LE CARRE DU POTENTIEL EST LIPSCHITZIEN

par Thierry Bousch
CNRS, URA 1169
le 18 octobre 1990

Résumé. On veut démontrer que la fonction de Green d'un compact connexe plein de $\mathbb{C}$ est hölderienne d'exposant 1/2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et Ω l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\Omega = (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \cup]a, b[= \mathbb{C} - (]-\infty, a] \cup [b, +\infty[)$. Nous nous proposons de démontrer que toute fonction méromorphe f injective sur Ω vérifie l'inégalité suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < y < b$, on a

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \sqrt{|f'(x) f'(y)|}. \qquad (A_0)$$

On va prouver pour cela une inégalité un peu plus forte : soient $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tels que $a < p < q < r < s < b$; alors

$$\left| B[f(p), f(q), f(r), f(s)] \right| \leq B[p, q, r, s], \qquad (A_1)$$

où on a posé

$$B(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} : \frac{u_3 - u_4}{u_2 - u_4}.$$

Notons p', q', r', s' les images par f des points p, q, r et s. Posons $B = B[p, q, r, s]$ et $B' = B[p', q', r', s']$: il s'agit de prouver que $|B'| \leq B$. Posons $\Omega' = f(\Omega)$, $\Omega_1 = \mathbb{C} - (]-\infty, p] \cup [s, +\infty[) \subset \Omega$ et $\Omega'_1 = f(\Omega_1) \subset \Omega'$. L'application f est donc une bijection biholomorphe de Ω_1 sur Ω'_1. Maintenant, soit ℓ la distance de Poincaré entre q et r dans Ω_1 ; c'est donc aussi la distance de Poincaré de q' et r' dans Ω'_1.

Pour calculer cette distance dans Ω_1, on peut supposer, quitte à faire un changement de variable homographique, que $p = 0$, $q = 1$, $r = B$ et $s = \infty$, et $\Omega_1 = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$. Le long de l'axe réel positif, le coefficient de la métrique de Poincaré est égal à $\frac{1}{4z}$. Par conséquent, $\ell = \frac{1}{4} \log B$.

Calculons maintenant ℓ comme distance entre q' et r' dans Ω'_1. Ici encore, on peut supposer que $p' = 0$, $q' = 1$, $r' = B'$ et $s' = \infty$, et Ω'_1 est un ouvert connexe simplement connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas zéro. Dans ce cas, l'inégalité de Koebe nous dit que le coefficient de la métrique de Poincaré est au moins égal à $\frac{1}{4|z|}$. On en déduit que $\ell \geq \frac{1}{4} \log |B'|$. Comparant avec $\ell = \frac{1}{4} \log B$, il vient $|B'| \leq B$, ce qui prouve (A_1).

Pour en déduire l'inégalité (A_0), il suffit de poser $p = x$, $q = x + u$, $r = y$ et $s = y + u$, puis de faire tendre u vers 0. On obtient ainsi

$$\frac{|f(y) - f(x)| \cdot |f(y + u) - f(x + u)|}{(y - x)^2} \leq \left| \frac{f(x + u) - f(x)}{u} \right| \cdot \left| \frac{f(y + u) - f(y)}{u} \right|$$

ce qui, par passage à la limite, donne

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|^2 \leq |f'(x) f'(y)|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème. *Soit K un compact connexe de $\mathbb{C}$, plein, non réduit à un point et h sa fonction potentiel. On suppose que le rayon de capacité de K est égal à 1. Alors, en tout point de $\mathbb{C}-K$ on a*

$$\left|\frac{d(h^2)}{dz}\right| \leq \frac{h}{\operatorname{sh} h} < 1.$$

En particulier, h est hölderienne d'exposant $1/2$: pour tous $x, y \in \mathbb{C}$ on a $|h(y)-h(x)| \leq |y-x|^{1/2}$.

Preuve. Soit g un isomorphisme conforme de D sur $\overline{\mathbb{C}}-K$ tel que $g(0)=\infty$. Une représentation conforme de D sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ est donnée par $t \mapsto \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$, ainsi l'application $f : \mathbb{C}-\mathbb{R}^- \to \overline{\mathbb{C}}$ définie par

$$g(t) = f\left[\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right)^2\right]$$

est méromorphe et univalente, et donc vérifie l'inégalité (A_0). Réécrivant cette inégalité en fonction de g, on obtient :

$$\forall u, v \in\,]-1,1[\qquad \frac{(1-u)^3(1-v)^3}{16(1+u)(1+v)}\,|g'(u)g'(v)| \geq \left|\frac{g(v)-g(u)}{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2 - \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2}\right|^2.$$

En faisant tendre u vers 0, et en utilisant le fait que $g(u) \sim 1/u$ au voisinage de 0, on voit que l'inégalité se simplifie considérablement :

$$|g'(v)| \geq v^{-2} - 1.$$

Néanmoins cette inégalité n'est valable que pour les valeurs réelles de v. En remplaçant g par $t \mapsto e^{i\theta} g(te^{i\theta})$, on voit que

$$\forall v \in D \qquad |g'(v)| \geq |v|^{-2} - 1.$$

Soit z la variable dans le plan contenant le compact K, celle-ci étant reliée à v par la relation $z = g(v)$. Considérons une variation infinitésimale dz et soient dv, dh les variations correspondantes de l'uniformisante et du potentiel. L'inégalité sur $g'(v)$ donne $|dv/dz| \leq (e^{2h}-1)^{-1}$ puisque $h = -\log|v|$. D'autre part on a $dh = -d\,|v|\,/\,|v|$ donc $|dh/dv| \leq e^h$. On en déduit

$$\left|\frac{dh}{dz}\right| = \left|\frac{dh}{dv}\right| \cdot \left|\frac{dv}{dz}\right| \leq \frac{1}{e^h - e^{-h}},$$

et comme $d(h^2) = 2h\,dh$, il vient

$$\left|\frac{d(h^2)}{dz}\right| \leq \frac{2h}{e^h - e^{-h}} = \frac{h}{\operatorname{sh} h},$$

ce qu'il fallait démontrer.
Par conséquent, la fonction h^2 est lipschitzienne de rapport 1 (plus généralement de rapport $1/R$ si le rayon de capacité est R) ; si x et y sont deux points quelconques de $\mathbb{C}$, alors

$$|h(y)-h(x)| = \left|\sqrt{h^2(y)} - \sqrt{h^2(x)}\right| \leq \sqrt{|h^2(y) - h^2(x)|} \leq \sqrt{y-x}$$

en vertu de l'inégalité $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$ pour tous $\alpha, \beta \geq 0$. Ceci achève la preuve du théorème.