PAIRES DE SIMILITUDES
$Z \rightarrow SZ + 1$, $Z \rightarrow SZ - 1$

par Thierry Bousch

JANVIER 1 9 8 8

PROBLEME: On considère les similitudes $s_1(z)=sz+1$ et $s_2(z)=sz-1$, où s vérifie $|s|<1$. Alors il existe un unique compact non vide A(s), appelé attracteur, vérifiant:

$$A(s) = s_1[A(s)] \cup s_2[A(s)]$$

Ou bien A(s) est connexe, ou bien il est totalement discontinu. Le but de cet article est de montrer que le lieu M des s pour lesquels A(s) est connexe est lui-même connexe.

1. INTRODUCTION

Soient $Com(\mathbb{C})$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{C}$, muni de la distance de Hausdorff, $K \in Com(\mathbb{C})$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $|s|<1$, et considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & Com(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Com(\mathbb{C}) \\ & A & \rightarrow & sA + K \end{array}$$

Alors il est facile de voir que φ est $|s|$-lipschitzienne, donc contractante, et comme $Com(\mathbb{C})$ est complet, ceci entraine que φ a un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un unique compact non vide A vérifiant $A=sA+K$. Ce compact est appelé attracteur. On peut l'obtenir par approximations successives: on obtient ainsi :

$$A = K + sK + s^2K + s^3K + \ldots$$

C'est-à-dire que A est l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \quad , \text{ où } a_i \in K$$

On s'interessera seulement ici au cas où $K = \{ +1 , -1 \}$; dans ce cas l'attracteur vérifie

$A = A^+ \cup A^-$, où $A^+= sA+1$, $A^-= sA-1$.

$A = -A$.

Proposition 1: pour $s \neq 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est connexe

(b) $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$

(c) L'application η: $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i s^i$$

est non injective.

(d) Il existe une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0=1$, $\forall i\ b_i \in \{-1,0,1\}$ et $\sum b_i s^i = 0$

(e) Il existe une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ non identiquement nulle telle que $\forall i\ b_i \in \{-1,0,1\}$ et $\sum b_i s^i = 0$

Il est évident que (a) => (b) => (c). On va prouver que (b) <=> (d), (c) <=> (e), puis (e) => (d) et enfin (b) => (a).

* (b) <=> (d). Supposons que $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. Mais A^+ est l'ensemble des nombres complexes de la forme $\sum a_i s^i$ avec $a_0=1$ et $a_i \in \{-1,+1\}$. Pour A^-, idem mais avec $a_0=-1$. Il existe donc deux suites (a_i) et (a'_i) telles que $a_0=1$, $a'_0=-1$, $\forall i\ a_i, a'_i \in \{-1,+1\}$ et $\sum a_i s^i = \sum a'_i s^i$. En faisant la demi-différence, il vient $\sum b_i s^i = 0$, avec $b_i=(a_i-a'_i)/2$. Par conséquent $b_i \in \{-1,0,1\}$ et $b_0=1$. Inversement, si on a une telle suite (b_i), alors on peut construire deux suites (a_i) et (a'_i) vérifiant les propriétés ci-dessus, avec $a_i-a'_i= 2b_i$, et donc $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. On démontre de la même manière que (c) <=> (e).

* (e) => (d). Supposons

$$\sum_{i\geq 0} b_i s^i = 0$$

et soit k le plus petit indice tel que $b_k \neq 0$. Alors on peut diviser l'équation par s^k, ce qui donne:

$$\sum_{i\geq 0} b_{i+k} s^i = 0$$

la suite (b_{i+k}) prend aussi ses valeurs dans $\{-1,0,+1\}$ mais cette fois-ci son premier terme est 1 ou -1. Quitte à changer tous les b_i de signe on peut supposer $b_0 = +1$. D'où (d).

* (b) => (a). Supposons que $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. Supposons que A soit connexe par t-chaînes pour un certain $t>0$. Alors, comme A^+ et A^- sont des images de A "réduites" par un facteur $|s|$, ils sont connexes par $|s|t$ - chaînes. Comme ils ont un point commun, leur réunion, à savoir A, est également connexe par $|s|t$ - chaînes. A étant borné, il est connexe par t-chaînes pour $t=\mathrm{diam}(A)$. Il est donc, par récurrence, connexe par $|s|^n t$ - chaînes, pour tout n. Donc A est bien enchaîné, et il est compact, donc il est connexe.

Corollaire: si A(s) n'est pas connexe et $s\neq 0$, alors A est homéomorphe à $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$.
En effet, l'application η du (c) de la proposition 1 est injective et donne l'homéomorphisme cherché.

NOTATIONS:
$\mathcal{D} = \{s\in D(0,1) \mid A(s)$ est totalement discontinu$\}$
$M = \{s\in D(0,1) \mid A(s)$ est connexe $\}$
$M_1 = \{s\in D(0,1) \mid 0 \in A(s) \}$

$\mathcal{D}$ et M sont complémentaires dans le disque unité, et $M \supset M_1$. En effet, A^+ et A^- sont symétriques l'un l'autre par rapport à zéro, donc $0\in A \iff 0\in A^+\cap A^-$. Comme A(s) dépend continûment de s, et comme la connexité est une propriété fermée, $\mathcal{D}$ est ouvert, M et M_1 sont fermés. Quant à l'inclusion $M_1 \subset M$, elle est **stricte**: ainsi pour $s=0.1 + 0.7i$, A(s) est connexe mais ne contient pas 0. La situation n'a donc que peu de rapport avec les ensembles de Julia pour z^2+c. Quand l'attracteur est connexe mais ne contient pas 0, du fait qu'il admet 0 comme centre de symétrie, il est obligé de faire le tour de 0, c'est-à-dire que 0 est dans une composante connexe bornée de $\mathbb{C}-A$: le *ventre* de A. En particulier A n'est pas plein, et il y a exactement deux composantes connexes de $\mathbb{C}-A$ qui contiennent deux points opposés: ce sont celles de zéro et de l'infini.

Proposition 2:

(i) $D(0,1/2) \subset \mathcal{D} \subset D(0,\sqrt{2}/2)$

(ii) $|s| \geq 2^{-1/4} \Rightarrow s \in M_1$

Dem du (i):
En utilisant le d) de la proposition 1, on prouve sans peine que A ne peut pas être connexe si $|s|\leq 1/2$. Maintenant, supposons $|s|>\sqrt{2}/2$. On doit prouver que A est connexe. Soit donc $\varepsilon>0$ et A_ε l'ε-voisinage de A (ie $A_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\ d(z,A)\leq\varepsilon\}$). On voit que A_ε est stable par $s1(z)=sz+1$ et $s2(z)=sz-1$. Donc $A_\varepsilon \supset s1(A_\varepsilon) \cup s2(A_\varepsilon)$. Mais A_ε a une mesure non nulle: soit $S=\mu(A_\varepsilon)$. On a $\mu(s1(A_\varepsilon))=\mu(s2(A_\varepsilon)) = |s|^2 S$, donc

$$\mu[s1(A_\varepsilon)] + \mu[s2(A_\varepsilon)] > \mu[A_\varepsilon]$$

Par conséquent, $s1(A_\varepsilon)$ et $s2(A_\varepsilon)$ se recouvrent. En passant à la limite quand $\varepsilon\to 0$, on trouve que

$$A^+ \cap A^- \neq \emptyset$$

donc A est connexe. Donc $|s|>\sqrt{2}/2 \Rightarrow s\in M$. Mais M est fermé, d'où: $|s|\geq\sqrt{2}/2 \Rightarrow s\in M$.
Dem du (ii):
On va démontrer un résultat un peu plus précis, à savoir:

$$s^2 \in M \Rightarrow s \in M_1$$

Alors $|s|\geq 2^{-1/4} \Rightarrow |s^2| \geq \sqrt{2}/2 \Rightarrow s^2 \in M \Rightarrow s \in M_1$.

Notons d'abord que

$$\begin{aligned} A(s) &= K + sK + s^2K + s^3K + \ldots \\ &= (K+s^2K+s^4K+\ldots) + (sK+s^3K+s^5K+\ldots) \\ &= A(s^2) + sA(s^2) \end{aligned}$$

Supposons que $A(s^2)$ soit connexe et que $0 \notin A(s)=A(s^2)+sA(s^2)$. Ceci entraîne bien sûr que $0 \notin A(s^2)$ et que $A(s^2) \cap sA(s^2) = \emptyset$. Donc $sA(s^2)$ est dans une composante connexe B de $\mathbb{C}-A(s^2)$ qui contient deux points opposés. La seule possibilité est que $sA(s^2)$ soit dans la composante connexe de 0 (le "ventre" de $A(s^2)$). Par similitude, $s^2A(s^2)$ est aussi dans le ventre de $sA(s^2)$. Donc $s^2A(s^2) \cap A(s^2) = \emptyset$. Cependant, ceci est absurde à cause du lemme "de coinçage" suivant (prendre $L=s^2A(s^2)$, alors $A(s^2)=(L+1) \cup (L-1)$):

Lemme 1:

Soit L un compact connexe. On suppose que $(L+1) \cap (L-1) \neq \emptyset$. Alors L intersecte $(L+1) \cup (L-1)$.

Dem: supposons d'abord L connexe par arcs. Soient

$$a = \min_{l \in L} y(l), \quad b = \max_{l \in L} y(l)$$

Alors $B = \{ p=x+iy \ a \le y \le b \}$ est la plus petite bande horizontale contenant L. Elle contient donc L, L+1 et L-1. Soient U et V des points de contact de L avec le bas et le haut de la bande B. Alors U-1 et V+1 sont dans $M=(L+1) \cup (L-1)$, qui est connexe par arcs: soit donc γ un arc reliant U-1 et V+1 inclus dans M - donc dans B. De même soit γ' reliant U et V dans L. Sur un dessin on voit bien que γ et γ' s'intersectent nécessairement. Donc $L \cap M \neq \emptyset$.

Dans le cas général (L connexe tout court), on approxime d'abord L par des ε-voisinages L_ε, qui sont connexes par arcs pour appliquer le résultat précédent, puis on fait $\varepsilon \to 0$.

2. ENONCE DES THEOREMES

Théorèmes: M et M_1 sont connexes.

En fait, on va démontrer que pour tout $\varepsilon>0$ et tout $s \in M$ (resp. $s \in M_1$), il existe une ε-chaîne reliant s à un point de module $\ge \sqrt{2}/2$ et restant dans M (resp. de module $\ge 2^{-1/4}$ et restant dans M_1). En utilisant la proposition 2, ainsi que le fait que M et M_1 sont fermés dans D, on voit que ceci entraîne la connexité de M et M_1.

Le critère de connexité utilisé sera le (d) de la proposition 1.

On aura besoin de quelques sous-ensembles compacts de $\mathcal{O}(D)$ (pour la topologie de la convergence sur tout compact) :

$$W = \{ f(z)=\sum b_i z^i,\ b_0=1,\ \forall i\ |b_i| \le 2 \}$$
$$H = \{ f(z)=\sum b_i z^i,\ b_0=1,\ \forall i\ b_i \in \{-1,0,1\} \}$$
$$H_1 = \{ f(z)=\sum b_i z^i,\ b_0=1,\ \forall i\ b_i \in \{-1,1\} \}$$

Démontrons d'abord le

Lemme 2: Soit $R \in]0,1[$ et $\varepsilon>0$ tels que $R+\varepsilon < 1$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$\forall f \in W$, $\forall s \in \bar{D}(0,R)$ tels que $f(s)=0$,

$\forall g \in W$ telle que $Val_z(f-g) \ge n_0$, il existe $s' \in D(s,\varepsilon)$ tel que $g(s')=0$.

Ce lemme permet de "suivre" une racine d'une $f \in W$ si on fait légèrement varier f.

Demonstration du lemme:

Soit $F = \{ (f,s) \in W \times \bar{D}(0,R) \mid f(s)=0 \}$. F est une partie fermée de $W \times \bar{D}(0,R)$, qui est compact, donc F est lui-même compact. Notons d'abord que si $f,g \in W$ et $Val_z(f-g) \ge n_0$, alors

$$| f(s) - g(s) | \le \frac{4|s|^{n_0}}{1-|s|} \le \frac{4(R+\varepsilon)^{n_0}}{1-R-\varepsilon} = \xi(R,\varepsilon,n_0) \quad \text{si } |s| \le R+\varepsilon.$$

Soit donc $(f,s)\in F$. Alors il existe un cercle $\Delta=S(s,\delta)$ de rayon $\delta\le\varepsilon/2$ qui ne passe par aucune racine de f. Soit n_0 un entier tel que

$$\xi(R,\varepsilon,n_0) < \eta/2, \qquad \text{où } \eta = \inf_{z\in\Delta} |f(z)|$$

Alors (f,s) admet (dans F) le voisinage

$$V = \{ (f',s')\in F \text{ tels que} \Big(\max_{|z|\le R+\varepsilon} |f'(z)-f(z)| \Big) < \eta/2 \text{ et } |s'-s| < \varepsilon/2 \}$$

qui possède la propriété suivante:

$\forall(f',s')\in V,\ \forall g\in W$ tels que $\mathrm{Val}_z[f'-g]\ge n_0,\ \exists s''\in D(s',\varepsilon)$ tq $g(s'')=0$. (*)

En effet, pour tout $z\in\Delta$, on a $|f(z)-f'(z)| < \eta/2$ et $|f'(z)-g(z)|\le \xi(R,\varepsilon,n_0) < \eta/2$, donc $|f(z)-g(z)|<\eta$. D'après le théorème de Rouché, ceci entraîne que f et g ont autant de racines dans $D(s,\varepsilon/2)$. Donc g a au moins une racine $s''\in D(s,\varepsilon/2)$. Donc $|s'-s''|<\varepsilon$, c.q.f.d.

On a donc montré que tout point de F admet un voisinage V et un entier n_0 vérifiant la propriété (*). Comme F est compact, on peut prendre un recouvrement fini, puis prendre le plus grand des n_0 et ainsi le lemme 2 est démontré.

Enfin, s'il n'y a pas d'ambiguité sur la valeur de n_0, on définit **trunc** comme la projection:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i z^i \to \sum_{i<n_0} b_i z^i$$

On définit $H_{,n_0} = \{ \sum_{i<n_0} b_i s^i\ ,\ b_0=1,\ b_i\in\{-1,0,1\} \}$ et de même H_{1,n_0}.

3. CONNEXITE DE M ET M_1

Lemme 3:

Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$ et $A,B\in H_{,n_0}$. Alors il existe une suite $P_0\ Q_0\ P_1\ Q_1\ \dots\ P_{s-1}\ Q_{s-1}\ P_s$ vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\forall i$ P_i et Q_i sont dans W

b) $\forall i$ P_i est dans H

c) $\forall i$ P_i divise Q_i

d) $\forall i$ P_{i+1} = trunc (Q_i)

e) P_0= A et P_s= B.

Le même résultat est vrai en remplaçant $H_{,n_0}$ par H_{1,n_0} et H par H_1 . Cependant la démonstration présente quelques différences.

Admettons ce lemme et montrons qu'il entraîne la connexité de M. Prenons $R=\sqrt{2}/2$, un ε assez petit ($\varepsilon<1-R$) et le n_0 qui nous est donné par le lemme 2. Soit $s\in M$. On veut relier s à un point de module $\ge R$ par une ε-chaîne en restant dans M. Si $|s|\ge R$, c'est déjà fait. Sinon, soit $f\in H$ telle que $f(s)=0$. On peut appliquer alors le lemme 2 aux fonctions f et A=trunc(f); donc A a une racine s_0. On prend $B(z)=1$. L'idée est de construire une suite s_0, s_1, s_2, ... de manière à ce que s_i soit une racine de P_i et que $|s_i-s_{i+1}|<\varepsilon$. On arrête la construction dès que $|s_i|\ge R$.

C'est très simple: supposons $|s_i|<R$. s_i étant racine de P_i, il est aussi racine de Q_i. Comme Q_i et P_{i+1} diffèrent par des termes de degré $\ge n_0$, P_{i+1} admet une racine s_{i+1} qui diffère de s_i de moins de ε. Cette construction $s_i\to s_{i+1}$ doit s'arrêter avant la fin puisque $P_s=B=1$ n'a pas de racine. Donc il existe un indice k tel que $|s_k|\ge R$. c.q.f.d.

La démonstration de la connexité de M_1 se fait de la même manière, en remplaçant H par H_1 et $H_{,n_0}$ par H_{1,n_0} dans l'énoncé du lemme et en prenant $B(z)=\sum_{i<n_0} z^i = (1-z^{n_0})/(1-z)$.

Maintenant démontrons le lemme 3. Pour abréger, un polynôme

$$R(z)=\sum_{i=0}^{n0} r_i z^i$$

sera représenté par la suite de ses coefficients : $(r_0, r_1, \dots, r_{n0-1})$.

Pour A,B on pose $err(A,B)= \inf(n_0, Val_z(A-B))$ et on démontre le lemme par récurrence sur $err(A,B)$. Si $err(A,B)=n_0$, alors cela veut dire que A=B et donc le lemme est trivial. Supposons le lemme vrai pour $err(A,B) > k$, où k est un entier $< n_0$.

Supposons $err(A,B) = k$, c'est-à-dire que le terme de plus petit degré qui diffère entre A et B est le coefficient de z^k. Ecrivons:

$A(z)=1+\dots+az^k+\dots$

$B(z)=1+\dots+bz^k+\dots$

Ou, en notations abrégées :

A= (1 ? .... ? a * * *)

B= (1 ? .... ? b * * *)

On introduit le polynôme intermédiaire:

S= (1 ? .... ? a 0 0 0)

Alors on peut passer de A à S par une suite (P_i,Q_i) vérifiant les hypothèses du lemme, à cause de l'hypothèse de récurrence, puisque $err(A,S) > k$.

On voudrait passer de S à un polynôme du type

T= (1 ? .... ? b * * *)

La situation n'est pas la même selon que $|a-b|=1$ ou 2. Dans le premier cas, il suffit de prendre

$T=trunc(S\times [1+(b-a)z^k])$

Alors on peut passer de S à T en un coup; mais le point essentiel est que $T\in H_{,n0}$! A priori le fait de multiplier par $1+(b-a)z^k$ (ie par $1+z^k$ ou $1-z^k$) pourrait faire apparaître des coefficients égaux à +2 ou -2. En fait cela ne peut pas se produire parce que S n'a pas de termes de degré $>k$: la même opération n'aurait pas été possible avec A, à priori, d'où l'utilité de cette étape intermédiaire. Enfin, on peut passer de T à B d'après l'hypothèse de récurrence.

Dans le second cas, c'est plus compliqué car il faut deux étapes. On doit faire passer le coefficient de z^k de a à 0, puis de 0 à b. Pour le faire, on passe d'abord de A à S:

S= (1 ? .... ? a 0 0 0)

Puis on passe de S à $T=trunc(S\times [1+(0-a)z^k])$:

T= (1 ? .... ? 0 * * *)

Puis on passe de T à U:

U= (1 ? .... ? 0 0 0 0 0)

Puis on passe de U à $V=trunc(U\times [1+(b-0)z^k])$:

V= (1 ? .... ? b * * *)

Et enfin on peut passer de V à B.

Le lemme 3 est donc démontré.

Il reste encore à prouver, pour la connexité de M_1, le lemme 3 bis, obtenu en remplaçant partout H par H_1 dans l'énoncé. Comme dans la démonstration du lemme 3, on va faire des transformations du type $T=trunc(S\times [1+(b-a)z^k])$ pour transformer le coefficient de z^k de a à b. Et ici encore, il faut s'arranger pour que T ne contienne pas de coefficients égaux à +3 ou -3 (puisque $|b-a|=2$).

Supposons le lemme 3 bis vrai pour $err(A,B) > k$.

Supposons err(A,B)=k. On a donc

A= (1 ? .... ? a * * *)

B= (1 ? .... ? b * * *)

avec $a \neq b$. Donc $|a-b|=2$, cependant on va passer directement de a à b, et non pas en deux étapes comme pour le lemme 3. Et puis la situation est différente selon que a=1 ou a=-1.

Premier cas: a=1. Soit S le polynôme dont les coefficients vérifient

$s_l=a_l$ pour $l \in [0,k]$

$s_{k+l}=s_l$ pour $l \in [0,n_0-k-1]$

Ces conditions sont compatibles parce que $a_k=a_0$.

Alors err(A,S) > k, donc on peut passer de A à S. L'interêt d'être arrivé sur un polynôme S dont les coefficients sont k-périodiques est que $T=\mathrm{trunc}(\ S\times [1-2z^k]) \in H_{1,n0}$. On peut passer de S à T en un coup, et puis on peut passer de T à B puisque err(T,B) > k.

Second cas: a=-1. Cette fois, on définit S par:

$s_l=a_l$ pour $l \in [0,k]$

$s_{k+l}=-s_l$ pour $l \in [0,n_0-k-1]$

Ici encore, ces conditions sont compatibles. Comme les coefficients de S sont k-antipériodiques, le polynôme $T=\mathrm{trunc}(\ S\times [1+2z^k]\ )$ est dans $H_{1,n0}$. On peut passer de A à S, de S à T en un coup et de T à B, donc on peut passer de A à B.

Le lemme 3 bis est démontré.