# TD1 – Fonctions de plusieurs variables

**Exercice 1** (Révisions)

1. [**Prop. 1.1.3** & **Exemple 1.1.9** du poly]

   Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g$ pour :

   (1) $g(x) = \cos f(x^2)$,
   (2) $g(x) = \cos\big(f(x)^2\big)$,
   (3) $g(x) = \cos\big(f(x^2)^2\big)$,
   (4) $g(x) = f(x^2 \sin x)^2$,
   (5) $g(x) = \ln\big(2 + \sin f(x)\big)$,
   (6) $g(x) = \sqrt{1 + e^{f(x^2)}}$,
   (7) $g(x) = \arctan f(e^x)$,
   (8) $g(x) = f\big(e^x \sin f(x^2)\big)$.

2. [**Prop. 1.1.5**, **Prop. 1.1.6** & **Exemple 1.1.13** du poly]

   Calculer le développement limité d'ordre 2 de la fonction $f$ au point indiqué $a$, en déduire l'équation de la tangente au graphe de $f$ à l'abscisse $a$ et les positions relatives du graphe et de la tangente.

   (1) $f(x) = \dfrac{2+x}{3+x}$, $a = -1$,
   (2) $f(x) = \sin x - \cos 2x$, $a = 0$,
   (3) $f(x) = \ln \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$,
   (4) $f(x) = x + \sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}$, $a = 1$.

3. [**Prop. 1.1.4**, **Prop. 1.1.5**, & **Application B page 14** du poly]

   Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

   (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$
   (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2}$,
   (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$,
   (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$,
   (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$,
   (6) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \sin 3x}{(\cos x)^3}$,
   (7) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$,
   (8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(2x)}{\ln\cos x}$.

**Exercice 2** [**Exemples 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5** du poly]

Etudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite en l'origine pour les fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{llll}
(1) & f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}, & (5) & f(x,y) = \dfrac{\sin^3 x}{\sin^2 x + y^2\cos^2 x}, \\
(2) & f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}, & (6) & f(x,y,z) = \dfrac{x^3y^3z^2}{x^6+y^8+z^{10}}, \\
(3) & f(x,y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & (7) & f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, \\
(4) & f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2+x^3}{x^2+y^2}, & (8) & f(x,y,z) = \dfrac{x^3y^2z^2}{x^6+y^8+z^{10}}.
\end{array}
$$

**Exercice 3** [**Déf. 1.3.1** & **Exemple 1.3.2** du poly]

Calculer les dérivés partielles (là où elles sont définies) des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$,
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$,
3. $f(x,y) = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y + 1}$,
4. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,
5. $f(x,y) = \sin(x + \cos y)$.

**Exercice 4** [**Prop. 1.3.2** & **Exemple 1.3.3** du poly]

Pour chacune des fonctions $f_j$ suivantes, donner le développement limité du premier ordre et écrire l'équation du plan tangent à son graphe en point indiqué :

$$
\begin{array}{lr}
f_1(x,y) = \sin\big(2x + \sin(x+2y)\big) & \text{en } (0,0), \\
f_2(x,y) = \sin(x-y) + \cos(x + \sin y) & \text{en } (\pi/4, \pi/4), \\
f_3(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y) & \text{en } (\pi/2, \pi/2), \\
f_4(x,y) = \ln\big(e^{x+y} + x\cos y)\big) & \text{en } (0,0).
\end{array}
$$

**Exercice 5** [**Prop. 1.3.3**, **Exemple 1.3.8**, **Prop. 1.3.4**, **Exemple 1.3.9-10** du poly]

Soit $f$ une fonction de classe $C^2$. Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1. $u(x,y) = f(x^2+y^2)$,
2. $u(x,y) = f(x^2y^2)$,
3. $u(x,y) = f(x, x/y)$,
4. $u(x,y) = f(xy, x+y)$,
5. $u(x,y) = f(xy, xy)$,
6. $u(x,y) = f(x+y, x^2+y^2)$.

**Exercice 6** [**Prop. 1.4.7**, **Exemples 1.4.2-3** du poly]

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes. Pour chaque point critique vérifier si il s'agit d'un extremum local ou d'un point-selle.

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3, \quad f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \quad f_3(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2),$$

$$f_4(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6, \quad f_5(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},$$

$$f_6(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2, \quad f_7(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2, \quad f_8(x,y) = xy^2 + x^2 - y^2 - x.$$

**Exercice 7** [**Théorème 1.5.3** & **Exemple 1.5.5** du poly]

Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants. Dans le cas où le rotationnel d'un champs est nul, examiner si ce champs s'écrit comme gradient d'une fonction et trouver une telle fonction.

$$\vec{V}_1 = (x - y^2, y + x^2), \quad \vec{V}_2 = (x^2 + y^2, xy), \quad \vec{V}_3 = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4),$$

$$\vec{V}_4 = (yz, xy + z^2, x^2 - yz), \quad \vec{V}_5 = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

---

## EXERCICES BONUS

**Exercice 8**

1. Etudier les limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

pour $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. On considère la fonction

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que $g$ est continue en l'origine.

   (b) Etudier les limites $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$ et $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)$.

**Exercice 9** Pour les applications suivantes, étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$
$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^2+(y-x)^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$
$$f_4(x,y) = x^2|y|.$$

**Exercice 10** [**Exemple 1.3.11** du poly]

— Soit $u = u(x,y)$ une fonction de classe $C^2$. Reécrire les expressions suivantes en utilisant la fonction $f(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ :

$$(1)\ x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)\ \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2,$$
$$(4)\ \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5)\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

— Soit $u$ une fonction de classe $C^2$ vérifiant l'équation de Laplace $\Delta u = 0$. Montrer que la fonction

$$v(x,y) = u\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Big)$$

est aussi une solution de la même équation.

**Exercice 11** 1. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$. On définit la fonction $u$ sur $\mathbb{R}^n$ par $u = f \circ r$, où $r(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

(a) Montrer que $\Delta u = F \circ r$ avec une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ et exprimer $F$ en fonction de $f$. Rappel : $\Delta$ est le laplacien,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\Delta u = 0$ si et seulement si $r \mapsto r^{n-1}f'(r)$ est une fonction constante. Trouver toutes les fonctions $f$ vérifiant cette condition.

2. Calculer la divergence et le rotationnel pour les champs de vecteurs

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad G(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}.$$