Fonctions topicales et causalité

Thierry BOUSCH*

Février 2003

Abstract

Beside the classical properties of monotonicity and additive homogeneity, the functions modelling the evolution of discrete event systems usually have a third property, which expresses the causal (i.e. non-anticipative) character of the transformation. These "causal" topical functions are always uniformly topical, in particular they have an asymptote and, for endofunctions, a spectral vector.

Résumé

Outre les propriétés classiques de croissance et d'homogénéité additive, les fonctions modélisant l'évolution des systèmes à événements discrets présentent habituellement une troisième propriété, exprimant le caractère causal (i.e. non-anticipatif) de la transformation. Ces fonctions topicales "causales" sont toujours uniformément topicales, en particulier elles ont une asymptote et, pour les endofonctions, un vecteur spectral.

Mots-clés: Fonction topicale, causalité, vecteur spectral
Classification AMS (2000): 47H09, 93C65

1 Motivations et définitions

Cet article reprend les notations et conventions de [BM1, BM2], la principale différence étant que l'origine de $\mathbb{R}^S$ sera notée $\mathbf{0}$ au lieu de $\mathbf{o}$ (en effet, l'origine joue un rôle particulier, du point de vue de la causalité; plus précisément, c'est la fonction diagonale $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^S$ qui joue un rôle particulier).

L'approche "topicale" des systèmes à événements discrets [B+, Gu1] consiste à représenter l'état du système à une étape donnée par un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$ dans une certaine puissance finie de $\mathbb{R}$, et son évolution entre deux étapes successives par des fonctions $\mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$. La coordonnée x_i de $\mathbf{x}$ représente, à une étape donnée de l'évolution du système, la date de dernière apparition d'un "événement" de type i. Typiquement, les éléments de S représentent des ressources, et x_i est la date à laquelle la ressource i devient disponible. Les fonctions d'évolution $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ représentent alors des "tâches" qui ont besoin d'allouer certaines ressources, et qui les libèrent plus tard.

Dans cette interprétation, il est naturel de faire deux hypothèses sur ces fonctions $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$. La première est une hypothèse d'homogénéité dans le temps: si, à l'étape n, tous les événements sont retardés d'un même délai $\lambda \geqslant 0$, on demande qu'il en soit de même à l'étape $n+1$; cela signifie que la fonction f doit être *additivement homogène*:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda + \mathbf{x}) = \lambda + f(\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: `Thierry.Bousch@math.u-psud.fr`.

Ensuite, si tous les événements à l'étape n sont retardés (avec des délais positifs, pouvant dépendre de i), on demande qu'il en soit de même à l'étape $n+1$; ceci signifie que f doit être croissante, pour l'ordre produit sur $\mathbb{R}^S$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S \qquad \mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \implies f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}). \tag{1.2}$$

On trouvera dans [Gu2] une discussion de ces deux axiomes; ils sont plus contraignants qu'il n'y paraît. On appelle fonctions *topicales* les fonctions vérifiant (1.1) et (1.2). Leur principale propriété est qu'elles diminuent la distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max |y_i - x_i|$, ce qui a des conséquences dynamiques importantes.

En particulier, si $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ est une fonction topicale, la limite de $(f^n(\mathbf{p}) - \mathbf{p})/n$ quand $n \to \infty$, si elle existe, ne dépend pas du point $\mathbf{p}$; on l'appelle le *vecteur spectral* de f, noté $\vec{\chi}(f)$. Malheureusement, cette limite n'existe pas toujours [Koh, GK]. Et comme on connaît par ailleurs de nombreuses sous-classes de $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$ pour lesquelles l'existence du vecteur spectral est garantie, comme les fonctions topicales affines par morceaux [BK, Koh, GG1] et les fonctions uniformément topicales [BM2], on peut supposer que l'axiomatique des fonctions topicales est trop générale pour permettre une étude dynamique fine.

Ceci nous amène à parler enfin du troisième axiome, l'axiome de *causalité*. De façon informelle, la causalité exprime le fait qu'un événement ne peut avoir d'influence que sur des événements postérieurs.

Plus formellement, donnons-nous une "date" $\lambda \in \mathbb{R}$, et soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^S$ deux états possibles du système à l'étape n. Dans l'interprétation discutée plus haut, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des collections de dates d'événements. Demandons qu'elles soient "indiscernables jusqu'à la date λ", c'est-à-dire telles que les événements strictement antérieurs à λ se produisent à la même date. Cela signifie que, pour tout $i \in S$, on a $x_i = y_i < \lambda$ ou bien $x_i, y_i \geqslant \lambda$. Cette condition peut aussi s'écrire

$$\mathbf{x} \wedge \delta(\lambda) = \mathbf{y} \wedge \delta(\lambda),$$

où $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^S$ est la fonction diagonale

$$\delta(\lambda) = \lambda + \mathbf{0} = (\lambda, \ldots, \lambda).$$

L'hypothèse de causalité consiste à demander que, sous cette condition, les états correspondants du système à l'étape $n+1$, à savoir $f(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{y})$, soient également indiscernables jusqu'à la date λ. Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition 1.1. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{x} \wedge \delta(\lambda) = \mathbf{y} \wedge \delta(\lambda) \implies f(\mathbf{x}) \wedge \delta(\lambda) = f(\mathbf{y}) \wedge \delta(\lambda). \tag{1.3}$$

On peut également écrire la condition sous la forme

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f\big(\mathbf{x} \wedge \delta(\lambda)\big) \wedge \delta(\lambda) = f(\mathbf{x}) \wedge \delta(\lambda). \tag{1.4}$$

Plusieurs observations découlent immédiatement de la définition:
(i) Une fonction $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale ssi toutes ses fonctions coordonnées $f_i : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}$ sont causales;
(ii) Si $f, g : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ sont causales, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ aussi;
(iii) Si $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ et $g : \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}^C$ sont causales, alors $g \circ f$ aussi;
(iv) Si $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est limite simple de fonctions causales, alors f est causale.

En combinant (ii) et (iv), on voit aussi que toute fonction $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ pouvant s'écrire comme infimum ou suprémum d'une famille quelconque de fonctions causales, est elle-même causale.

Remarquons également, comme conséquence de (iii), que $f + \lambda$ est causale si f est causale et $\lambda \geqslant 0$; en effet, les translations de vecteur positif sont des fonctions causales.

Si on fait maintenant l'hypothèse que $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est *topicale*, alors la condition de causalité (1.4) peut se reformuler plus simplement. Premièrement, l'homogénéité additive de f permet d'écrire (1.4) sous la forme

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda + \big[f((\mathbf{x} - \lambda) \wedge \mathbf{0}) \wedge \mathbf{0}\big] = \lambda + \big[f(\mathbf{x} - \lambda) \wedge \mathbf{0}\big]$$

ou encore

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \qquad f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \wedge \mathbf{0} = f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Deuxièmement, comme f est croissante, on a toujours $f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \leqslant f(\mathbf{x})$, si bien que l'inégalité $\leqslant$ dans (1.5) est toujours vérifiée. Pour que f soit causale, il suffit donc de demander qu'on ait l'inégalité dans l'autre sens, ce qui nous donne le critère suivant:

Proposition 1.2. *Une fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \qquad f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Donnons maintenant quelques propriétés des fonctions topicales causales, et des exemples.

Proposition 1.3. *Soit $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ une fonction topicale causale. On a $f(\lambda\mathbf{x}) \geqslant \lambda f(\mathbf{x})$ pour tous $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. En particulier $f(\mathbf{0}) \geqslant \mathbf{0}$.*

Démonstration. Quitte à travailler sur les fonctions coordonnées de f, on peut supposer que f est à valeurs réelles, i.e. $B = 1$. Ensuite, comme l'inégalité à démontrer reste inchangée quand on remplace $\mathbf{x}$ par $\nu + \mathbf{x}$, on peut se ramener au cas $f(\mathbf{x}) = 0$ par un choix convenable de ν.

On observe alors que $\lambda\mathbf{x} \wedge \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant \mathbf{x} \wedge \mathbf{0}$, ce qui entraîne

$$f(\lambda\mathbf{x}) \geqslant f(\lambda\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant f(\mathbf{x}) \wedge 0 = 0,$$

d'où le résultat. □

Notons $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ l'ensemble des fonctions topicales causales de $\mathbb{R}^A$ dans $\mathbb{R}^B$. Une première conséquence de la proposition 1.3 est que $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ a un plus petit élément (si $A \neq \varnothing$): il s'agit de la fonction composée $\mathbb{R}^A \xrightarrow{\gamma_-} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^B$, où $\gamma_-(\mathbf{x}) = \lfloor \mathbf{0}, \mathbf{x} \rfloor = \min x_i$. En effet, c'est la plus petite fonction topicale telle que $f(\mathbf{0}) \geqslant \mathbf{0}$, et il se trouve qu'elle est causale. De façon analogue, toute partie non vide $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ admet un infimum dans $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, et cet infimum est causal; nous reviendrons là-dessus avec le corollaire 3.2.

Supposons que la fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ soit telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$, la limite

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda f(\mathbf{x}/\lambda) \tag{1.7}$$

existe (dans $\mathbb{R}^B$); la fonction topicale $\hat{f} : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ ainsi définie est la fonction asymptote (ou fonction de récession) de f. D'après la proposition 1.3, f causale implique $f \geqslant \hat{f}$. La réciproque n'est pas vraie en général, mais elle est vraie dans des cas particuliers importants, notamment:

Proposition 1.4. *Une fonction max-plus ou min-plus $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale si et seulement si $f \geqslant \hat{f}$, c'est-à-dire si et seulement si tous les éléments finis de la matrice max-plus (ou min-plus) sont positifs.*

Cela se vérifie immédiatement. Donnons un autre exemple: une fonction conjuguée-linéaire $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est définie par

$$\exp \kappa f_i = \sum_{j \in A} u_{ij} \exp \kappa x_j \qquad (i \in B)$$

où $\kappa > 0$ et (u_{ij}) est une matrice positive dont aucune ligne n'est identiquement nulle. On vérifie facilement que f est causale si et seulement si tous les éléments non nuls de la matrice (u_{ij}) sont $\geqslant 1$, c'est-à-dire si et seulement si $f \geqslant \hat{f}$.

Donnons maintenant un autre critère de causalité, qui nous permettra de caractériser les fonctions min-max-plus causales.

Lemme 1.5. *Soit $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ une forme topicale causale, et $\alpha : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ une forme max-plus telle que $f \leqslant \alpha$. Il existe une forme max-plus causale $\beta : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ telle que $f \leqslant \beta \leqslant \alpha$.*

Démonstration. Ecrivons $\alpha(\mathbf{x}) = \max_{i \in S}(x_i + a_i)$, où $a_i \in [-\infty, +\infty[$. L'inégalité $\alpha(\mathbf{0}) \geqslant f(\mathbf{0}) \geqslant 0$ montre que l'un au moins des a_i est positif. Définissons alors $\beta(\mathbf{x}) = \max_{i \in S}(x_i + b_i)$, où

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } a_i \geqslant 0, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que α et β sont telles que

$$\forall \mathbf{x} \leqslant \mathbf{0} \qquad \alpha(\mathbf{x}) \geqslant 0 \iff \beta(\mathbf{x}) \geqslant 0$$

et que β est causale, avec $\beta \leqslant \alpha$. Maintenant, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^S$, on a la suite d'implications

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \geqslant 0 &\iff f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant 0 \\ &\implies \alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant 0 \iff \beta(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) \geqslant 0 \iff \beta(\mathbf{x}) \geqslant 0 \end{aligned}$$

qui montre que $f \leqslant \beta$. □

Rappelons [BM2] que toute fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ vérifie $f = \inf W(f) = \inf V(f)$, où $W(f)$ est l'ensemble des majorants max-plus de f, et $V(f)$ l'ensemble des éléments minimaux de $W(f)$. Du lemme précédent, on déduit:

Proposition 1.6. *Une fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale si et seulement si tous les éléments de $V(f)$ sont des fonctions causales.*

Corollaire 1.7. *Une fonction topicale $\mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est causale si et seulement si c'est un infimum, éventuellement infini, de fonctions max-plus causales.*

Soit f une forme min-max-plus sur $\mathbb{R}^S$, que nous écrivons $f = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, où les α_i sont des formes max-plus deux à deux incomparables. Alors $V(f) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (voir [BM2], §2.3, lemme 2.5), et d'après le résultat précédent, f est causale si et seulement si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont causales. Ainsi, les formes min-max-plus causales peuvent être décrites de la façon suivante: ce sont toutes les combinaisons d'expressions de la forme $\gamma_i + c_j$, où les γ_i sont les formes coordonnées et les c_j des constantes *positives*, par les opérations du treillis $\vee$ et $\wedge$. Cette description s'accorde bien avec l'idée intuitive d'une transformation causale: les c_j, qui représentent des délais, doivent être positifs.

2 Causalité et topicalité uniforme

La propriété de causalité est intimement liée aux propriétés de portée finie et de topicalité uniforme décrites dans [BM2], comme nous allons le voir.

Si $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est une fonction topicale, nous notons $f_\bullet$ la fonction "renversée" définie par $f_\bullet(\mathbf{x}) = -f(-\mathbf{x})$.

Proposition 2.1. *Soit $L \geqslant 0$. Une fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est de portée au plus L si et seulement si les fonctions $L + f$ et $L + f_\bullet$ sont causales, autrement dit,*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \qquad f\big[\mathbf{x} \wedge \delta(L)\big] \geqslant f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0} \quad \textit{et} \quad f\big[\mathbf{x} \vee \delta(-L)\big] \leqslant f(\mathbf{x}) \vee \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$). Soit f de portée au plus L; on veut démontrer la première inégalité de (2.1). Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ quelconque, et $\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \delta(L)$. Pour tout $\epsilon > 0$ on a $\mathbf{x} + \epsilon \overset{L}{\approx} \mathbf{y} + \epsilon$. Puisque f est de portée au plus L, on en déduit $f(\mathbf{x}) + \epsilon \overset{0}{\approx} f(\mathbf{y}) + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui revient à dire que $f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0} = f(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{0}$. Ainsi $f(\mathbf{y}) \geqslant f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0}$. La deuxième inégalité dans (2.1) s'obtient en considérant $f_\bullet$ au lieu de f.

($\Longleftarrow$). Supposons que $L + f$ et $L + f_\bullet$ soient causales, et soient $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^A$ tels que $\mathbf{x} \overset{L}{\approx} \mathbf{z}$. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^A$ le point défini par

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i \leqslant 0, \\ z_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que $\mathbf{x} \wedge \delta(L) = \mathbf{y} \wedge \delta(L)$ et $\mathbf{y} \vee \delta(-L) = \mathbf{z} \vee \delta(-L)$, d'où l'on déduit $f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0} = f(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{0}$ (car $L + f$ est causale) et $f(\mathbf{y}) \vee \mathbf{0} = f(\mathbf{z}) \vee \mathbf{0}$ (car $L + f_\bullet$ est causale). Il est donc impossible d'avoir simultanément $f_i(\mathbf{x}) < 0$ et $f_i(\mathbf{z}) > 0$ pour un indice $i \in B$ donné. En permutant les rôles de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$, on voit qu'on ne peut pas non plus avoir $f_i(\mathbf{x}) > 0$ et $f_i(\mathbf{z}) < 0$. Ainsi, on a $f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{z}) \geqslant 0$ pour tout $i \in B$. Si toutes les coordonnées de $f(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{z})$ sont non nulles, cela signifie que $f(\mathbf{x}) \overset{0}{\approx} f(\mathbf{z})$. Sinon, on se ramène à cette situation en notant que $\mathbf{x} + \lambda \overset{L}{\approx} \mathbf{z} + \lambda$ pour tout λ suffisamment voisin de 0. ☐

On obtient en particulier une nouvelle caractérisation des fonctions topicales à portée nulle. Une fonction topicale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ est à portée nulle si et seulement si f et $f_\bullet$ sont causales, c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \qquad f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{0}) = f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{0} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x} \vee \mathbf{0}) = f(\mathbf{x}) \vee \mathbf{0} \tag{2.2}$$

(ces formules étaient déjà données dans [BM2], mais sans dire qu'elles *caractérisaient* la propriété de portée nulle).

L'exemple des fonctions conjuguées-linéaires montre qu'une fonction topicale causale n'est pas nécessairement de portée finie. On a toutefois le très important résultat suivant:

Théorème 2.2. *Toute fonction topicale causale est uniformément topicale.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ une forme topicale causale. On doit démontrer que, pour $\mathbf{p} \in \overline{\mathbb{R}}^S$ quelconque, $f(\mathbf{x})$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque $\mathbf{x} \to \mathbf{p}$. Il nous suffit pour cela de montrer que $f(\mathbf{x}) \wedge \lambda$ admet une limite quand $\mathbf{x} \to \mathbf{p}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la condition de causalité

$$f(\mathbf{x}) \wedge \lambda = f\big[\mathbf{x} \wedge \delta(\lambda)\big] \wedge \lambda$$

il suffit de démontrer que f admet une limite en $\mathbf{q} = \mathbf{p} \wedge \delta(\lambda)$. Comme $\mathbf{q}$ n'a aucune coordonnée égale à $+\infty$, cela résulte immédiatement du théorème de prolongement de Burbanks et Sparrow [BS], qui affirme que f admet un prolongement continu $[-\infty, \infty[^S \to [-\infty, \infty[$. ☐

En particulier toute fonction topicale causale $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ admet une asymptote $\hat{f}$, vérifiant l'inégalité $f \geqslant \hat{f}$ d'après la proposition 1.3. On voit également que toute endofonction topicale causale $f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ admet un vecteur spectral, forcément positif puisque $f(\mathbf{0}) \geqslant \mathbf{0}$.

3 Comparaison des topologies simple et uniforme

Le fait que $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ soit un sous-ensemble fermé de $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ comme de $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ suggère que la convergence simple et la convergence uniforme sont deux topologies également naturelles sur $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$. Examinons-les de plus près.

La topologie de la convergence uniforme sur $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ présente l'avantage que les fonctions as : $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \to \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ et $\vec{\chi} : \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S) \to \mathbb{R}^S$ sont continues. Mais on pourrait rétorquer que ces fonctions sont plus naturellement définies sur $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ et $\mathbf{UTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$ respectivement.

La topologie de la convergence simple, qui est strictement plus faible (pour $\sharp A \geqslant 2$ et $B \neq \varnothing$), a l'avantage d'avoir "beaucoup" de compacts: $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est localement compact, et toute partie fermée bornée est compacte.

Pour ces raisons, il paraît préférable de munir $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ de la topologie de la convergence simple, lorsque rien d'autre n'est précisé. Pour cette topologie, les fonctions as et $\vec{\chi}$ ne sont pas continues, de même que l'injection canonique $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \hookrightarrow \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$. Nous allons voir que ces fonctions sont néanmoins "semi-continues supérieurement", en un sens qu'on précisera — tel est l'objectif de cette section.

Proposition 3.1. *Soit $h : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ une fonction topicale causale. Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des $f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ vérifiant $f \leqslant h + \epsilon$ est un voisinage de h dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ pour la topologie de la convergence simple.*

Un énoncé équivalent est le suivant: si $(f_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}}$ est un filet de fonctions topicales causales $\mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$ qui converge simplement vers h, alors $f_\mathfrak{a} \vee h$ converge uniformément vers h. Ce résultat signifie intuitivement que l'injection canonique $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \hookrightarrow \mathbf{UTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ est semi-continue supérieurement.

En particulier, tout filet décroissant dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ converge uniformément vers sa borne inférieure.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas des formes topicales, i.e. $B = 1$. D'après le théorème 2.2, la fonction $h + \epsilon : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}$ est uniformément topicale, c'est-à-dire uniformément continue pour la distance $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup |\operatorname{th} y_i - \operatorname{th} x_i|$ sur $\mathbb{R}^A$ et la distance analogue sur $\mathbb{R}$. En particulier, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^A \qquad \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \eta \implies |\operatorname{th}(h + \epsilon)(\mathbf{y}) - \operatorname{th}(h + \epsilon)(\mathbf{x})| \leqslant \operatorname{th}(\epsilon/2).$$

Prenons maintenant $L \geqslant 0$ tel que $1 - \operatorname{th} L \leqslant \eta$, et soit $K = [-L, 0]^A \subseteq \mathbb{R}^A$. Puisque K est borné, l'ensemble

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}) : \sup_{\mathbf{y} \in K} |f(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y})| \leqslant \epsilon/2 \right\}$$

constitue un voisinage de h pour la topologie de la convergence simple. J'affirme que tout $f \in \mathcal{V}$ vérifie $f \leqslant h + \epsilon$, ce qui établira le résultat. Il suffit pour cela de démontrer qu'on a $f(\mathbf{x}) < 0$ pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^A$ tel que $(h + \epsilon)(\mathbf{x}) < 0$.

Considérons d'abord le cas où $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}$. Le point $\mathbf{y} = \mathbf{x} \vee \delta(-L)$, de coordonnées $y_i = x_i \vee (-L)$, vérifie $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 1 - \operatorname{th} L \leqslant \eta$ et donc $|\operatorname{th}(h + \epsilon)(\mathbf{y}) - \operatorname{th}(h + \epsilon)(\mathbf{x})| \leqslant \operatorname{th}(\epsilon/2)$. En combinant cette inégalité avec $(h+\epsilon)(\mathbf{x}) < 0$, on obtient $h(\mathbf{y}) < -\epsilon/2$. Par ailleurs, $\mathbf{y}$ est dans K et majore $\mathbf{x}$, donc

$$f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}) \leqslant h(\mathbf{y}) + \epsilon/2 < 0.$$

Si maintenant $\mathbf{x}$ n'est plus supposé négatif, on se ramène au cas précédent en notant que $(h+\epsilon)(\mathbf{x}) < 0$ entraîne $(h+\epsilon)(\mathbf{x}\wedge\mathbf{0}) < 0$ et par suite $f(\mathbf{x}\wedge\mathbf{0}) < 0$, ce qui équivaut à $f(\mathbf{x}) < 0$ car f est causale. □

Corollaire 3.2. *Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, et h sa borne inférieure. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini $f_1, \dots, f_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que*

$$h \leqslant f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \leqslant h + \epsilon.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des parties finies non vides de $\mathcal{F}$, ordonné par l'inclusion, et soit $(f_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ le filet défini par $f_{\mathfrak{a}} = \inf \mathfrak{a}$. C'est un filet décroissant, et il converge donc uniformément vers sa borne inférieure, à savoir h, d'où le résultat.

Voici une autre preuve, n'utilisant pas les filets, qui sera peut-être plus éclairante. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des $f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ tels que $f \leqslant h + \epsilon$. Cet ensemble est un voisinage de h pour la topologie de la convergence simple, d'après la proposition 3.1, ce qui signifie qu'il existe un réel $\eta > 0$ et un nombre fini de points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^A$ tels que

$$\forall f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \qquad \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \|(f-h)(\mathbf{x}_i)\| \leqslant \eta \implies f \in \mathcal{V}.$$

Par définition de h, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ telles que $\|(f_i - h)(\mathbf{x}_i)\| \leqslant \eta$. Alors la fonction $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ vérifie $\|(f-h)(\mathbf{x}_i)\| \leqslant \eta$ pour tout i, et donc $f \in \mathcal{V}$, d'où le résultat. □

En combinant ce résultat avec le corollaire 1.7, on obtient le résultat suivant, qui englobe le corollaire 1.7 ainsi que le théorème 2.2:

Théorème 3.3. *Toute fonction topicale causale est limite uniforme de fonctions min-max-plus causales.*

Etudions maintenant la fonction as : $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B) \to \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$. L'inégalité $f \geqslant \hat{f}$, valable pour toute fonction topicale causale f, peut aussi s'exprimer de la façon suivante: pour tous $g \in \mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ et $f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, on a l'équivalence

$$g \leqslant f \iff g \leqslant \hat{f}. \tag{3.1}$$

Cette propriété, qu'on peut écrire aussi $I(g) \leqslant f \iff g \leqslant \mathrm{as}(f)$, où I est l'injection canonique de $\mathbf{NrTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$, exprime une adjonction (ou correspondance galoisienne) entre les fonctions I et as.

Il en résulte en particulier que, pour g fixée, l'ensemble des f vérifiant $\hat{f} \geqslant g$ est fermé dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}^B)$ pour la topologie de la convergence simple. Enoncé équivalent: si $(f_{\mathfrak{a}})$ est un filet qui converge simplement vers h, alors $\limsup \hat{f}_{\mathfrak{a}} \leqslant \hat{h}$. En ce sens, on peut dire que la fonction asymptote $f \mapsto \hat{f}$ est semi-continue supérieurement. Bien sûr, on aurait pu aussi déduire cela de la proposition 3.1 (et de son interprétation en termes de filets).

Considérons finalement la fonction vecteur spectral $\vec{\chi} : \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S) \to \mathbb{R}^S$, et ses fonctions coordonnées $\chi_i : \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S) \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.4. *Les fonctions $f \mapsto \chi_i(f)$ sont s.c.s. sur $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$ pour la topologie de la convergence simple, pour tout $i \in S$.*

Démonstration. Soit $(f_\mathfrak{a})$ un filet dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$, qui converge simplement vers h. Alors $f_\mathfrak{a} \vee h \to h$ uniformément, et donc

$$\limsup \chi_i(f_\mathfrak{a}) \leqslant \limsup \chi_i(f_\mathfrak{a} \vee h) = \chi_i(h).$$

Autre démonstration, sans filets: on doit prouver que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{f \in \mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S) : \chi_i(f) < \lambda\}$$

est ouvert dans $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$. Soit $h \in \mathcal{U}$, et $\epsilon = \big(\lambda - \chi_i(h)\big)/2$. Pour tout f suffisamment proche de h, on a $f \leqslant h + \epsilon$ (par la proposition 3.1), et donc $\chi_i(f) \leqslant \chi_i(h) + \epsilon < \lambda$, i.e. $f \in \mathcal{U}$. Donc $\mathcal{U}$ est bien voisinage de tous ses points. □

Terminons sur une curiosité: la fonction $f \mapsto \lfloor \vec{\chi}(f) \rfloor$ est continue sur $\mathbf{CTp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$. En effet, elle est s.c.s. par la proposition précédente, mais elle est aussi s.c.i. comme suprémum de fonctions continues:

$$\lfloor \vec{\chi}(f) \rfloor = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S} \lfloor \mathbf{p}, f\mathbf{p} \rfloor$$

(voir [BM2], §5.2, proposition 5.7).

Références

[B+] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder & J.-P. Quadrat, *Synchronization and linearity*, Wiley (1992)

[BK] T. Bewley & E. Kohlberg, *The asymptotic theory of stochastic games*, Math. Oper. Res. **1** (1976), pp. 197–208

[BM1] T. Bousch & J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), pp. 77–111

[BM2] T. Bousch & J. Mairesse, *Fonctions topicales à portée finie et fonctions uniformément topicales*, préprint 2003-002, LIAFA (2003)

[BS] A. D. Burbanks & C. T. Sparrow, *All monotone homogeneous functions (on the positive cone) admit continuous extension*, préprint 1999-13, Statistical Laboratory, Université de Cambridge (1999)

[GG1] S. Gaubert & J. Gunawardena, *A nonlinear hierarchy for discrete event dynamical systems*, paru dans: A. Giua, R. Smedinga & M. Spathopoulos (dir.), *Proceedings of WODES 98*, IEE (1998)

[Gu1] J. Gunawardena (dir.), *Idempotency*, Cambridge University Press (1998)

[Gu2] J. Gunawardena, *From max-plus algebra to nonexpansive mappings: a nonlinear theory for discrete event systems*, Theoretical Computer Science **293** (2003), pp. 141–167

[GK] J. Gunawardena & M. Keane, *On the existence of cycle times for some nonexpansive maps*, préprint HPL-BRIMS-95-003, Hewlett-Packard (1995)

[Koh] E. Kohlberg, *Invariant half-lines of nonexpansive piecewise-linear transformations*, Math. Oper. Res. **5** (1980), pp. 366–372