

Démonstration. Considérons q comme fixé. La relation (3.14) est satisfaite si μ est de la forme $\operatorname{cc}(w)$, car

$$\begin{aligned} \langle \sigma^* q, \operatorname{cc} w \rangle &= (\sigma^* q)(w) = q(\sigma w) \\ &= \langle q, \operatorname{cc}(\sigma w) \rangle = \langle q, \sigma_*(\operatorname{cc} w) \rangle \end{aligned}$$

L'ensemble des μ réalisant l'égalité (3.14) est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$, et comme il contient tous les $\operatorname{cc}(w)$, ça ne peut être que l'espace $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$ tout entier. □

Abélianisation. Pour tout ensemble fini A, définissons une fonction

$$\operatorname{ab} : A^\star \to \mathcal{M}(A)$$

par la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{ab}(w) &= \pi_0(\operatorname{cc} w) \\ &= \sum_{0 \leqslant i < |w|} \operatorname{dirac}(w_i) = \sum_{a \in A} \langle a \mid w \rangle \operatorname{dirac}(a) \end{aligned}$$

où $\langle a \mid w \rangle$ désigne le nombre d'apparitions de la lettre a dans le mot w. Similairement, à toute substitution $\sigma : A^\star \to B^\star$ (avec A, B finis) associons l'application linéaire

$$\operatorname{ab}(\sigma) : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$$

définie par

$$(\mathrm{ab}\,\sigma)(\mu) = \sum_{a\in A} \mu\{a\}\,\mathrm{ab}(\sigma a) = \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \mu\{a\}\,\langle b \mid \sigma a\rangle\,\mathrm{dirac}(b)$$

On vérifie que $\mathrm{ab}(\sigma w) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,w)$ pour tout mot w, et similairement $\mathrm{ab}(\sigma\tau) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,\tau)$ si σ, τ sont deux substitutions composables. Et bien sûr $\mathrm{ab}(\mathrm{Id}_{A^\star}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(A)}$.

Proposition 3.7. *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$,*

$$\pi_0(\sigma_*\mu) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\pi_0\mu). \tag{3.15}$$

En particulier, $\pi_0\mu = 0$ entraîne $\pi_0(\sigma_*\mu) = 0$.

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathcal{M}_{\lhd}(B^{\mathbb{N}}) \\ {\scriptstyle \pi_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_0}\big\downarrow \\ \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\sigma} & \mathcal{M}(B) \end{array}$$

Démonstration. La relation (3.15) est satisfaite si μ est de la forme $\mathrm{cc}(w)$, car

$$\begin{aligned} \pi_0\big[\sigma_*(\mathrm{cc}\,w)\big] &= \pi_0\big[\mathrm{cc}(\sigma w)\big] = \mathrm{ab}(\sigma w) \\ &= (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,w) = (\mathrm{ab}\,\sigma)\big[\pi_0(\mathrm{cc}\,w)\big] \end{aligned}$$

L'ensemble des μ vérifiant (3.15) est sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$, et comme il contient tous les $\mathrm{cc}(w)$, ça ne peut être que l'espace $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ tout entier. □

Antimorphismes. On appelle antimorphisme une fonction $\alpha : A^\star \to B^\star$ vérifiant $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$, pour tous $x, y \in A^\star$. L'argument donné à la fin de la section 2.3 s'applique aussi bien aux morphismes qu'aux antimorphismes, et permet de définir $\alpha_*\mu$ si μ est une mesure invariante à support fini. Ceci amène naturellement à se demander si le théorème 3.2 peut être étendu aux antimorphismes.

La réponse est oui, et pour le voir, le plus simple est de noter que tout antimorphisme est composé d'un morphisme et de l'antimorphisme "canonique"

$$\begin{array}{cccc} I_A : & A^\star & \longrightarrow & A^\star \\ & x_0 \ldots x_{n-1} & \longmapsto & x_{n-1} \ldots x_0 \end{array}$$

c.à.d. l'unique anti-endomorphisme de $A^\star$ qui fixe ses générateurs. Il suffit donc de traiter le cas de l'antimorphisme canonique.

On se rappelle également que l'isomorphisme naturel $\Pi_+ : \mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{N}})$ est *isométrique* pour les normes de réarrangement (voir [Bou], Proposition 4.1); on considérera donc les mesures invariantes comme vivant sur $A^{\mathbb{Z}}$. L'application

$$\begin{array}{cccc} J_A : & A^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & A^{\mathbb{Z}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (x_{-i})_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est un antimorphisme du système dynamique $(A^{\mathbb{Z}}, \lhd)$, et induit donc une application linéaire $(J_A)_*$ de $\mathcal{M}_{\lhd}(A^{\mathbb{Z}})$ dans lui-même, involutive et isométrique (voir [Bou], formule (4.2)). On voit facilement que

$$(J_A)_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}\big[I_A(w)\big]$$

pour tout mot w, ce qui montre que cette application $(J_A)_*$ est bien celle recherchée (comme induite de I_A).

Le Théorème 3.2 est donc valable aussi bien pour les morphismes que les antimorphismes; non seulement l'existence de σ_* mais aussi les majorations (3.4) et (3.5). La connaissance explicite de l'application $(I_A)_*$ permet également d'étendre les résultats de la présente section (et de la suivante) aux σ qui sont des antimorphismes.

3.3 Familles auto-substitutives de mesures

On voudrait construire, et étudier, des familles paramétrées de mesures positives invariantes sur $A^{\mathbb{N}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) ayant une propriété d'"auto-substitutivité", c'est-à-dire telles que tout élément de la famille puisse s'écrire, d'une manière non triviale, sous la forme $\sigma_*\mu$ avec σ une substitution et μ un autre élément de la famille.

L'exemple classique d'une telle famille auto-substitutive est celle des *mesures sturmiennes*: à tout couple (x_0, x_1) de réels positifs, on associe une mesure positive invariante $\mathfrak{st}(x_0, x_1)$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (ou $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$), qu'on peut définir d'une multitude de façons[3], mais ce qui nous importe présentement est que cette cette application $\mathfrak{st} : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathcal{M}^+_{\triangleleft}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ vérifie les propriétés suivantes:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+ \qquad \begin{cases} \pi_0\, \mathfrak{st}(x_0, x_1) = x_0 \operatorname{dirac}(0) + x_1 \operatorname{dirac}(1) \\ \mathfrak{st}(x_0 + x_1, x_1) = (\sigma_0)_*\, \mathfrak{st}(x_0, x_1) \\ \mathfrak{st}(x_0, x_0 + x_1) = (\sigma_1)_*\, \mathfrak{st}(x_0, x_1) \end{cases} \tag{3.16}$$

où σ_0, σ_1 sont les endomorphismes de $\{0,1\}^\star$ définis par $\sigma_0(0) = 0$, $\sigma_0(1) = 01$, et $\sigma_1(0) = 10$, $\sigma_1(1) = 1$. Cela soulève deux questions: est-ce que les formules (3.16) constituent une caractérisation de la fonction $\mathfrak{st}$? Et si oui, peut-on déduire de cette caractérisation les autres propriétés bien connues des mesures sturmiennes?

Notons d'abord que la première formule, qui spécifie $\pi_0\, \mathfrak{st}(x_0, x_1)$, suffit à déterminer $\mathfrak{st}(x_0, x_1)$ si x_0 ou x_1 est nul: on a nécessairement $\mathfrak{st}(x_0, 0) = x_0 \operatorname{cc}(0)$ et $\mathfrak{st}(0, x_1) = x_1 \operatorname{cc}(1)$. A partir de là, les deux autres formules permettent de calculer $\mathfrak{st}$ sur la diagonale de $(\mathbb{R}^+)^2$, et de proche en proche, sur toutes les demi-droites de pente rationnelle. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathfrak{st}(3,2) &= (\sigma_0)_*\, \mathfrak{st}(1,2) = (\sigma_0\sigma_1)_*\, \mathfrak{st}(1,1) = (\sigma_0\sigma_1^2)_*\, \mathfrak{st}(1,0) = (\sigma_0\sigma_1^2)_* \operatorname{cc}(0) \\ &= \operatorname{cc}\big(\sigma_0\sigma_1^2(0)\big) = \operatorname{cc}(01010). \end{aligned}$$

Comme on le voit, le calcul de $\mu_0 = \mathfrak{st}(x_0, x_1)$ est très lié à l'algorithme d'Euclide sur le couple (x_0, x_1); on écrit $\mu_0 = \sigma_*\mu_1$, où μ_1 est une autre mesure sturmienne de paramètres plus petits, et on recommence jusqu'à tomber sur une mesure μ_n connue. Si x_1/x_0 est rationnel, cet algorithme s'arrête en un temps fini, et détermine explicitement μ_0.

En revanche, si x_1/x_0 est irrationnel, cet algorithme ne s'arrête jamais: les mesures μ_n forment une suite infinie d'inconnues; toutefois, leurs homologies $\pi_0\mu_n$ sont connues, et tendent vers 0. Cela nous amène à l'énoncé suivant:

Théorème 3.8. *Soit A un ensemble fini, $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ une suite d'endomorphismes de $A^\star$, et $\nu_0, \nu_1, \ldots$ une suite de mesures positives sur A telles que $\nu_n = (\operatorname{ab}\sigma_n)(\nu_{n+1})$ pour tout n, et $\|\nu_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Il existe alors une et une seule suite $\mu_0, \mu_1, \ldots$ de mesures positives invariantes sur $A^{\mathbb{N}}$ telles que $\mu_n = (\sigma_n)_*(\mu_{n+1})$ et $\pi_0\mu_n = \nu_n$ pour tout n.

[3] Ces mesures sont intimement liées aux *suites* sturmiennes [MH] qui en sont le support; la mesure notée $\mathfrak{s}_\rho$ dans [BM] correspond à $\mathfrak{st}(1-\rho, \rho)$ dans le présent article.

En outre, ces mesures μ_n sont d'entropie nulle, et vérifient

$$\Big\| \mu_n - \sum_{a\in A} \nu_m\{a\}\cdot \mathrm{cc}\big(\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\sigma_{m-1}(a)\big) \Big\|_R \leqslant 2\,\|\nu_m\| \tag{3.17}$$

pour tout $m \geqslant n$.

Démonstration. Existence. Munissons $\big[\mathcal{M}^+_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})\big]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit des topologies de réarrangement[4]. Pour tout entier naturel N, soit K_N le sous-ensemble de $\big[\mathcal{M}^+_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})\big]^{\mathbb{N}}$ constitué de toutes les suites $(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ telles que $\pi_0\mu_n = \nu_n$ pour tout n, et $\mu_n = (\sigma_n)_*(\mu_{n+1})$ pour tout $n < N$. Par sa structure produit, K_0 est compact, et les K_N forment une suite décroissante de parties fermées de K_0. En outre, chacun des K_N est non vide: il contient par exemple la suite (μ_n) définie (récursivement!) par

$$\mu_n = \begin{cases} \sum_{a\in A}\nu_n\{a\}\cdot\mathrm{cc}(a) & \text{si } n \geqslant N, \\ (\sigma_n)_*(\mu_{n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intersection des K_N est donc aussi compacte et non vide, ce qui résout la question de l'existence.

Unicité. Supposons que deux suites (μ_n) et (μ'_n) soient solutions du problème. Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant n$, on peut écrire $\mu_n = \tau_*\mu_m$ et $\mu'_n = \tau_*\mu'_m$, avec $\tau = \sigma_n\cdots\sigma_{m-1}$. Sachant que $\pi_0\mu_m = \pi_0\mu'_m$, on obtient par l'inégalité (3.6)

$$\big\|\mu'_n - \mu_n\big\|_R \leqslant \big\|\mu'_m - \mu_m\big\|_R \leqslant \big\|\mu'_m\big\|_R + \|\mu_m\|_R = 2\,\|\nu_m\|$$

et en faisant tendre $m \to \infty$ (avec n fixé), il vient $\|\mu'_n - \mu_n\|_R = 0$, et donc $\mu_n = \mu'_n$, quel que soit n.

Autres propriétés. Soit (μ_n) vérifiant les conditions du théorème. Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant n$, on peut écrire $\mu_n = \tau_*\mu_m$, avec $\tau = \sigma_n\cdots\sigma_{m-1}$. La Proposition 3.5 donne $\mathrm{ent}(\mu_n) \leqslant \mathrm{ent}(\mu_m) \leqslant \|\nu_m\|\,(\log\sharp A)$, et en faisant tendre $m\to\infty$, il vient $\mathrm{ent}(\mu_n) = 0$.

Ensuite, la mesure μ_m a même homologie que $\bar\mu_m = \sum_{a\in A}\nu_m\{a\}\cdot\mathrm{cc}(a)$, donc $\|\mu_n - \tau_*\bar\mu_m\|_R \leqslant \|\mu_m - \bar\mu_m\|_R \leqslant 2\,\|\nu_m\|$ d'après (3.6), et cela donne l'inégalité (3.17). ☐

Par ce théorème, on voit que les mesures $\mathfrak{st}(x_0, x_1)$ sont entièrement déterminées par les conditions d'auto-substitutivité, même si x_1/x_0 est irrationnel. Les conditions (3.16) constituent donc bien une caractérisation de la famille $\mathfrak{st}$, et même une caractérisation effective puisqu'elle s'accompagne d'un procédé de calcul.

Les mesures sturmiennes sont des codages d'échanges de deux intervalles. Plus généralement, l'induction de Rauzy-Veech permet d'écrire des propriétés d'auto-substitutivité pour tous les codages d'échanges d'intervalles (vus comme mesures).

Le Théorème 3.8 permet d'aller plus loin et de définir, *à partir* des conditions d'auto-substitutivité, des familles de mesures qu'on ne saurait pas définir autrement (par exemple, comme codage d'un système dynamique déjà connu). Bien sûr, l'idée de construire des systèmes dynamiques symboliques par emboîtement d'une infinité de substitutions n'est pas nouvelle; elle est à la base de la théorie des systèmes "adiques" [VL]. Mais cette théorie est essentiellement du ressort de la dynamique topologique: on construit des sous-shifts de $A^{\mathbb{N}}$ avant de s'intéresser aux mesures qu'ils portent. A l'inverse, le théorème 3.8 concerne uniquement la suite de mesures μ_n, et non pas leurs supports, et la prescription des homologies $\pi_0\mu_n$, qui est naturelle dans

[4] La topologie de réarrangement sur le cône positif $\mathcal{M}^+_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ n'est autre que la topologie de la convergence faible des mesures; c'est une conséquence facile de la Proposition 2.6 de [Bou].

ce cadre, permet de contourner un point délicat dans la théorie des systèmes adiques, à savoir l'unique ergodicité [B+, FFT, Fis].

En particulier, on aimerait définir des analogues des mesures sturmiennes avec 3 symboles ou davantage. Dans un article à venir, je présenterai une famille $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathcal{M}^+_{\lhd}(\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}})$ candidate pour généraliser à 3 symboles la famille $\mathfrak{st}$. Elle est obtenue par des conditions d'optimisation ergodique, et vérifie des conditions d'auto-substitutivité. Ce travail n'étant pas encore très avancé, je n'en dirai pas plus.

Références

[Abr] L. M. Abramov, *The entropy of a derived automorphism*, Doklady Akad. Nauk SSSR **128** (1959), 647–650, en russe; traduction anglaise dans: Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, **49** (1960), 162–166

[Bav] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. **37** (1991), 109–150

[B+] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, B. Solomyak, *Invariant measures on stationary Bratteli diagrams*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **30** (2010), 973–1007

[Bou] T. Bousch, *La distance de réarrangement, duale de la fonctionnelle de Bowen*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **32** (2012), 845–868

[BM] T. Bousch & J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 77–111

[Cal] D. Calegari, *scl*, MSJ Memoirs **20**, Société Mathématique du Japon, Tokyo (2009)

[CFS] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin & Y. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **245**, Springer (1982)

[FFT] S. Ferenczi, A. M. Fisher & M. Talet, *Minimality and unique ergodicity for adic transformations*, J. Anal. Math. **109** (2009), 1–31

[Fis] A. M. Fisher, *Nonstationary mixing and the unique ergodicity of adic transformations*, Stoch. Dyn. **9** (2009), 335–391

[Kot] D. Kotschick, *What is . . . a quasi-morphism?*, Notices of the AMS **51** (2004), 208–209

[MH] M. Morse & G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42

[Phe] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, Princeton (1966)

[VL] A. M. Vershik & A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics*, Representation theory and dynamical systems, Adv. Soviet Math. **9**, AMS (1992), 185–204