Automorphismes analytiques de l'ouvert d'échappement de l'application de Hénon

Thierry Bousch, avril 1994

Résumé. Soit $H = H_{a,c}$ une application de Hénon complexe, et soit Ω^+ l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ constitué des points dont les itérées positives tendent vers l'infini. Nous nous proposons de calculer le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$ des automorphismes analytiques de cette variété complexe, et en particulier le centralisateur (dans ce groupe) de l'application de Hénon.

0. Notations

Pour tout couple $(a, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on notera $H = H_{a,c}$ l'application de Hénon complexe

$$\begin{array}{cccc} H_{a,c} : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{bmatrix} \end{array}$$

On définit les ensembles invariants suivants :

$$\begin{aligned} K^\pm &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 : H^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \not\to \infty \text{ quand } n \to \pm\infty \right\}, \\ \Omega^\pm &= \mathbb{C}^2 - K^\pm. \end{aligned}$$

Les ensembles Ω^+ et Ω^- sont ouverts. Comme l'inverse d'une application de Hénon est une autre application de Hénon, on se bornera à étudier les automorphismes de Ω^+.

1. Structure de Ω^+

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème (Hubbard). *Il existe un revêtement holomorphe $G : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \mapsto \Omega^+$ à fibres dénombrables, tel que :*
(a) Si $\omega : (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \to (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$ est l'application définie par $\omega(u, v) = \big(u^2, \frac{a}{2}(v + u^3 - \frac{c}{2}u)\big)$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\omega} & (\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C} \\ \Big\downarrow G & & \Big\downarrow G \\ \Omega^+ & \xrightarrow{H_{a,c}} & \Omega^+ \end{array}$$

(b) On a $G(u, v) = G(u', v')$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\omega^n(u, v) = \omega^n(u', v')$$

(c) Le jacobien (complexe) de G en (u,v) vaut $2/u$;
(d) L'application G est de la forme $\left[\begin{smallmatrix} g\circ\omega \\ g \end{smallmatrix}\right]$, où g est une fonction holomorphe sur $(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}$ dont le développement asymptotique (pour $u\to\infty$ et $|v|\leq|u|^2$) est de la forme

$$g(u,v)=u-\frac{c}{2}u^{-1}+\Big(\frac{a}{4}+v\Big)u^{-2}-\frac{c}{2}u^{-3}$$
$$-\frac{c}{4a}(a^2-c+2)u^{-4}+\frac{1}{4}\big(2a(w+1)+c^2\big)u^{-5}+\cdots$$

La condition (b) peut être explicitée comme suit : on aura $G(u,v)=G(u',v')$ si et seulement si

(b1) Il existe des entiers n et p tels que $u'=u.e^{2i\pi p/2^n}$;

(b2) On a

$$v'-v=\Delta(u,u')=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{-\ell}\left(\Big\{u^{3.2^\ell}-\frac{c}{2}u^{2^\ell}\Big\}-\Big\{u'^{3.2^\ell}-\frac{c}{2}u'^{2^\ell}\Big\}\right)$$

Les fibres de G sont donc isomorphes à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]/\mathbb{Z}$; et comme le groupe fondamental de $(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}$ est $\mathbb{Z}$, on en déduit que le groupe fondamental de Ω^+ est $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. Plus précisément, soit γ un lacet de Ω^+ ; ce lacet se relève dans $(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}$ en un chemin Γ joignant un point (u,v) à un point (u',v') dans la même fibre par G. L'élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ défini par ω est alors la détermination de $\frac{1}{2\pi}\arg(u'/u)$ prise le long de Γ.

Nous identifierons désormais $\pi_1(\Omega^+)$ à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ par l'isomorphisme ci-dessus. En particulier, l'élément "1" est celui obtenu, par exemple, par projection du lacet de $(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}$ défini par

$$\begin{array}{rccc} \ell: & [0,1] & \longrightarrow & (\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & (2e^{2i\pi t},0) \end{array}$$

2. Action sur le groupe fondamental

Tout automorphisme a de Ω^+ induit un automorphisme $\pi_1(a)$ du groupe fondamental $\pi_1(\Omega^+)=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, de la forme

$$\begin{array}{rccc} \pi_1(a): & \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & mx \end{array}$$

où m est un élément inversible de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, donc

$$m=\pm 2^s,\qquad s\in\mathbb{Z}.$$

En particulier, pour l'application de Hénon, on a $\pi_1(H)=+2$. Donc, quitte à composer a par une certaine itérée de l'application de Hénon, on pourra supposer que $\pi_1(a)=\pm 1$.

Dans ce cas, a se relève en un automorphisme A de $(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C} \\ \big\downarrow G & & \big\downarrow G \\ \Omega^+ & \xrightarrow{a} & \Omega^+ \end{array}$$

Ce relèvement n'est pas unique ; les autres s'obtiennent en composant A par un automorphisme quelconque du fibré G.

3. Classification pour $m=\pm 1$

Ecrivons A sous la forme $A(u,v)=\big(A_1(u,v),A_2(u,v)\big)$. Pour tout $u\in\mathbb{C}-\overline{D}$, l'application $v\mapsto A_1(u,v)$ est une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}-\overline{D}$, donc constante. Par conséquent, A_1 ne dépend pas de v, et on peut écrire

$$A(u,v)=\big(h(u),A_2(u,v)\big),$$

où h est holomorphe. L'application réciproque admet, pour la même raison, une écriture analogue :

$$A^{-1}(u,v)=\big(h^*(u,v),A_2^*(u,v)\big),$$

et en composant les deux expressions, il vient

$$\forall (u,v)\in(\mathbb{C}-\overline{D})\times\mathbb{C}\qquad (u,v)=\Big(hh^*(u),A_2\big(h^*(u),A_2^*(u,v)\big)\Big).$$

Comme $h\circ h^*=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}-\overline{D}}$, l'application h est un automorphisme de $\mathbb{C}-\overline{D}$, donc de la forme

$$h(u)=\alpha u,\qquad |\alpha|=1.$$

En particulier, on constate que la situation $m=-1$ est impossible.

On constate de même que pour u fixé, les applications $v\mapsto A_2(h^*(u),v)$ et $v\mapsto A_2^*(u,v)$ sont deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ réciproques l'une de l'autre, donc des automorphismes analytiques de $\mathbb{C}$, donc des applications affines non constantes. On écrira

$$A_2(u,v)=\beta(u)v+\gamma(u),$$

la fonction $\beta:\mathbb{C}-\overline{D}\to\mathbb{C}$ ne prenant jamais la valeur zéro.

Ensuite, on doit écrire que A préserve les fibres de G, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} G(u,v)=G(u',v') &\Longrightarrow G\big[A(u,v)\big]=G\big[A(u',v')\big] \\ &\Longleftrightarrow\ G\big[\alpha u,A_2(u,v)\big]=G\big[\alpha u',A_2(u',v')\big] \end{aligned}$$

Affirmer que (u,v) et (u',v') sont dans la même fibre par G revient à dire que $(u'/u)^{2^n}=1$ pour un certain entier n, et que $v'-v=\Delta(u,u')$. Dans ce cas, on aura automatiquement $(\alpha u'/\alpha u)^{2^n}=1$, et il reste à voir si on a

$$A_2(u',v')-A_2(u,v)=\Delta(\alpha u,\alpha u').$$

Remplaçant A_2 par l'expression trouvée plus haut, et v' par $v+\Delta(u,u')$, il vient

$$[\beta(u')-\beta(u)]\,v+\beta(u')\Delta(u,u')+\gamma(u)-\gamma(u')=\Delta(\alpha u,\alpha u').$$

Cette égalité doit être vraie pour tout $v\in\mathbb{C}$, donc le coefficient de v doit être nul :

$$\beta(u)=\beta(u')$$

pour tous u, u' vérifiant les conditions fixées au départ, soit

$$\forall u\in\mathbb{C}-\overline{D},\quad \forall n,p\in\mathbb{Z}\qquad \beta(u)=\beta(u.e^{2i\pi p/2^n}).$$

Ceci impose que l'application β soit une constante (à cause du principe des zéros isolés) non nulle, que nous noterons simplement β. La condition sur A se réduit alors à

$$\beta\Delta(u,u')+\gamma(u)-\gamma(u')=\Delta(\alpha u,\alpha u').$$

On remarque que, pour u fixé, la différence $\gamma(u)-\gamma(u')$ reste bornée (puisque u' se déplace dans un compact, et que γ est holomorphe), alors que les termes en Δ peuvent devenir très grands. Plus précisément, si on prend

$$u'=u.e^{2i\pi/2^{n+1}},\qquad n\to+\infty,$$

alors on a un équivalent

$$\Delta(u,u')\sim 2(\tfrac{a}{2})^n u^{3.2^n}$$

et de même

$$\Delta(\alpha u,\alpha u')\sim 2(\tfrac{a}{2})^n(\alpha u)^{3.2^n},$$

ce qui après substitution et simplification, conduit à

$$\beta\sim\alpha^{3.2^n},\qquad n\to+\infty.$$

Or, ceci n'est possible que si $\beta=1$ et si $\alpha^{3.2^n}=1$ pour un certain entier n. L'argument de α est donc un nombre de la forme

$$\arg\alpha=\frac{k}{3}+\frac{p}{2^n},\qquad k\in\{-1,0,1\},\ p \text{ et } n \text{ entiers}$$

Quitte à choisir un autre relèvement A de a, on peut supposer que $p=0$. Ceci ne laisse plus que trois possibilités pour α : les trois racines cubiques de l'unité.

Pour $c\neq 0$, les termes suivants des développements asymptotiques de $\Delta(u,u')$ et $\Delta(\alpha u,\alpha u')$ diffèrent si α vaut j ou j^2, ce qui impose $\alpha=1$. En revanche, pour $c=0$, on a

$$\Delta(u,u')=\Delta(ju,ju')=\Delta(j^2u,j^2u')$$

donc on ne peut pas écarter les solutions $\alpha=j$ et $\alpha=j^2$.

Dans un cas comme dans l'autre, on a $\Delta(u,u')=\Delta(\alpha u,\alpha u')$, si bien que l'équation sur γ se réduit à

$$\gamma(u)=\gamma(u'),$$

ce qui entraîne, comme on a vu plus haut, que γ est constante. En résumé :

Proposition. *Soit N le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$ constitué des automorphismes dont l'action sur $\pi_1(\Omega^+)$ est l'identité. Tout élément de N admet un (unique) relèvement sur $(\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$ de la forme indiqué ci-dessous :*
(i) pour $c \neq 0$, de la forme $(u, v) \mapsto (u, v + \gamma)$, où γ est un nombre complexe quelconque ;
(ii) pour $c = 0$, de la forme $(u, v) \mapsto (\alpha u, v + \gamma)$, où γ est un nombre complexe quelconque et α une quelconque des racines cubiques de l'unité.

Corollaire. *Le groupe N est isomorphe à $\mathbb{C}$ pour $c \neq 0$ (c'est un groupe à un paramètre complexe), et à un produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour $c = 0$.*

Plus précisément, notons $(\phi_t)_{t\in\mathbb{C}}$ le groupe à un paramètre complexe des applications admettant un relèvement de la forme $(u, v) \mapsto (u, v + t)$ et — uniquement pour $c = 0$ — soit θ l'automorphisme se relevant en $(u, v) \mapsto (ju, v)$. Alors la structure de produit semi-direct est caractérisée par
$$\theta \circ \phi_t \circ \theta^{-1} = \phi_{jt}.$$

4. Structure de $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$

Comme on vient de le voir, le morphisme naturel $\pi_1 : \mathrm{Aut}(\Omega^+) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$ a pour image le sous-groupe des automorphimes "positifs" de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et son noyau est le groupe N décrit plus haut. Ce quotient admet un relèvement dans $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$, à savoir le groupe monogène $\langle H\rangle$ engendré par l'application de Hénon. Par conséquent, $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$ peut s'écrire comme un produit semi-direct
$$\mathrm{Aut}(\Omega^+) = N \rtimes \mathbb{Z}$$
Comme H admet pour relèvement $(u, v) \mapsto (u^2, \frac{a}{2}(v + u^3 - \frac{c}{2}u))$, il est facile de voir qu'on a
$$H \circ \phi_t \circ H^{-1} = \phi_{(a/2)t}$$
et (uniquement pour $c = 0$),
$$H \circ \theta \circ H^{-1} = \theta^{-1}.$$
Ceci décrit entièrement le produit semi-direct.

Théorème. *Pour $c \neq 0$, le groupe des automorphismes analytiques de Ω^+ est un produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}$ d'un groupe à un paramètre complexe $(\phi_t)_{t\in\mathbb{C}}$ par le groupe des itérées de l'application de Hénon, avec la relation*
$$H\phi_t H^{-1} = \phi_{(a/2)t}.$$
Pour $c = 0$, c'est un produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ d'un groupe à un paramètre complexe (ϕ_t), d'un groupe d'ordre trois $\{1, \theta, \theta^{-1}\}$ et du groupe des itérées de H, avec les relations
$$\theta \circ \phi_t \circ \theta^{-1} = \phi_{jt}, \quad H \circ \theta \circ H^{-1} = \theta^{-1}, \qquad H \circ \phi_t \circ H^{-1} = \phi_{(a/2)t}.$$

En particulier, on constate que les (ϕ_t) commutent avec H si et seulement si $a = 2$.

Corollaire. *Le centralisateur de H dans $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$ se réduit à $\langle H\rangle$ si $a \neq 2$. Pour $a = 2$, c'est le groupe $\langle(\phi_t)_{t\in\mathbb{C}}, H\rangle$ (c'est-à-dire le groupe tout entier sauf si $c = 0$).*

5. L'automorphisme θ

Cet automorphisme d'ordre trois de Ω^+ n'existe que si $c = 0$. Il provient en fait d'un automorphisme affine de $\mathbb{C}^2$, donné par

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} j^2 x \\ j y \end{bmatrix} \end{array}$$

En effet, cette application est manifestement d'ordre trois, et un calcul direct donne $H \circ \theta = \theta^{-1} \circ H$. On en déduit aisément que θ préserve Ω^+, donc que c'est un élément (d'ordre trois) de $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$. La contrainte $H\theta H^{-1} = \theta^{-1}$ ne laisse plus que deux possibilités (eu égard à la description de $\mathrm{Aut}(\Omega^+)$ donnée plus haut) : l'application θ peut se relever sur $(\mathbb{C} - \overline{D}) \times \mathbb{C}$ en

$$\theta_1 : (u, v) \mapsto (ju, v) \quad \text{ou bien} \quad \theta_2 : (u, v) \mapsto (j^2 u, v).$$

et la deuxième possibilité doit être écartée à cause de l'estimation

$$G(u, 0) = \begin{bmatrix} u^2 + o(u^2) \\ u + o(u) \end{bmatrix} \qquad \text{pour } u \text{ grand.}$$