# Une propriété de domination convexe pour les orbites sturmiennes

Thierry Bousch*

24 avril 2013

**Abstract**

Let $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ be a $N$-periodic sequence of integers ($N \geqslant 1$), and $\mathbf{s}$ a sturmian sequence with the same barycenter (and also $N$-periodic, consequently). It is shown that, for affine functions $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ which are increasing relatively to some order $\leqslant_2$ on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ (the space of all $N$-periodic sequences), the average of $|\alpha|$ on the orbit of $\mathbf{x}$ is greater than its average on the orbit of $\mathbf{s}$.

**Résumé**

Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ une suite $N$-périodique d'entiers ($N \geqslant 1$), et $\mathbf{s}$ une suite sturmienne de même barycentre (et donc également $N$-périodique). On montre que, pour les fonctions affines $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ qui sont croissantes relativement à un certain ordre $\leqslant_2$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ (l'espace de toutes les suites $N$-périodiques), la moyenne de $|\alpha|$ sur l'orbite de $\mathbf{x}$ est plus grande que sa moyenne sur l'orbite de $\mathbf{s}$.

*Titre anglais:* A convex domination property for sturmian orbits

*Mots-clés:* suite sturmienne, domination convexe, optimisation ergodique

*Classification AMS (2000):* 37D35 (thermodynamic formalism, variational principles, equilibrium states), 49N20 (periodic optimization), 90C27 (combinatorial optimization)

## 1 Enoncé du théorème

*Ordres sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.* Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites (unilatères) de réels. On note $\triangleleft$ l'opération de décalage vers la gauche, et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ le sous-espace constitué des suites $N$-périodiques, c.à.d. telles que $\triangleleft^N \mathbf{x} = \mathbf{x}$; c'est un espace vectoriel de dimension $N$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{per}} = \bigcup_{N \geqslant 1} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ l'ensemble de toutes les suites périodiques. Enfin, on note $\mathbf{1}$ la suite constante $(1, 1, \ldots)$.

Outre l'ordre produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il y a deux autres relations d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, invariantes par translation, qui sont importantes pour le problème donné. Notons $\pi_n$ les projections canoniques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, i.e. $\pi_n(\mathbf{x}) = x_n$ si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Posons également, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = (\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_{n-1})(\mathbf{x}) = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$
$$h_n(\mathbf{x}) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n)(\mathbf{x}) = n x_0 + (n-1) x_1 + \cdots + 1 x_{n-1}$$

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

puis définissons les ordres $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$ comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \leqslant_1 \mathbf{y} &\iff \forall n \quad \sigma_n(\mathbf{x}) \leqslant \sigma_n(\mathbf{y}) \\
\mathbf{x} \leqslant_2 \mathbf{y} &\iff \forall n \quad h_n(\mathbf{x}) \leqslant h_n(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Les espaces vectoriels ordonnés $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leqslant_1)$ et $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leqslant_2)$ sont manifestement isomorphes à $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leqslant)$; en particulier, ce sont des treillis.

On écrira $\mathbf{x} <_1 \mathbf{y}$ (ou $\mathbf{x} <_2 \mathbf{y}$) pour dire que l'inégalité est satisfaite, avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Si $\mathbf{x}$ est une suite périodique, on notera $\mathrm{bar}(\mathbf{x})$ ou $\langle \mathbf{x} \rangle$ son "barycentre", c.à.d. la moyenne de ses coordonnées (qui est aussi sa limite au sens de Cesàro). La fonction bar : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{per}} \to \mathbb{R}$ est linéaire, croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, parce que $h_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} n^2 \langle \mathbf{x} \rangle + o(n^2)$ pour $n$ grand, ce qui montre que $\langle \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$ si $\mathbf{x} \geqslant_2 0$.

**Lemme 1.1.** *Un élément* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ *vérifie* $\mathbf{x} \geqslant_2 0$ *si et seulement si*

$$h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_{N-1}(\mathbf{x}), \sigma_N(\mathbf{x}) \ \geqslant\ 0.$$

*Démonstration.* Les conditions sont évidemment nécessaires: si $\mathbf{x} \geqslant_2 0$ alors tous les $h_i(\mathbf{x})$ sont positifs, ainsi que $\langle \mathbf{x} \rangle$ comme on vient de le voir, donc $\sigma_N(\mathbf{x}) = N \langle \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons $h_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ pour $i < N$ et $\sigma_N(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Si $\mathbf{x}$ n'est pas $\geqslant_2 0$, soit $s$ le plus petit indice tel que $h_s(\mathbf{x}) < 0$. Il vérifie donc $s \geqslant N$. Mais alors

$$\begin{aligned}
h_s(\mathbf{x}) &= s x_0 + \cdots + (s - N + 1) x_{N-1} + (s - N) x_N + \cdots + 0 x_s \\
&= (s - N + 1)(x_0 + \cdots + x_{N-1}) + (N-1) x_0 + \cdots + 0 x_{N-1} + h_{s-N}(\lhd^N \mathbf{x}) \\
&= (s - N + 1) \sigma_N(\mathbf{x}) + h_{N-1}(\mathbf{x}) + h_{s-N}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

et donc $h_{s-N}(\mathbf{x}) < 0$, ce qui contredit la minimalité de $s$. $\square$

**Lemme 1.2.** *Une fonction linéaire* $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$*, de la forme*

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \ \longmapsto\ a_0 x_0 + \cdots + a_{N-1} x_{N-1}$$

*est croissante pour l'ordre* $\leqslant_2$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} a_0 - a_1 \geqslant a_1 - a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{N-2} - a_{N-1} \\ a_{N-2} \geqslant a_{N-1} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

*et strictement croissante (i.e.* $h(\mathbf{x}) > 0$ *si* $\mathbf{x} >_2 0$*) si et seulement si toutes ces inégalités sont strictes.*

*Démonstration.* Par le lemme précédent, l'espace vectoriel ordonné $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}, \leqslant_2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^N$ muni de l'ordre usuel, via les nouvelles coordonnées $h_1, \ldots, h_{N-1}, \sigma_N$. Les formes linéaires croissantes (resp. strictement croissantes) sont donc exactement les combinaisons linéaires positives (resp. à coefficients strictement positifs) de ces fonctions coordonnées.

En appliquant la transformation d'Abel à $h$, on obtient

$$h = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{b_1} \sigma_1 + \underbrace{(a_1 - a_2)}_{b_2} \sigma_2 + \cdots + \underbrace{(a_{N-2} - a_{N-1})}_{b_{N-1}} \sigma_{N-1} + a_{N-1} \sigma_N$$

et une deuxième application de la transformation d'Abel donne

$$h = (b_1 - b_2) h_1 + (b_2 - b_3) h_2 + \cdots + (b_{N-2} - b_{N-1}) h_{N-2} + b_{N-1} h_{N-1} + a_{N-1} \sigma_N$$

Donc $h$ est croissante ssi $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{N-1} \geqslant 0$ et $a_{N-1} \geqslant 0$, et strictement croissante ssi ces inégalités sont strictes. $\square$

**Corollaire 1.3.** *Soit $a_0, a_1, \ldots$ une suite de réels positifs tels que $\sum a_n < \infty$, et convexe, c.à.d. telle que la suite $a_0 - a_1, a_1 - a_2, \ldots$ soit décroissante. Alors la fonction linéaire $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{per}} \to \mathbb{R}$ définie par $h(\mathbf{x}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x_n$ est croissante pour l'ordre $\leqslant_2$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout $N \geqslant 1$, la restriction de $h$ à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ est croissante. Or, cette restriction s'écrit

$$\mathbf{x} \longmapsto \bar{a}_0 x_0 + \cdots + \bar{a}_{N-1} x_{N-1}$$

avec $\bar{a}_k = \sum_{\ell\geqslant 0} a_{k+\ell N}$ , et ces coefficients satisfont manifestement les conditions du Lemme 1.2. □

*Suites sturmiennes.* Soit $\rho$ un nombre réel. Une suite d'entiers $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ est appelée *$\rho$-sturmienne* si elle vérifie

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \qquad \bigl|x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{k+n-1} - n\rho\bigr| < 1$$

voir [BM]. L'ensemble $\mathcal{S}_\rho$ des suites $\rho$-sturmiennes est un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, stable par décalage, minimal et uniquement ergodique. Pour l'ordre $\leqslant_1$, il est totalement ordonné, et contient un plus petit élément $\mathbf{s}_\perp$ et un plus grand élement $\mathbf{s}_\top$, donnés par $\sigma_n(\mathbf{s}_\perp) = \lfloor n\rho \rfloor$ et $\sigma_n(\mathbf{s}_\top) = \lceil n\rho \rceil$ $(n \geqslant 0)$.

Si $\rho$ est rationnel, d'écriture réduite $p/q$ (i.e. $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ et $q \geqslant 1$), l'ensemble $\mathcal{S}_\rho$ est fini, et consiste en une unique orbite de période $q$, et de barycentre $\rho$. Ses éléments $\mathbf{s}_0, \ldots, \mathbf{s}_{q-1}$ sont donnés par

$$\sigma_n(\mathbf{s}_k) = \Big\lfloor \frac{np + k}{q} \Big\rfloor \qquad (n \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant k < q)$$

et vérifient

$$\mathbf{s}_\perp = \mathbf{s}_0 \ \leqslant_1 \ \mathbf{s}_1 \ \leqslant_1 \ \cdots \ \leqslant_1 \ \mathbf{s}_{q-1} = \mathbf{s}_\top$$

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1.4.** *Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ une suite $N$-périodique d'entiers, et $\mathbf{s}$ une suite sturmienne de même barycentre (et donc aussi $N$-périodique). Pour toute fonction affine $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, on a*

$$\sum_{0\leqslant i<N} \bigl|\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\bigr| \ \geqslant \sum_{0\leqslant i<N} \bigl|\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\bigr| \tag{1.2}$$

Notons que le membre de droite ne dépend pas du choix de $\mathbf{s}$, puisque les suites $\langle\mathbf{x}\rangle$-sturmiennes sont toutes dans une même orbite (dont la période divise $N$).

## 2 Démonstration

Soit $\rho$ réel. Pour tout $t \in [0, 1[$ , soit $\mathbf{s}(\rho, t)$ l'élement de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\sigma_n\bigl[\mathbf{s}(\rho, t)\bigr] = \lfloor n\rho + t \rfloor \qquad (n \geqslant 0)$$

et qui est $\rho$-sturmien. Définissons maintenant, pour $\kappa \in [0, 1]$,

$$\mathbf{S}(\rho, \kappa) = \int_0^\kappa \mathbf{s}(\rho, t)\, dt$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sigma_n\big[\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big] &= \int_0^\kappa \lfloor n\rho + t\rfloor\, dt \\ &= \operatorname{Max}\big\{\kappa\lfloor n\rho\rfloor, n\rho - (1-\kappa)\lceil n\rho\rceil\big\} \end{aligned} \qquad (n \geqslant 0)$$

Autrement dit,

$$\mathbf{S}(\rho,\kappa) \;=\; (\kappa\mathbf{s}_\perp) \vee_1 (\rho\mathbf{1} - (1-\kappa)\mathbf{s}_\top)$$

où $\vee_1$ est l'opération de borne supérieure pour l'ordre $\leqslant_1$. On a en particulier la relation de symétrie

$$\mathbf{S}(1-\rho\,, 1-\kappa) \;=\; (1-\rho-\kappa)\mathbf{1} + \mathbf{S}(\rho,\kappa) \tag{2.1}$$

pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ et $\kappa \in [0,1]$.

Un cas particulier important est celui où $\rho$ est un rationnel $p/q$ (forme réduite) et $\kappa$ un multiple de $1/q$ ; dans ce cas, la fonction $t \mapsto \mathbf{s}(\rho,t)$ est constante sur chaque intervalle de la forme $\big[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}\big[$, où elle vaut $\mathbf{s}_i$, donc

$$\mathbf{S}(\rho,k/q) = \frac{\mathbf{s}_0 + \cdots + \mathbf{s}_{k-1}}{q} \qquad (0 \leqslant k \leqslant q)$$

et de plus, la fonction $\kappa \mapsto \mathbf{S}(\rho,\kappa)$ est affine entre deux multiples consécutifs de $1/q$.

**Lemme 2.1.** *Soit $C$ un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$. On suppose que pour toute application linéaire $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, il existe $\mathbf{x}$ dans $C$ tel que $h(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Alors, il existe un élément $\geqslant_2 0$ dans $C$.*

Ce lemme est une conséquence facile de Hahn-Banach; je laisse la preuve au lecteur.

**Proposition 2.2.** *Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ une suite $N$-périodique d'entiers, $\rho$ son barycentre, et $\mathbf{s}$ une suite sturmienne de même barycentre. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
*(1) Pour toute fonction affine $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ croissante pour l'ordre $\leqslant_2$ , on a*

$$\sum_{0\leqslant i<N} \big|\alpha(\lhd^i\mathbf{x})\big| \;\geqslant\; \sum_{0\leqslant i<N} \big|\alpha(\lhd^i\mathbf{s})\big| \tag{2.2}$$

*(2) Pour tout réel $\kappa$ dans $[0,1]$, il existe des nombres réels $c_0, \ldots, c_{N-1}$ dans $[0,1]$, dont la somme vaut $\kappa N$ et tels que*

$$c_0\,\mathbf{x} + c_1(\lhd\mathbf{x}) + \cdots + c_{N-1}(\lhd^{N-1}\mathbf{x}) \;\leqslant_2\; N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa) \tag{2.3}$$

*Démonstration.* Observons d'abord que

$$\sum_{0\leqslant i<N} \alpha(\lhd^i\mathbf{x}) \;=\; \sum_{0\leqslant i<N} \alpha(\lhd^i\mathbf{s})$$

puisque $\mathbf{x}$ et $\mathbf{s}$ ont même barycentre; il en résulte que l'inégalité (2.2) est équivalente à

$$\sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i\mathbf{x})\big]^+ \geqslant \sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i\mathbf{s})\big]^+ \tag{2.4}$$

et aussi à

$$\sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i\mathbf{x})\big]^- \geqslant \sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i\mathbf{s})\big]^- \tag{2.5}$$

et c'est plutôt cette dernière inégalité que nous utiliserons pour prouver l'équivalence entre les conditions (1) et (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Soient $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{q-1}$ les points de l'orbite sturmienne, rangés par ordre croissant (où $p/q$ est l'écriture réduite de $\rho$). Soit $K$ le nombre d'indices $i$ pour lesquels $\alpha(\mathbf{s}_i) < 0$, et posons $\kappa = K/q$. On a

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\big]^- = \frac{N}{q} \sum_{0 \leqslant i < q} \big[\alpha(\mathbf{s}_i)\big]^- = -\frac{N}{q}\big[\alpha(\mathbf{s}_0) + \cdots + \alpha(\mathbf{s}_{K-1})\big]$$

Considérons maintenant les $c_i$ donnés par la condition (2) pour cette valeur particulière de $\kappa$. Comme ils sont dans $[0,1]$, on a toujours

$$\begin{aligned} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\big]^- &\geqslant -c_i \alpha(\lhd^i \mathbf{x}) \\ &= -c_i \alpha(0) - c_i h(\lhd^i \mathbf{x}) \end{aligned}$$

où $h$ est la partie linéaire de $\alpha$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant i < N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\big]^- &\geqslant -\alpha(0)\Big[\sum_{0 \leqslant i < N} c_i\Big] - h\Big[\sum_{0 \leqslant i < N} c_i(\lhd^i \mathbf{x})\Big] \\ &\geqslant -\kappa N \alpha(0) - h\big[N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big] \\ &= -\frac{N}{q}\big[K\alpha(0) + h(\mathbf{s}_0) + \cdots + h(\mathbf{s}_{K-1})\big] \\ &= -\frac{N}{q}\big[\alpha(\mathbf{s}_0) + \cdots + \alpha(\mathbf{s}_{K-1})\big] \\ &= \sum_{0 \leqslant i < N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\big]^- \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Traitons d'abord le cas où $\kappa = K/q$, avec $K$ entier, et posons $M = \kappa N$. Pour $K = 0$ la condition (2) est trivialement satisfaite, supposons donc $1 \leqslant K \leqslant q$. Soit $C$ le sous-ensemble (compact, convexe) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ constitué des éléments de la forme

$$N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa) - c_0\mathbf{x} - \cdots - c_{N-1}(\lhd^{N-1}\mathbf{x})$$

où $c_0, \dots, c_{N-1}$ sont dans $[0,1]$ et de somme $M$. On doit montrer que $C$ contient un élément $\geqslant_2 0$. D'après le lemme 2.1, il suffit de montrer que pour toute fonction linéaire $\leqslant_2$-croissante $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$, on peut trouver des $c_i$ tels que

$$c_0 h(\mathbf{x}) + \cdots + c_{N-1} h(\lhd^{N-1}\mathbf{x}) \leqslant h\big[N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big].$$

Soit $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$ un réarrangement de l'orbite de $\mathbf{x}$, i.e. $\mathbf{x}_i = \lhd^{\sigma(i)}\mathbf{x}$, où la permutation $\sigma$ de $\{0, \dots, N-1\}$ est choisie de manière à ce que

$$h(\mathbf{x}_0) \leqslant h(\mathbf{x}_1) \leqslant \cdots \leqslant h(\mathbf{x}_{N-1}),$$

et posons

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) < M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit alors de montrer que

$$h(\mathbf{x}_0) + \cdots + h(\mathbf{x}_{M-1}) \leqslant h\big[N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big]. \tag{2.6}$$

Considérons pour cela la fonction affine $\leqslant_2$-croissante $\alpha : \mathbf{p} \to h(\mathbf{p}) - h(\mathbf{x}_{M-1})$. Par l'hypothèse (1), elle satisfait l'inégalité (2.5), donc,

$$\begin{aligned}
Mh(\mathbf{x}_{M-1}) - \big[h(\mathbf{x}_0) + \cdots + h(\mathbf{x}_{M-1})\big] &= \sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\big]^- \geqslant \sum_{0\leqslant i<N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\big]^- \\
&= \frac{N}{q} \sum_{0\leqslant i<q} \big[\alpha(\mathbf{s}_i)\big]^- \geqslant \frac{N}{q} \sum_{0\leqslant i<K} \big[\alpha(\mathbf{s}_i)\big]^- \geqslant -\frac{N}{q} \sum_{0\leqslant i<K} \alpha(\mathbf{s}_i) \\
&= -\frac{N}{q}\Big[h(\mathbf{s}_0 + \cdots + \mathbf{s}_{K-1}) - Kh(x_{M-1})\Big] \\
&= -h\big[N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big] + Mh(\mathbf{x}_{M-1})
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.6), et prouve la condition (2) dans le cas où $\kappa$ est multiple de $1/q$.

Si $\kappa$ n'est pas de cette forme, on obtient une solution de (2.3) simplement en interpolant les solutions obtenues pour les deux multiples de $1/q$ les plus proches. Ça marche parce que la fonction $\kappa \mapsto \mathbf{S}(\rho,\kappa)$ est affine sur un tel intervalle. □

*Renormalisation.* A toute suite $\mathbf{x} = x_0x_1\ldots$ d'entiers naturels, associons la suite $\mathcal{R}\mathbf{x}$ définie par

$$\mathcal{R}\mathbf{x} \;=\; 01^{x_0}01^{x_1}01^{x_2}\ldots$$

Si $\mathbf{x}$ est $N$-périodique, de barycentre $\rho$, alors $\mathcal{R}\mathbf{x}$ est $N'$-périodique, où

$$N' = N + x_0 + \cdots + x_{N-1} = N(1+\rho)$$

et de barycentre

$$\rho' = \frac{x_0 + \cdots + x_{N-1}}{N + x_0 + \cdots + x_{N-1}} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Il est bien connu que $\mathcal{R}\mathbf{x}$ est une suite sturmienne si et seulement si $\mathbf{x}$ est une suite sturmienne. Plus précisément, j'aurai besoin de l'énoncé suivant:

**Lemme 2.3.** *Pour tout $\rho$ réel positif, et $t$ dans $[0,1[$, on a*

$$\mathcal{R}\big[\mathbf{s}(\rho,t)\big] = \mathbf{s}\Big[\frac{\rho}{1+\rho}, \frac{t}{1+\rho}\Big]. \tag{2.7}$$

*Démonstration.* Notons $\mathbf{x} = \mathbf{s}(\rho,t)$, $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$ et $\mathbf{z} = \mathbf{1} - \mathbf{y}$. Pour tout entier naturel $n$, on a $\sigma_n(\mathbf{y}) = n - \sigma_n(\mathbf{z})$. Or, les seuls chiffres non nuls de $\mathbf{z}$ sont des '1' aux positions 0, $1 + x_0$, $2 + x_0 + x_1$, etc. Donc, $\sigma_n(\mathbf{z})$ est le plus petit entier naturel $k$ pour lequel

$$k + x_0 + \cdots + x_{k-1} \geqslant n.$$

Ici $x_0 + \cdots + x_{k-1} = \lfloor k\rho + t\rfloor$, donc

$$\begin{aligned}
k + x_0 + \cdots + x_{k-1} \geqslant n &\iff k + \lfloor k\rho + t\rfloor \geqslant n \\
&\iff k + k\rho + t \geqslant n \\
&\iff k \geqslant \frac{n-t}{1+\rho}
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sigma_n(\mathbf{z}) = \Big\lceil \frac{n-t}{1+\rho} \Big\rceil$$

pour tout $n \geqslant 0$, et

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = n - \Big\lceil \frac{n-t}{1+\rho} \Big\rceil = \Big\lfloor n + \frac{t-n}{1+\rho} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{n\rho + t}{1+\rho} \Big\rfloor$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Lemme 2.4.** *Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ une suite d'entiers naturels. Quels que soient $n, \ell$ entiers naturels, on a l'inégalité*

$$h_n(\mathcal{R}\mathbf{x}) \leqslant \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} + h_\ell(\mathbf{x})\,. \tag{2.8}$$

*En outre, si $\mathbf{x}$ est une suite sturmienne, $\rho$ son barycentre, et*

$$\ell = \left\lfloor \frac{n}{1+\rho} \right\rfloor$$

*alors on a égalité dans (2.8).*

*Démonstration.* Posons $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$ et $\mathbf{z} = \mathbf{1} - \mathbf{y}$. On a

$$h_n(\mathbf{z}) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (n-i)^+ z_i \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (n-k-x_0-\cdots-x_{k-1})^+$$

La minoration évidente

$$(n-k-x_0-\cdots-x_{k-1})^+ \;\geqslant\; \begin{cases} n-k-x_0-\cdots-x_{k-1} & \text{si } k \leqslant \ell, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.9}$$

nous donne

$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{z}) \;&\geqslant\; \sum_{k=0}^{\ell} (n-k-x_0-\cdots-x_{k-1}) \\ &= (\ell+1)n - (0+1+\cdots+\ell) - \ell x_0 - (\ell-1)x_1 - \cdots - 1x_{\ell-1} \\ &= (\ell+1)n - \tfrac{1}{2}\ell(\ell+1) - h_\ell(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}n(n+1) - h_n(\mathbf{z}) \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}n(n+1) - (\ell+1)n + \tfrac{1}{2}\ell(\ell+1) + h_\ell(\mathbf{x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(n-\ell)(n-\ell-1) + h_\ell(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

comme annoncé.

Nous allons voir maintenant que si $\mathbf{x}$ est $\rho$-sturmienne et $\ell = \lfloor n/(1+\rho) \rfloor$, l'inégalité (2.9) est en fait une *égalité* quel que soit $k$, et il en sera donc de même pour (2.8).

Supposons d'abord $k \leqslant \ell$. Comme $\mathbf{x}$ est $\rho$-sturmienne, on a $x_0 + \cdots + x_{k-1} \leqslant \lceil k\rho \rceil$ et donc

$$\begin{aligned} n-k-x_0-\cdots-x_{k-1} &\geqslant n-k-\lceil k\rho \rceil = \lceil n-k(1+\rho) \rceil \\ &\geqslant \lceil n-\ell(1+\rho) \rceil \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

puisque $\ell \leqslant n/(1+\rho)$.

Inversement, pour $k > \ell$, on utilise l'inégalité $x_0 + \cdots + x_{k-1} \geqslant \lfloor k\rho \rfloor$, qui entraîne

$$\begin{aligned} n-k-x_0-\cdots-x_{k-1} &\leqslant n-k-\lfloor k\rho \rfloor = \lfloor n-k(1+\rho) \rfloor \\ &\leqslant \lfloor n-(\ell+1)(1+\rho) \rfloor \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

puisque $\ell + 1 \geqslant n/(1+\rho)$. On a donc bien égalité dans (2.9) pour tout $k$, ce qui établit la deuxième partie du lemme. ☐

**Lemme 2.5.** *Soit $\rho$ un réel positif, $\kappa$ dans $[0,1]$, $n$ un entier naturel et $\ell = \lfloor n/(1+\rho)\rfloor$. On a*

$$(1+\rho)\, h_n\Big[\mathbf{S}\Big(\frac{\rho}{1+\rho}, \frac{\kappa}{1+\rho}\Big)\Big] \;=\; \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2}\kappa + h_\ell\big[\mathbf{S}(\rho,\kappa)\big] \tag{2.10}$$

*Démonstration.* D'après les deux lemmes précédents, on a

$$h_n\Big[\mathbf{s}\Big(\frac{\rho}{1+\rho}, \frac{t}{1+\rho}\Big)\Big] = \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} + h_\ell\big[\mathbf{s}(\rho,t)\big]$$

quel que soit $t$ dans $[0,1[$, et en intégrant cette égalité entre 0 et $\kappa$, on obtient le résultat cherché. □

Etant donné $N$ entier strictement positif, $\rho$ rationnel, et $\kappa$ dans $[0,1]$, définissons $\mathcal{E}_N(\rho,\kappa)$ comme l'ensemble des suites $N$-périodiques entières $\mathbf{x}$ de barycentre $\rho$ et pour lesquelles le système d'inégalités

$$\begin{cases} c_0, c_1, \ldots, c_{N-1} \in [0,1] \\ c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1} = \kappa N \\ c_0(\mathbf{x}) + c_1(\lhd\mathbf{x}) + \cdots + c_{N-1}(\lhd^{N-1}\mathbf{x}) \leqslant_2 N\,\mathbf{S}(\rho,\kappa) \end{cases} \tag{2.11}$$

n'admet *pas* de solution. Au vu de la Proposition 2.2, l'objectif est de démontrer que ces ensembles sont vides. Un résultat partiel dans ce sens est le suivant.

**Proposition 2.6.** *Soit $\mathbf{x}$ une suite $N$-périodique d'entiers naturels, $\rho$ son barycentre, et $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$, qui est $N'$-périodique avec $N' = N(1+\rho)$, et de barycentre $\rho' = \rho/(1+\rho)$. Soit $\kappa$ un élément de $[0,1]$ tel que $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_N(\rho,\kappa)$. Alors $\mathbf{y} \notin \mathcal{E}_N(\rho', \kappa/(1+\rho))$.*

*Démonstration.* Soit $(c_0,\ldots,c_{N-1})$ une solution du système (2.11). Considérons maintenant les réels $c'_0,\ldots,c'_{N'-1}$ définis par

$$\begin{aligned} c'_0 &= c_0 \\ c'_{1+x_0} &= c_1 \\ c'_{2+x_0+x_1} &= c_2 \\ &\vdots \\ c'_{N-1+x_0+\ldots+x_{N-1}} &= c_{N-1} \end{aligned}$$

et tous les autres $c'_i$ sont nuls. Il est évident que les $c'_i$ sont dans $[0,1]$ et que leur somme vaut $\kappa N = \kappa' N'$, où $\kappa' = \kappa/(1+\rho)$. Nous allons voir que

$$c'_0(\mathbf{y}) + c'_1(\lhd\mathbf{y}) + \cdots + c'_{N'-1}(\lhd^{N'-1}\mathbf{y}) \leqslant_2 N'\,\mathbf{S}(\rho',\kappa')$$

ce qui démontrera la Proposition.
L'inégalité ci-dessus se récrit

$$c_0(\mathcal{R}\mathbf{x}) + c_1(\mathcal{R}\lhd\mathbf{x}) + \cdots + c_{N-1}(\mathcal{R}\lhd^{N-1}\mathbf{x}) \leqslant_2 N'\,\mathbf{S}(\rho',\kappa').$$

Il s'agit donc de montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$c_0 h_n(\mathcal{R}\mathbf{x}) + \cdots + c_{N-1} h_n(\mathcal{R}\lhd^{N-1}\mathbf{x}) \leqslant N(1+\rho)\, h_n\big[\mathbf{S}(\rho',\kappa')\big].$$

Pour $n$ fixé, posons $\ell = \lfloor n/(1+\rho) \rfloor$. Par le lemme 2.4, on a

$$h_n(\mathcal{R}\triangleleft^i \mathbf{x}) \leqslant \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} + h_\ell(\triangleleft^i \mathbf{x})$$

pour $i = 0, \ldots, N-1$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant i < N} c_i \, h_n(\mathcal{R}\triangleleft^i \mathbf{x}) &\leqslant \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} \Big[ \sum_{0 \leqslant i < N} c_i \Big] + h_\ell \Big[ \sum_{0 \leqslant i < N} c_i (\triangleleft^i \mathbf{x}) \Big] \\ &\leqslant \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} \kappa N + h_\ell \big[ N \, \mathbf{S}(\rho, \kappa) \big] \\ &= N \Big[ \frac{(n-\ell)(n-\ell-1)}{2} \kappa + h_\ell \big[ \mathbf{S}(\rho, \kappa) \big] \Big] \\ &= N(1+\rho) \, h_n \big[ \mathbf{S}(\rho', \kappa') \big] \end{aligned}$$

par le lemme 2.5, ce qui termine la preuve. $\square$

**Lemme 2.7.** *Soit* $\mathbf{x}$ *une suite périodique d'entiers, et* $\mathbf{s}_\perp$, $\mathbf{s}_\top$ *la plus petite et la plus grande suite sturmienne de même barycentre que* $\mathbf{x}$. *Il existe des entiers naturels* $i$, $j$ *pour lesquels* $\triangleleft^i \mathbf{x} \leqslant_1 \mathbf{s}_\perp$ *et* $\mathbf{s}_\top \leqslant_1 \triangleleft^j \mathbf{x}$.

*Démonstration.* Définissons $h(n) = \sigma_n(\mathbf{x}) - n\rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\rho$ est le barycentre de $\mathbf{x}$. C'est une fonction périodique $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donc on peut trouver des indices $i, j$ où elle atteint son maximum et son minimum, respectivement.

Posons $\mathbf{y} = \sigma^i \mathbf{x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_n(\mathbf{y}) = x_i + \cdots + x_{i+n-1} = \sigma_{i+n}(\mathbf{x}) - \sigma_i(\mathbf{x}) = n\rho + h(i+n) - h(i) \leqslant n\rho$, et comme $\sigma_n(\mathbf{y})$ est entier, cette inégalité équivaut à $\sigma_n(\mathbf{y}) \leqslant \lfloor n\rho \rfloor$. Ceci montre que $\mathbf{y} \leqslant_1 \mathbf{s}_\perp$. De même, la suite $\mathbf{z} = \triangleleft^j \mathbf{x}$ vérifie $\sigma_n(\mathbf{z}) \geqslant \lceil n\rho \rceil$ pour tout $n$, et donc $\mathbf{z} \geqslant_1 \mathbf{s}_\top$. $\square$

**Lemme 2.8.** *Soit* $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ *une suite* $N$*-périodique d'entiers, de barycentre* $\rho > 0$, *et dont l'une au moins des coordonnées* $x_n$ *est strictement négative. Il existe alors des entiers naturels* $i < j$ *pour lesquels*

$$\begin{cases} x_i < 0, \\ x_k = 0 \quad \textit{pour tout } k \textit{ tel que } i < k < j, \\ x_j + \cdots + x_{j+\ell-1} > 0 \quad \textit{pour tout } \ell > 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soient $I, J$ les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ définis par

$$\begin{aligned} I &= \big\{ i \in \mathbb{N} : x_i < 0 \big\}, \\ J &= \big\{ j \in \mathbb{N} : \sigma_j(\mathbf{x}) < \sigma_k(\mathbf{x}) \text{ pour tout } k > j \big\} \\ &= \big\{ j \in \mathbb{N} : x_j + \cdots + x_{j+\ell-1} > 0 \text{ pour tout } \ell > 0 \big\}. \end{aligned}$$

Ils sont disjoints, $N$-périodiques (i.e. contiennent $i$ si et seulement si ils contiennent $N+i$), et non vides: pour $I$ cela fait partie des hypothèses, et pour $J$ c'est une conséquence facile de l'hypothèse $\rho > 0$ (voir aussi le lemme précédent).

On peut donc trouver un élément $i \in I$ qui est "immédiatement suivi" d'un élément $j \in J$, dans le sens où il n'existe aucun élément de $I \cup J$ situé strictement entre $i$ et $j$. J'affirme qu'on a alors $x_k = 0$ pour tout $k$ strictement entre $i$ et $j$, ce qui démontrera le lemme.

Supposons le contraire; il existe alors un plus grand entier $k$ tel que $i < k < j$ et $x_k \neq 0$. Comme c'est le plus grand, on a $x_s = 0$ pour tout $s$ tel que $k < s < j$. D'autre part, on ne peut pas avoir $x_k < 0$, sinon $k$ serait élément de $I$; donc $x_k > 0$. Mais alors

$$x_k + \cdots + x_{k+\ell-1} = \begin{cases} x_k & \text{si } 0 < \ell \leqslant j-k \\ x_k + \sigma_{\ell+k}(\mathbf{x}) - \sigma_j(\mathbf{x}) & \text{si } \ell \geqslant j-k \end{cases}$$
$$\geqslant x_k > 0 \quad \text{pour tout } \ell > 0$$

et donc $k$ serait élément de $J$, ce qui n'est pas possible non plus; contradiction. □

**Proposition 2.9.** *Soit $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ une fonction affine strictement croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, et $A : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leqslant i < N} \left|\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\right| \tag{2.12}$$

*Soit $\mathbf{x}$ une suite $N$-périodique d'entiers, dont le barycentre $\rho$ vérifie $0 < \rho < 1$, et telle que $A(\mathbf{x}) \neq A(\mathbf{s})$, où $\mathbf{s}$ est une suite $\rho$-sturmienne. On suppose que $\mathbf{x}$ possède au moins une coordonnée strictement négative. Alors, il existe une autre suite $N$-périodique d'entiers $\mathbf{y}$, de même barycentre, telle que $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 2.8, et quitte à remplacer $\mathbf{x}$ par un autre point de la même orbite, on peut trouver un entier $s$ tel que $0 < s < N$ et

$$\begin{cases} x_s < 0, \\ x_i = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } s < i < N, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) = x_0 + \cdots + x_{n-1} > 0 \quad \text{pour tout } n > 0. \end{cases}$$

Ecrivons

$$\alpha(\mathbf{t}) = \alpha(0) + a_0 t_0 + \cdots + a_{N-1} t_{N-1}$$

où $a_0, \ldots, a_{N-1}$ vérifient les conditions du Lemme 1.2. On va distinguer deux cas, selon que $\alpha(\mathbf{x})$ est plus grand ou plus petit que $a_0 - a_{N-1}$.

*Premier cas: $\alpha(\mathbf{x}) \geqslant a_0 - a_{N-1}$.*

Définissons alors $\mathbf{y}$ comme l'unique élément de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ tel que

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0 \pmod{N}, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ y_1 = x_1 \\ \quad\vdots \\ y_{N-2} = x_{N-2} \\ y_{N-1} = x_{N-1} + 1 \end{cases}$$

L'inégalité $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$ équivaut à

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{y})\right]^- < \sum_{0 \leqslant i < N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\right]^- \tag{2.13}$$

On voit facilement que pour $0 < i < N$ on a $\lhd^i \mathbf{y} >_1 \lhd^i \mathbf{x}$, et donc

$$\alpha(\lhd^i \mathbf{y}) > \alpha(\lhd^i \mathbf{x}) \tag{2.14}$$

ce qui entraîne

$$\big[\alpha(\lhd^i \mathbf{y})\big]^- \leqslant \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\big]^- \tag{2.15}$$

D'autre part $\alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}) - a_0 + a_{N-1}$, donc $0 \leqslant \alpha(\mathbf{y}) < \alpha(\mathbf{x})$ et en particulier $\big[\alpha(\mathbf{y})\big]^- = \big[\alpha(\mathbf{x})\big]^- = 0$. Ceci, combiné avec les inégalités (2.15) pour $i = 1, \ldots, N-1$, entraîne l'inégalité *large* dans (2.13).

Pour montrer l'inégalité stricte, il suffit de montrer que l'une au moins des inégalités (2.15) est stricte. Supposons, par l'absurde, qu'elles soient toutes des égalités; vu la manière dont elles sont obtenues à partir de (2.14), cela revient à demander $\alpha(\lhd^i \mathbf{x}) \geqslant 0$ pour tout $i$ tel que $0 < i < N$. Par ailleurs, cette inégalité est toujours vraie pour $i = 0$. Par le Lemme 2.7, cela entraîne $\alpha(\mathbf{s}_\perp) \geqslant 0$ et par suite $\alpha(\lhd^i \mathbf{s}) \geqslant 0$ pour tout $i$, donc

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\big]^- = \sum_{0 \leqslant i < N} \big[\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\big]^-$$

ce qui équivaut à $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{s})$, en contradiction avec les hypothèses.

*Second cas:* $\alpha(\mathbf{x}) \leqslant a_0 - a_{N-1}$.

Ici, on définit $\mathbf{y}$ comme l'unique élément de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ tel que

$$\sigma_n(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0 \pmod N, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 2 & \text{si } n = s \pmod N, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$y_n = x_n + \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \pmod N, \\ 1 & \text{si } n = N-1 \pmod N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -1 & \text{si } n = s-1 \pmod N, \\ 1 & \text{si } n = s \pmod N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrons en premier lieu que ce $\mathbf{y}$ satisfait

$$\lhd^{N-1} \mathbf{y} <_2 \mathbf{x} \tag{2.16}$$

Pour cela, observons que $y_{N-1} \leqslant 1$, et d'autre part $\sigma_n(\mathbf{y}) \leqslant \sigma_n(\mathbf{x}) - 1$ pour tout $n$ tel que $0 < n < N$, et par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma_n(\lhd^{N-1}\mathbf{y} - \mathbf{x}) &= y_{N-1} + y_0 + \cdots + y_{n-2} - x_0 - \cdots - x_{n-1} \\ &= y_{N-1} + \sigma_{n-1}(\mathbf{y}) - \sigma_n(\mathbf{x}) \\ &\leqslant \begin{cases} 1 - \sigma_1(\mathbf{x}) & \text{si } n = 1, \\ \sigma_{n-1}(\mathbf{x}) - \sigma_n(\mathbf{x}) & \text{si } 1 < n \leqslant N. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit $h_n(\lhd^{N-1}\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant 1 - \sigma_n(\mathbf{x})$ pour tout $n$ tel que $1 \leqslant n \leqslant N$, et comme $\sigma_n(\mathbf{x}) \geqslant 1$ (avec inégalité stricte pour $n = s$) cela montre (2.16).

L'inégalité $A(\mathbf{y}) < A(\mathbf{x})$ équivaut à

$$\sum_{0\leqslant i<N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{y})\right]^+ < \sum_{0\leqslant i<N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\right]^+ \tag{2.17}$$

On voit facilement que pour $0 < i < s$ on a $\lhd^i \mathbf{y} <_2 \lhd^i \mathbf{x}$, et donc

$$\alpha(\lhd^i \mathbf{y}) < \alpha(\lhd^i \mathbf{x})$$

ce qui entraîne

$$\left[\alpha(\lhd^i \mathbf{y})\right]^+ \leqslant \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\right]^+ \tag{2.18}$$

D'autre part, on déduit facilement de (2.16) que pour $s \leqslant i < N$ on a $\lhd^i \mathbf{y} <_2 \lhd^{i+1} \mathbf{x}$, et donc

$$\alpha(\lhd^i \mathbf{y}) < \alpha(\lhd^{i+1} \mathbf{x})$$

ce qui entraîne

$$\left[\alpha(\lhd^i \mathbf{y})\right]^+ \leqslant \left[\alpha(\lhd^{i+1} \mathbf{x})\right]^+ \tag{2.19}$$

Enfin, on a $\alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}) - a_0 + a_{N-1} - a_{s-1} + a_s \leqslant a_s - a_{s-1} \leqslant 0$, donc

$$0 = \left[\alpha(\mathbf{y})\right]^+ \leqslant \left[\alpha(\lhd^s \mathbf{x})\right]^+$$

ce qui, combiné avec les inégalités (2.18) pour $i = 1, \ldots, s-1$, et (2.19) pour $i = s, \ldots, N-1$, fournit l'inégalité *large* dans (2.17).

Pour montrer l'inégalité stricte, il suffit de montrer qu'une au moins de ces inégalités est stricte. Supposons, par l'absurde, qu'elles sont toutes des égalités: alors $\alpha(\lhd^i \mathbf{x}) \leqslant 0$ pour tout $i$, ce qui entraîne $\alpha(\lhd^i \mathbf{s}) \leqslant 0$ pour tout $i$, d'après le Lemme 2.7. Donc

$$\sum_{0\leqslant i<N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{x})\right]^+ = \sum_{0\leqslant i<N} \left[\alpha(\lhd^i \mathbf{s})\right]^+$$

ce qui équivaut à $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{s})$, en contradiction avec les hypothèses. □

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer le théorème principal de l'article.

*Démonstration du Théorème 1.4.* Notons

$$\mathcal{E}_N = \bigcup_{\rho\in\mathbb{Q}} \bigcup_{\kappa\in[0,1]} \mathcal{E}_N(\rho, \kappa).$$

On doit montrer que $\mathcal{E}_N$ est vide, pour tout $N \geqslant 1$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et considérons le plus petit $N$ pour lequel $\mathcal{E}_N \neq \varnothing$.

Soit $\mathbf{x}$ un élément de $\mathcal{E}_N$, et $\rho$ son barycentre. Notons que $\rho$ ne peut pas être entier: sinon, l'orbite $\rho$-sturmienne serait réduite à un point, et les inégalités (2.2) seraient automatiquement satisfaites, comme conséquence de la convexité des $|\alpha|$. On peut se ramener au cas $0 < \rho < 1$, quitte à ajouter un même entier à toutes les coordonnées de $\mathbf{x}$. Par la Proposition 2.2, on peut trouver une fonction affine $\leqslant_2$-croissante $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ telle que $A(\mathbf{x}) < A(\mathbf{s})$, où $A : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par (2.12). La condition étant ouverte, on peut perturber $\alpha$ afin de la rendre strictement croissante, et à coefficients rationnels. Enfin, on peut la multiplier par un entier bien choisi, pour qu'elle soit à coefficients entiers. Alors, la fonction $A$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, qui est bien-ordonné.

Il est maintenant possible, quitte à modifier $\mathbf{x}$, de faire en sorte qu'il réalise le minimum de $A$ sur tous les éléments de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}_{(N)}$ de barycentre $\rho$. D'après la Proposition 2.9, cela implique que toutes les coordonnées de $\mathbf{x}$ sont $\geqslant 0$.

Mais on peut aussi appliquer la Proposition 2.9 avec $\mathbf{x}' = \mathbf{1} - \mathbf{x}$ au lieu de $\mathbf{x}$, et $\alpha' : \mathbf{t} \mapsto -\alpha(\mathbf{1} - \mathbf{t})$ au lieu de $\alpha$, et on obtient que toutes les coordonnées de $\mathbf{x}$ sont $\leqslant 1$. Notre suite $\mathbf{x}$ est donc constituée uniquement de '0' et de '1'.

Il existe $\kappa \in [0,1]$ tel que $\mathbf{x}$ soit élément de $\mathcal{E}_N(\rho,\kappa)$. On aura peut-être

$$\kappa \leqslant 1 - \rho$$

et si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en remplaçant $\mathbf{x}$ par $\mathbf{1} - \mathbf{x}$, qui est élément de $\mathcal{E}_N(1-\rho, 1-\kappa)$ et, là encore, constitué uniquement de '0' et de '1'.

Soit $Z = N(1-\rho)$ le nombre de zéros de $\mathbf{x}$ sur une période. Quitte à décaler $\mathbf{x}$, on peut supposer que sa coordonnée initiale est 0, ce qui permet d'écrire $\mathbf{x} = \mathcal{R}\mathbf{z}$ où $\mathbf{z}$ est une suite $Z$-périodique d'entiers naturels, de barycentre $\bar{\rho} = \rho/(1-\rho)$. Posons $\bar{\kappa} = \kappa/(1-\rho)$, qui est élément de $[0,1]$. Comme $Z < N$, l'ensemble $\mathcal{E}_Z(\bar{\rho}, \bar{\kappa})$ est vide, et ne contient donc pas $\mathbf{z}$. Mais cela implique, par la proposition 2.6, que $\mathcal{E}_N(\rho,\kappa)$ ne contient pas $\mathcal{R}\mathbf{z}$. Contradiction. □

# 3 Discussion des résultats

Du Théorème 1.4 on déduit facilement l'énoncé suivant, qui est une manière différente de présenter ce principal résultat de cet article:

**Corollaire 3.1.** *Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ une suite $N$-périodique d'entiers, et $\mathbf{s}$ une suite sturmienne de même barycentre (et donc aussi $N$-périodique). Pour toute fonction affine $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{(N)} \to \mathbb{R}$ croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, et toute fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \varphi\alpha(\lhd^i \mathbf{x}) \geqslant \sum_{0 \leqslant i < N} \varphi\alpha(\lhd^i \mathbf{s}) \tag{3.1}$$

Cet énoncé exprime une relation de "domination convexe" entre les $N$-uplets $(\alpha(\lhd^i\mathbf{x}))_i$ et $(\alpha(\lhd^i\mathbf{s}))_i$ pour toute fonction affine croissante $\alpha$; voir par exemple [Mir], Theorem 1b. Cela signifie intuitivement que les $\alpha(\lhd^i\mathbf{x})$ sont "plus étalés" que les $\alpha(\lhd^i\mathbf{s})$, tout en ayant la même moyenne.

Le Théorème 1.4-Corollaire 3.1 est inspiré par une question posée par Oliver Jenkinson à la fin des années 1990, qu'on peut formuler ainsi: montrer l'inégalité (3.1) quand $\alpha$ est la fonction linéaire particulière

$$\mathbf{t} \longmapsto \sum_{n \geqslant 0} t_n / 2^{n+1}$$

et $\mathbf{x}$ une suite périodique de '0' et de '1'. Ce problème, plus difficile qu'il n'en a l'air, a été résolu fin 2000 par Jenkinson et l'auteur, par une démonstration basée sur la "précondition de Sturm" pour l'application $x \mapsto 2x \pmod 1$. Malheureusement, cette démonstration semble très spécifique à cette situation précise, et nos tentatives pour l'étendre à des situations proches (notamment les $\beta$-développements) n'ont rien donné. Elle est donc restée non publiée pendant plusieurs années. On trouvera cette démonstration dans [Jen].

Il existe d'autres énoncés, plus classiques, de domination convexe entre une suite périodique d'entiers et la suite sturmienne de même barycentre. En particulier:

**Lemme 3.2.** *Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ une suite $N$-périodique d'entiers, et $\mathbf{s}$ une suite sturmienne de même barycentre. Pour tout entier naturel $n$ et toute fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \varphi\sigma_n(\lhd^i \mathbf{x}) \geqslant \sum_{0 \leqslant i < N} \varphi\sigma_n(\lhd^i \mathbf{s}) \tag{3.2}$$

Ce lemme est essentiellement [JZ], Theorem A, mais on le trouve aussi dans des travaux plus anciens, notamment [Hub], Appendix. En voici une démonstration.

*Démonstration du Lemme 3.2.* Fixons $n \geqslant 0$. Observons que l'inégalité (3.2) reste inchangée si on ajoute à $\varphi$ une quelconque fonction affine: on peut donc faire en sorte que $\varphi$ s'annule aux points $\lfloor n\rho \rfloor$ et $\lfloor n\rho \rfloor + 1$. Alors, le membre de droite est nul, puisque les $\sigma_n(\lhd^i \mathbf{s})$ ne prennent que ces deux valeurs.

Mais d'autre part, la fonction $\varphi$ est convexe et s'annule en deux entiers consécutifs, donc elle est positive en tout point entier, et le membre de gauche de (3.2) est positif, ce qui prouve l'inégalité. □

Ce lemme est un cas très particulier d'un théorème de Hajek [Haj] qui affirme que

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \Phi(\lhd^i \mathbf{x}) \geqslant \sum_{0 \leqslant i < N} \Phi(\lhd^i \mathbf{s}) \tag{3.3}$$

pour une large classe de fonctions $\Phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, que Hajek appelle fonctions "multimodulaires". La multimodularité est, en un sens précisé dans [Haj], une forme de "convexité discrète". Les fonctions $\varphi \circ \sigma_n$, avec $\varphi$ convexe et $n \in \mathbb{N}$ sont en particulier des fonctions multimodulaires.

En revanche, les fonctions $|\alpha|$ et $\varphi \circ \alpha$, avec $\varphi$ convexe et $\alpha$ croissante pour l'ordre $\leqslant_2$, ne sont pas des fonctions multimodulaires, ni même cohomologues à des fonctions multimodulaires. Je crois que le Théorème 1.4-Corollaire 3.1 est indépendant du théorème de Hajek: aucun des deux théorèmes ne peut se déduire de l'autre, et même les méthodes de démonstration semblent inconciliables. Cette situation est plutôt paradoxale, car on serait tenté de croire qu'il ne peut exister qu'une seule forme de "convexité discrète" garantissant les inégalités (3.3).

Dans le même ordre d'idées, notons que le Lemme 3.2 ne peut pas se déduire du Corollaire 3.1, parce que les fonctions $\sigma_n$ ne sont pas croissantes pour l'ordre $\leqslant_2$ (pour $n > 1$).

*Inégalités quadratiques.* En prenant $\varphi(x) = x^2$ dans le Lemme 3.2, on obtient des inégalités quadratiques en les $x_i$ :

$$\sum_{0 \leqslant i < N} \sigma_n(\lhd^i \mathbf{x})^2 \geqslant \sum_{0 \leqslant i < N} \sigma_n(\lhd^i \mathbf{s})^2 \qquad (n \geqslant 0) \tag{3.4}$$

qu'il est commode de présenter un peu différemment. Considérons le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{per}}$ défini par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{0 \leqslant i < N} x_i y_i$$

où $N$ est une période commune à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Puis, pour une suite périodique $\mathbf{x}$ donnée, définissons ses coefficients d'autocorrélation $a_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \lhd^n \mathbf{x} \rangle$, pour $n \geqslant 0$, et la "suite des autocorrélations"

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = (\tfrac{1}{2} a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \ldots)$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{0 \leqslant i < N} \sigma_n(\lhd^i \mathbf{x})^2 &= n a_0(\mathbf{x}) + 2\big[(n-1) a_1(\mathbf{x}) + \cdots + 1 a_{n-1}(\mathbf{x})\big] \\ &= 2 h_n(\mathcal{A}\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ce qui permet de récrire les inégalités (3.4) sous la forme suivante:

**Proposition 3.3.** *Si* $\mathbf{x}$ *est une suite périodique d'entiers, et* $\mathbf{s}$ *une suite sturmienne de même barycentre, on a l'inégalité* $\mathcal{A}\mathbf{x} \geqslant_2 \mathcal{A}\mathbf{s}$.

Ces inégalités quadratiques interviennent dans différents problèmes de physique, pour montrer que les configurations de plus basse énergie sont données par des suites sturmiennes; elles ont été obtenues indépendamment par Hubbard [Hub] et Pokrovsky-Uimin [PU].

On peut se demander si on peut retrouver ces inégalités à partir du Théorème 1.4-Corollaire 3.1. Là encore, la réponse est décevante: on peut effectivement obtenir des inégalités quadratiques, en prenant $\varphi(x) = x^2$ dans le Corollaire 3.1, mais ces inégalités sont plus faibles que celles données par la Proposition 3.3.

Cependant, si on se limite à des suites $\mathbf{x}$ constituées uniquement de '0' et de '1', on peut obtenir l'inégalité $\mathcal{A}\mathbf{x} \geqslant_2 \mathcal{A}\mathbf{s}$ à partir du Corollaire 3.1, de la manière suivante: prenons $\varphi(x) = x^2$ et $\alpha = h_1 + \epsilon h_n$, avec $\epsilon > 0$; on obtient

$$\sum_{0 \leqslant i < N} (h_1^2 + 2\epsilon h_1 h_n + \epsilon^2 h_n^2)(\lhd^i \mathbf{x}) \;\geqslant\; \sum_{0 \leqslant i < N} (h_1^2 + 2\epsilon h_1 h_n + \epsilon^2 h_n^2)(\lhd^i \mathbf{s})$$

et ici $\sum h_1^2(\lhd^i \mathbf{x}) = N\rho = \sum h_1^2(\lhd^i \mathbf{s})$, car tous les $x_i$ valent 0 ou 1. En éliminant ce terme commun et en divisant par $2\epsilon$, il vient

$$\sum_{0 \leqslant i < N} (h_1 h_n + \tfrac{1}{2}\epsilon h_n^2)(\lhd^i \mathbf{x}) \;\geqslant\; \sum_{0 \leqslant i < N} (h_1 h_n + \tfrac{1}{2}\epsilon h_n^2)(\lhd^i \mathbf{s}).$$

Puis, en faisant tendre $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\sum_{0 \leqslant i < N} (h_1 h_n)(\lhd^i \mathbf{x}) \;\geqslant\; \sum_{0 \leqslant i < N} (h_1 h_n)(\lhd^i \mathbf{s})$$

qui sont les inégalités cherchées. (On aurait pu aussi les établir en utilisant la Proposition 2.2 (2) avec $\kappa = 1 - \rho$, mais là encore, on a besoin de façon essentielle de l'hypothèse que tous les $x_i$ valent 0 ou 1.)

En conclusion, le résultat principal de cet article n'est ni plus fort, ni plus faible, que les résultats "classiques" que j'ai rappelés dans ce chapitre, en dépit de la grande similitude des énoncés. C'est un théorème différent, avec des méthodes de preuve très différentes. Ses applications, j'imagine, concerneront principalement les $\beta$-développements.

## Références


[BM] T. Bousch & J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 77–111

[Haj] B. Hajek, *Extremal splittings of point processes*, Math. Oper. Res. **10** (1985), 543–556

[Hub] J. Hubbard, *Generalized Wigner lattices in one dimension and some applications to tetracyanoquinodimethane (TCNQ) salts*, Phys. Rev. B **17** (1978), 494–505

[Jen] O. Jenkinson, *A partial order on* $\times 2$*-invariant measures*, Math. Res. Letters **15** (2008), 893–900

[JZ] O. Jenkinson & L. Q. Zamboni, *Characterisations of balanced words via orderings*, Theoretical Computer Science **310** (2004), 247–271

[Mir] L. Mirsky, *Results and problems in the theory of doubly-stochastic matrices*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **1** (1963), 319–334

[PU] V. L. Pokrovsky & G. V. Uimin, *On the properties of monolayers of adsorbed atoms*, J. Phys. C **11** (1978), 3535–3549