

UN LEMME DE MAÑÉ BILATÉRAL

THIERRY BOUSCH

Université d'Orsay

Août 2001

ABSTRACT. We prove that, assuming some hyperbolicity on the dynamical system $T : X \rightarrow X$ and some regularity on $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, there exists $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ in the same regularity class and such that $\alpha(f) \leq f - \theta + \theta \circ T \leq \beta(f)$, where $\alpha(f), \beta(f)$ are the infimum and the supremum of the averages of f along periodic orbits.

RÉSUMÉ. On démontre que, moyennant des hypothèses d'hyperbolicité sur le système dynamique $T : X \rightarrow X$ et de régularité sur la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une fonction $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ aussi régulière que f et telle que $\alpha(f) \leq f - \theta + \theta \circ T \leq \beta(f)$, où $\alpha(f), \beta(f)$ sont les bornes inférieure et supérieure des moyennes de f le long des orbites périodiques.

Mots-clés: systèmes dynamiques, cobord, cocycle, lemme de Mañé

Classification AMS (2000): 37B99

1. RÉSULTATS

Théorème 1. *Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même, dont la dynamique est transitive. Soient $f, \theta \in C(X)$ deux fonctions et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes telles que $\alpha \leq f$ et $f - \theta + \theta \circ T \leq \beta$. Alors il existe une fonction $\psi \in C(X)$ telle que $\alpha \leq f - \psi + \psi \circ T \leq \beta$; de plus, ψ peut être prise lipschitzienne si T, f, θ sont lipschitziennes.*

Démonstration. Comme la fonction θ n'intervient dans le problème que par l'expression $\theta - \theta \circ T$, on peut lui ajouter une constante arbitraire, et donc la supposer positive sans perte de généralité. Posons alors $C = \sup \theta$, si bien que $0 \leq \theta \leq C$, et définissons $g = f - \theta + \theta \circ T$. On va distinguer deux cas.

Premier cas: $\alpha \geq \beta$. On a alors $\alpha \geq \beta \geq g = f - \theta + \theta \circ T \geq \alpha - \theta + \theta \circ T$, soit $\theta \geq \theta \circ T$. Autrement dit, θ décroît le long des orbites. Mais T est transitive, c'est-à-dire qu'elle admet une orbite dense, si bien que θ doit être constante, d'où $f = g = \alpha = \beta$.

Second cas: $\alpha < \beta$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, afin de simplifier les calculs. Soit $v : X \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue (on verra plus loin comment la choisir), à partir de laquelle on définit

$$\begin{aligned} h &= f - v\theta + v\theta \circ T \\ &= g + (1 - v)\theta - (1 - v)\theta \circ T \end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} S_n h &= S_n f - v\theta + v\theta \circ T^n \geq S_n f - v\theta, \\ S_n h &= S_n g + (1-v)\theta - (1-v)\theta \circ T^n \leq S_n g + (1-v)\theta \end{aligned}$$

où les $S_n h = h + h \circ T + \dots + h \circ T^{n-1}$ désignent les sommes de Birkhoff. Ces formules montrent en particulier que $v(x) = 0$ implique $S_n h(x) \geq 0$, et que $v(x) = 1$ implique $S_n h(x) \leq n$.

Pour tout $n > 0$, définissons les ensembles fermés

$$\begin{aligned} K_n &= \{x \in X : S_n f(x) \leq C\} \\ L_n &= \{x \in X : S_n g(x) \geq n - C\} \end{aligned}$$

Comme $|S_n f - S_n g| \leq C$, les ensembles K_n et L_n sont disjoints dès que $n > 3C$. Prenons par exemple $n = \lfloor 3C + 1 \rfloor$. Alors on peut choisir $v : X \rightarrow [0, 1]$ lipschitzienne et telle que $v|_{K_n} = 0$ et $v|_{L_n} = 1$. J'affirme qu'on a alors $0 \leq S_n h(x) \leq n$ pour tout $x \in X$.

En effet, $x \in K_n$ entraîne $v(x) = 0$ et par conséquent $S_n h(x) \geq 0$; si au contraire $x \notin K_n$, alors $S_n h(x) \geq S_n f(x) - C > 0$. De même, $x \in L_n$ entraîne $v(x) = 1$ et par conséquent $S_n h(x) \leq n$, alors que $x \notin L_n$ donne $S_n h(x) \leq S_n g(x) + C < n$.

Enfin, posons $H = (S_n h)/n$. De la formule $S_n f = nf - R_n f + R_n f \circ T$, où $R_n f = (n-1)f + (n-2)f \circ T + \dots + f \circ T^{n-2}$, on déduit

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} S_n (f - v\theta + v\theta \circ T) \\ &= \frac{1}{n} S_n f - \frac{1}{n} S_n (v\theta) + \frac{1}{n} S_n (v\theta) \circ T \\ &= f - \frac{1}{n} R_n f + \frac{1}{n} R_n f \circ T - \frac{1}{n} S_n (v\theta) + \frac{1}{n} S_n (v\theta) \circ T \\ &= f - \psi + \psi \circ T \end{aligned}$$

où $\psi = [S_n (v\theta) + R_n f]/n$. Notons que ψ est lipschitzienne si T, f, θ le sont (car v a été choisie lipschitzienne aussi). On a bien $0 \leq H \leq 1$, ce qui conclut l'étude du cas $\alpha < \beta$, et la démonstration du théorème 1. \square

Voici un énoncé analogue pour les flots; la démonstration est très similaire, et nous l'esquisserons seulement.

Théorème 2. *Soit X métrique compact, et $\phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ un flot continu, i.e. $\phi_0(x) = x$ et $\phi_{t+t'}(x) = \phi_t(\phi_{t'}x)$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$, dont la dynamique est transitive. Soit $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow \mathbb{R}$ un cocycle continu, i.e. $f_{t+t'}(x) = f_t(x) + f_{t'}(\phi_t x)$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$. Soient $\theta \in C(X)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha t \leq f_t(x)$ et $f_t(x) - \theta(x) + \theta(\phi_t x) \leq \beta t$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$. Alors il existe $\psi \in C(X)$, qui peut être prise lipschitzienne si ϕ, f, θ sont lipschitziennes, telle que $\alpha t \leq f_t(x) - \psi(x) + \psi(\phi_t x) \leq \beta t$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$.*

Démonstration. Le cas $\alpha \geq \beta$ se traite comme précédemment. On suppose donc $\alpha < \beta$, disons $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Ici encore on peut supposer $0 \leq \theta \leq C$ pour une certaine constante C . On introduit alors les cocycles $g, h : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définis par $g_t(x) = f_t(x) - \theta(x) + \theta(\phi_t x)$ et $h_t(x) = f_t(x) - (v\theta)(x) + (v\theta)(\phi_t x)$. Comme

précédemment, on montre l'existence d'une fonction lipschitzienne $v : X \rightarrow [0, 1]$ et d'un réel $T > 0$ tels que $0 \leq h_T(\cdot) \leq T$. On définit maintenant H par

$$\begin{aligned} TH_s(x) &= \int_0^T h_s(\phi_t x) dt = \int_0^T (h_{s+t} - h_t)(x) dt \\ &= - \int_0^T h_t(x) dt + \int_s^{s+T} h_t(x) dt \\ &= \int_0^s (h_{t+T} - h_t)(x) dt = \int_0^s h_T(\phi_t x) dt \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que $0 \leq H_s(\cdot) \leq s$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. Il reste à exprimer H en fonction de f . On a

$$\begin{aligned} TH_s(x) &= \int_0^T (f_s - v\theta + v\theta \circ \phi_s)(\phi_t x) dt \\ &= \int_0^T f_s(\phi_t x) dt - \sigma(x) + \sigma(\phi_s x) \end{aligned}$$

où $\sigma(x) = \int_0^T (v\theta)(\phi_t x) dt$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T f_s(\phi_t x) dt - Tf_s(x) &= \int_0^T (f_{s+t} - f_s - f_t)(x) dt \\ &= \int_0^T (f_t \circ \phi_s - f_t)(x) dt = -\rho(x) + \rho(\phi_s x) \end{aligned}$$

où $\rho(x) = \int_0^T f_t(x) dt$. On a donc finalement $H_s(x) = f_s(x) - \psi(x) + \psi(\phi_s x)$, où $\psi = (\sigma + \rho)/T$. La fonction ψ est manifestement lipschitzienne si ϕ, f, θ sont lipschitziennes. Le théorème 2 est démontré. \square

2. APPLICATIONS

Soit (X, T) un système dynamique à temps discret, comme dans l'énoncé du théorème 1. Notons \mathcal{M} l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes T -invariantes sur X et, pour toute fonction $f \in C(X)$, notons $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ le minimum et le maximum, respectivement, de $\int f \mu$ quand μ décrit \mathcal{M} . Il est évident que $\min f \leq \alpha(f) \leq \beta(f) \leq \max f$.

D'autre part on a $\alpha(f - \theta + \theta \circ T) = \alpha(f)$ et $\beta(f - \theta + \theta \circ T) = \beta(f)$ pour toute fonction $\theta \in C(X)$. Il est donc naturel de se demander si on peut choisir θ afin que $\alpha(f) = \min(f - \theta + \theta \circ T)$, autrement dit, $f - \theta + \theta \circ T \geq \alpha(f)$; et on a une question analogue pour $\beta(f)$. Ce "problème inverse" est l'objet du "lemme de Mañé", un terme générique pour désigner un certain nombre de théorèmes voisins (dont l'un est dû à Mañé). On consultera [2] pour les énoncés précis, et [3] pour une discussion des hypothèses de validité; en gros, il faut supposer T hyperbolique et f hölderienne.

Il semble que J.-P. Conze et Y. Guivarc'h ont été les premiers à énoncer et démontrer un théorème de ce type, dans un préprint non publié [5]. Ce théorème a ensuite été redécouvert indépendamment par plusieurs auteurs [1,4,6]. En voici une formulation, dans le cas particulier de l'application de doublement de l'angle:

Théorème. *Soit $T : x \mapsto 2x$ l'application de doublement sur le cercle $X = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $u \in C(X)$ est hölderienne d'exposant γ , alors il existe $\omega \in C(X)$ hölderienne d'exposant γ et telle que $\alpha(u) \leq u - \omega + \omega \circ T$.*

Cet énoncé, comme tous les autres “lemmes de Mañé”, est “unilatéral” en ce qu’il donne seulement un contrôle par en-dessous (ou bien au dessus) de $u - \omega + \omega \circ T$. Bien sûr, on peut appliquer le même théorème à la fonction $-u$, et on obtiendra alors une fonction $\omega' \in C(X)$ telle que $u - \omega' + \omega' \circ T \leq \beta(u)$, mais ω' sera en général différente de ω .

Le théorème 1 permet de “recoller” ces deux solutions. Remarquons qu’une fonction γ -hölderienne $X \rightarrow \mathbb{R}$ pour la distance ordinaire sur \mathbb{T}^1 est la même chose qu’une fonction lipschitzienne pour la distance $|y - x|^\gamma$. Appliquant le théorème 1 avec les fonctions $f = u - \omega + \omega \circ T$ et $g = u - \omega' + \omega' \circ T$ (i.e. $\theta = \omega' - \omega$), on voit qu’il existe $\theta' \in C(X)$ lipschitzienne pour la distance $|y - x|^\gamma$ et telle que $\alpha(f) \leq f - \theta' + \theta' \circ T \leq \beta(f)$, autrement dit, $\alpha(u) \leq u - \omega'' + \omega'' \circ T \leq \beta(u)$, avec $\omega'' = \theta' + \omega$. Nous avons ainsi démontré le “lemme de Mañé bilatéral” suivant:

Théorème. *Soit $T : x \mapsto 2x$ l'application de doublement sur le cercle $X = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $u \in C(X)$ est hölderienne d'exposant γ , alors il existe $\omega \in C(X)$ hölderienne d'exposant γ et telle que $\alpha(u) \leq u - \omega + \omega \circ T \leq \beta(u)$.*

De façon générale, les théorèmes 1 et 2 permettent de “bilatéraliser” tous les lemmes de Mañé existants et à venir.

REFERENCES

- [1] T. Bousch, *Le poisson n'a pas d'arêtes*, Ann. Inst. H. Poincaré (Proba. & Stat.) **36** (2000), 489–508.
- [2] T. Bousch, *La condition de Walters*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **34** (2001), 287–311.
- [3] T. Bousch & O. Jenkinson, *Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions*, Invent. Math. **148** (2002), 207–217.
- [4] G. Contreras, A. Lopes & P. Thieullen, *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **21** (2001), 1379–1409.
- [5] J.-P. Conze & Y. Guivarc'h, *Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel*, manuscrit (1993).
- [6] S. V. Savchenko, *Cohomological inequalities for topological Markov chains*, Funkts. Anal. Prilozh. **33** (1999), 91–93.

T. BOUSCH, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE (UMR 8628 DU CNRS), BÂT. 425/430, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

E-mail address: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr