EDP : APPROCHE MATHÉMATIQUE

STEPHANE NONNENMACHER

Table des matières

1. Introduction

L'objectif est de résoudre explicitement certaines EDP linéaires sur $\mathbb{R}^d$. Par exemple :

(1) Equation de Dirichlet :

$$-\Delta u(x) = \rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(2) L'équation des ondes sur $\mathbb{R}^{1+d}$, équation d'évolution, dont le problème aux données initiales (problème de Cauchy) s'écrit :

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1\,.$$

(3) L'équation de la chaleur :

$$(\partial_t - \Delta)\, u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0) = u_0$$

(4) L'équation de Schrödinger (sans potentiel) :

$$(i\partial_t + \Delta)\, u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$
$$u(0) = u_0.$$

Date: 4 février 2025.

Les trois dernières équations sont des équations d'évolution (elles décrivent une évolution temporelle). Elles peuvent toute 3 s'écrire sous la forme

$$Pu(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

où P est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^{1+d}$, à coefficients constants, avec en plus une "donnée initiale" (soit seulement u_0,soit u_0 et u_1) . La première équation (Dirichlet) n'est une équation d'évolution, mais elle prend aussi la forme

$$Pu(x) = S(x),$$

avec P un opérateur différentiel en x (ici, le laplacien) et $S(x)$ une fonction source.

On peut mettre les deux dernières équations (chaleur et Schrödinger) sous la forme

$$\begin{aligned} (\partial_t + A)u &= 0, \quad t > 0 \\ u(t=0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où A est un opérateur agissant sur la variable x (ici A est un multiple du laplacien). Cette équation est typique d'une équation d'évolution. L'équation des ondes (qui est du second ordre en temps) peut en fait également s'écrire de cette façon, en remplaçant $u(t,x)$ par une fonction $U(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (fonction vectorielle).

On n'a volontairement pas donné d'hypothèse de régularité ou de support compact sur les fonctions impliquées. Même si les données initiales sont très régulières (C^∞), il n'est pas toujours évident de résoudre ces équations explicitement, et les solutions ne restent pas forcémemnt aussi régulières. On peut utiliser plusieurs stratégies pour résoudre ces équations, valides pour des données initiales possiblement peu régulières :

— Utiliser une **solution fondamentale** de l'équation, c'est-à-dire une "fonction" $E(t,x)$ sur $\mathbb{R}^{1+d}$, ayant des propriétés de support définies (en général on demande que $E(t,x) = 0$ si $t < 0$), qui satisfait l'équation

$$PE = \delta_{(0,0)},$$

où $\delta_{(0,0)}$ est la **distribution de Dirac** au point $(t=0, x=0)$ d'origine dans l'espace-temps $\mathbb{R}^{1+d}$. Pour l'équation de Dirichlet, on résoudra $PE = \delta_0$, où E ne dépend que de x. Une fois connue cette solution fondamentale, on peut résoudre l'équation inhomogène

$$Pu(t,x) = S(t,x), \quad \text{resp. } Pu(x) = S(x)$$

(la fonction S est interprétée comme une "source") en prenant la *convolution spatio(-temporelle)*

$$u = E * S.$$

Dans le cas d'une équation d'évolution avec $P = \partial_t + A$, une source de la forme $S(t,x) = \delta_0(t)u_0(x)$, obtenue par convolution spatiale de $\delta_{(0,0)}$ par $u_0(x)$, nous permet de résoudre le problème homogène avec condition initiale (1.1).

— Utiliser le fait que l'opérateur A (par ex. le laplacien) est invariant par translation. Si on note τ_{x_0} l'opérateur de translation par le vecteur x_0 : $[\tau_{x_0}u](x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x-x_0)$, alors l'invariance de l'opérateur A par translation de x_0 est l'identité :

$$\tau_{x_0}(Au) = A(\tau_{x_0} u).$$

Cette invariance implique que l'opérateur A est, en quelque sorte, diagonalisé par la *transformée de Fourier* sur $\mathbb{R}^d$. Plutôt que de résoudre l'équation (1.1), on va écrire l'équation satisfaite par la transformée de Fourier spatiale de $u(t,x)$, c'est-à-dire la fonction

$$\hat{u}(t,\xi) = [\mathcal{F}u](t,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} u(t,x)\, dx.$$

Ici la coordonnée $\xi \in \mathbb{R}^d$ est appelée le paramètre de Fourier, ou le vecteur d'onde, c'est la coordonnée duale de la coordonnée de position x. L'équation satisfaite par $\hat{u}$ sera de la forme

$$(\partial_t + a(\xi))\hat{u}(t,\xi) = 0,$$

avec $a(\xi)$ une fonction sur $\xi \in \mathbb{R}^d$, appelée le *symbole* de l'opérateur A. L'équation cidessus est beaucoup plus simple à résoudre que (1.1), les différentes valeurs de ξ étant découplées : on obtient une famille d'EDOs paramétrées par ξ.

Pour ces deux méthodes, les solutions présentées schématiquement sont pour l'instant formelles. L :'analyse doit nous fournir les classes de données initiales u_0 pour lesquelles l'une ou l'autre méthode peut effectivement être appliquée. On rentre alors dans la sphère de l'analyse fonctionnelle, l'étude des espaces de fonctions ayant des propriétés précises de régularité ou de (dé)croissance à l'infini.

2. DISTRIBUTIONS : DES SUITES DE FONCTIONS AUX FORMES LINÉAIRES

On se place sur $\mathbb{R}$ ($d = 1$), et on cherche à définir proprement la “fonction de Dirac” $\delta(x)$. Quelles sont les propriétés de cette “fonction” ?

— $\delta(x) = 0$ pour tout point $x \neq 0$.
— $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$.

Il est clair que cette “fonction” ne peut pas réellement en être une au sens des fonctions $L^1(\mathbb{R}, dx)$. En effet, le point $\{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, donc même si on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

qui serait le candidat naturel, celle-ci vérifie $\int f_0(x)\, dx = 0$.

Une façon de définir $\delta(x)$ est par un processus de limite : on considère une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ supportée sur $[-1, 1[$ et telle que $\int_{-1}^{1} \chi(x)\, dx = 1$, puis on prend ses dilatations

$$\chi_n(x) = n\chi(nx), \qquad n \geq 1.$$

Lorsque $n \to \infty$, les supports de χ_n sont des voisinages de plus en plus petits de 0, tandis que ces fonctions vérifient toujours la normalisation $\int \chi_n(x)\, dx = 1$. La suite (χ_n) converge ponctuellement vers la fonction f_0 ci-dessus, mais elle ne converge pas vers f au sens de $L^1(\mathbb{R})$, puisque $\int f_0 dx \neq \lim_n \int \chi_n dx$.

Pour caractériser le fait que $\int \chi_n dx = 1$, et que le support de χ_n est de plus en plus étroit autour de 0, on considère n'importe quelle fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$, et on montre que :

Lemme 1. *Soit une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Alors $\lim_{n\to\infty} \int \chi_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$.*

Démonstration. A faire. □

Cette propriété permet donc de définir la “fonction” delta de Dirac : c'est celle qui, lorsqu'on l'intègre multipliée par une fonction continue φ, donne $\varphi(0)$. Cette “fonction” delta est donc définie par son action sur les fonctions continues, avec une valeur dans $\mathbb{C}$. Il est clair que cette action $\varphi \mapsto \varphi(0)$ est linéaire par rapport à φ : on dit que c'est une forme linéaire sur l'espace fonctionnel $C(\mathbb{R})$.

Définition 2. La “fonction delta” est définie comme la forme linéaire $\varphi \in C(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0)$. On notera cette forme linéaire δ_0, et son action sera notée avec des crochets :

$$\varphi \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

On appellera δ_0 la distribution de Dirac en 0.

On peut de même considérer, pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, distribution de Dirac en x_0, notée δ_{x_0}, qui agit sur les fonctions continues par $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$.

Lorsqu'on applique la forme linéaire δ_0 à une fonction φ, ne dépend pas du comportement de φ en-dehors du point 0. Si on considère une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$ dont le support $\operatorname{supp} \varphi$ ne contient pas x_0, alors $\langle \delta_0, \varphi \rangle = 0$. On dira que le support de la distribution δ_0 est réduite au point x_0, et on notera $\mathrm{supp}(\delta_0) = \{0\}$. En particulier, on dira que δ_0 est une distribution à support compact.

Une autre propriété de la distribution δ_0 est sa positivité : pour toute fonction φ positive, on vérifie que $\langle \delta_0, \varphi \rangle \geq 0$.

2.1. **Mesures de Radon sur $\mathbb{R}$.** La distribution δ_0 est parfois appelée “mesure de Dirac en 0”. En effet, si on considère la mesure μ_0 borélienne définie par les propriétés

$$\mu_0(\{0\}) = 1, \quad \mu_0(\mathbb{R}^*) = 0,$$

on voit tout de suite que pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$, on peut intégrer cette fonction sur la mesure μ_0, et on a :

$$\int \varphi \, d\mu_0 = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

La distribution de Dirac δ_0 peut donc être assimilée à une mesure borélienne particulière sur $\mathbb{R}$, la mesure de Dirac μ_0.

Pourquoi utiliser deux terminologies différentes ? Parce qu'on va vouloir appliquer sur la distribution δ_0 des opérations qu'on ne peut pas pas appliquer aux mesures.

2.1.1. *Rappels sur les mesures de Radon et les mesures signées.* Une mesure borélienne μ est une application allant de l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, vers $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \infty$, satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont des boréliens deux à deux disjoints, alors
$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}).$$
La mesure $\mu(A)$ peut être interprétée comme la masse de A. La mesure μ représente donc une distribution de masse sur la droite réelle.

Les boréliens forment une classe des parties de $\mathbb{R}$, qui contient les ouverts, les fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, les unions dénombrables de fermés, et ainsi de suite. Cette classe contient tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ construits à partir des intervalles, obtenus par une succession d'unions et d'intersections dénombrables. Les sous-ensembles non-boréliens sont compliqués à construire, et peuvent être vus comme “pathologiques”.

Définition 3. Une mesure μ est dite finie si $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

Une mesure μ est dite localement finie si, pour tout compact $K \Subset \mathbb{R}$, $\mu(K) < \infty$. De façon équivalente, si pour tout $n \geq 0$, $\mu([-n, n]) < \infty$. Les mesures localement finies sont appelées mesures de Radon.

Pour une mesure μ, on peut considérer $U \subset \mathbb{R}$ le plus grand ouvert tel que $\mu(U) = 0$. Il suffit de prendre l'union de tous les ouverts de mesure nulle. Alors le complémentaire de U définit le support de μ.

A partir d'une mesure de Radon μ, on peut intégrer toute fonction μ-intégrable, en particulier toute fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Pour cela, on approxime f par des fonctions étagées $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{I(n)} \alpha_{i,n} \mathbb{1}_{A_{i,n}}(x)$, et on calcule

$$\int \varphi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{I(n)} \alpha_{i,n} \mu(A_{i,n}).$$

On montre ensuite que les intégrales $\int \varphi_n \, d\mu$ admettent une limite lorsque $n \to \infty$, qu'on note $\mu(f) = \int \varphi \, d\mu \in \mathbb{R}$. Cette intégration est une opération linéaire sur $C_c(\mathbb{R})$: pour $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on vérifie que

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Ceci montre l'intégration sur la mesure μ agit comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel $C_c(\mathbb{R})$. Cette forme linéaire est positive : pour toute fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ à valeurs positives, $\mu(f) \geq 0$. Enfin cette forme linéaire satisfait la borne suivante :

(2.1)

si $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ est supportée dans $[-a, a]$,alors $\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leq \int |\varphi| \, d\mu = \int_{[-a,a]} |\varphi| \, d\mu \leq \sup |\varphi| \, \mu([-a, a]).$

On a donc une borne supérieure sur $\mu(\varphi)$ en fonction de la valeur maximale de f, et de la taille de son support. Du fait de cette borne supérieure, on dit que la forme linéaire $\mu(\cdot)$ est *continue* (par rapport à la topologie de l'espace $C_c(\mathbb{R})$, qu'on ne cherchera pas à définir proprement).

Quelles sont les opérations possibles sur les mesures localement finies :

(1) on peut additionner les mesures de Radon pour former des mesures de Radon, et les multiplier par des nombres positifs. On obtient encore des mesures de Radon. Pour μ, ν deux mesures de Radon et $\alpha, \beta \geq 0$, la mesure de Radon $(\alpha\mu + \beta\nu)$ est définie par

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(A) = \alpha\mu(A) + \beta\mu(A).$$

(2) On peut aussi prendre des combinaisons de deux mesures de Radon avec des coefficients réels (ou complexes), pour obtenir des *mesures signées* (ou des *mesures complexes*). Pour deux mesures localement finies μ, ν et deux nombres complexees α, β, la mesure complexe $\alpha\mu+\beta\nu$ ne peut a priori s'appliquer qu'aux boréliens *bornés* $A \Subset \mathbb{R}$, et prennent la valeur

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(A) = \alpha\mu(A) + \beta\mu(A).$$

La nécessité de prendre A borné vient du fait qu'on exige que $\mu(A)$ et $\nu(A)$ soient finis, de façon à ce qu'on puisse les soustraire l'un à l'autre si α, β sont de signes différents. L'espace des mesures signées (ou complexes) forme alors un espace vectoriel réel (ou complexe). Toute fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ est intégrable par rapport à μ, ν, et son intégrale par rapport à la mesure signée $(\alpha\mu + \beta\nu)$ est obtenue par linéarité :

$$\int \varphi \, d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int \varphi \, d\mu + \beta \int \varphi \, d\nu.$$

(3) On peut multiplier une mesure de Radon μ par une fonction borélienne positive f, on obtient alors une mesure (positive) $f\mu$, définie par :

$$\forall A \subset \mathbb{R} \text{ borélien}, \qquad f\mu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Si la fonction f est intégrable par rapport à μ (ce qu'on note $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$), alors la mesure $f\mu$ est finie. Plus généralement, si la fonction f est localement intégrable (ce qu'on note $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$), autrement dit si pour tout borélien borné $A \Subset \mathbb{R}$ on a $\int_A f\, d\mu < \infty$, alors $f\mu$ est une mesure de Radon. On dit que la mesure $f\mu$ est une modulation (par la fonction f) de la mesure μ.

(4) Si f est localement intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $f\mu$ sera une mesure de Radon signée (ou complexe). La mesure de Radon $f\mu$ agit sur les fonctions test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi \mapsto \int \varphi\, f\, d\mu,$$

qui est bien définie puisque $\varphi f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}, \mu)$ comme produit d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$ et d'une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

On a vu plus haut que μ agit comme une forme linéaire continue positive sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$.

Le théorème de Riesz-Markov nous dit que les mesures de Radon sont équivalentes aux formes linéaires continues positives sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$. Il s'étend aux mesures signée : chaque mesure de Radon signée est une forme linéaire continue sur $C_c(\mathbb{R})$, et vice-versa. Cela signifie que connaître les valeurs de $\int \varphi\, d\mu$ pour toutes les fonctions $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ permet de reconstruire entièrement la mesure signée μ, c'est-à-dire calculer toutes les valeurs $\mu(A)$ pour $A \Subset \mathbb{R}$ borélien. Les fonctions φ sont appelées "fonctions test", parce qu'on se sert d'elles pour "tester" la mesure μ.

Voir une mesure μ de Radon comme une forme linéaire sur l'espace des fonctions tests, ce n'est pas la définition originale d'une mesure, mais c'est un point de vue très utile.

Comme on le verra plus loin, les mesures de Radon fournissent une sous-classe de distributions.

2.1.2. *Modulations de la mesure de Lebesgue.* On se restreint maintenant au cas de la mesure de Lebesgue dx, qui est une mesure de Radon, et à ses modulations fdx pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$.

Ci-dessus on a cherché à approcher la mesure de Dirac par une suite de fonctions $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Chacune de ces fonctions χ_n engendre une mesure $\chi_n dx$ sur $\mathbb{R}$. On note cette forme linéaires sur $C_c(\mathbb{R})$ par le crochet $\langle \chi_n dx, \varphi \rangle$. La propriété énoncée dans le Lemme~1 peut donc se réécrire :

$$\forall \varphi \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \chi_n dx, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \tag{2.2}$$

Ce type de convergence des formes linéaires χ_n vers la forme linéaire δ_0 est appelée *convergence simple* (on a convergence pour chaque fonction test φ). C'est une convergence plus faible que la convergence uniforme, ou au sens L^1. On l'appelle aussi la convergence faible-étoile sur l'espace des mesures de Radon [1].

1. Plus précisément, la convergence au sens des mesures de Radon est la convergence simple pour chaque fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

On a vu ci-dessus qu'à partir de toute fonction localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$, on produit la mesure de Radon $f\,dx$, qui peut être vue comme une forme linéaire sur les fonctions test dans $C_c(\mathbb{R})$. On peut donc, là aussi, écrire l'intégrale comme un crochet (forme linéaire) :

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}), \qquad \int \varphi(x)\, f(x)\, dx = \langle f dx, \varphi \rangle.$$

Si la fonction f n'est pas à support compact, il est important que les fonctions test soient elles-mêmes à support compact, pour qu'on soit sûr que l'intégrale ci-dessus a un sens. Par contre, si f est à support compact, l'intégrale aura un sens pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Remarque 4. On se souvient qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est en fait une classe d'équivalence de fonctions intégrables, égales deux à deux presque partout (p.p.). Que se passe-t-il si on choisit un autre représentant $\tilde{f}$ dans la même classe d'équivalence $[f]$? La définition de l'intégrale de Lebesgue implique que

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}), \quad \int \varphi\, \tilde{f}\, dx = \int \varphi\, f\, dx,$$

autrement dit la mesure $f dx$ est bien définie par la classe d'équivalence $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On verra plus bas que si $[f]$ est non triviale, alors la forme linéaire est non nulle.

Support compact vs non-compact. On observe ici une propriété récurrente des objets (fonctions, mesures) pouvant s'interpréter comme des formes linéaires sur un espace de fonctions test : si l'objet n'est pas à support compact, et qu'on ne fait pas d'hypothèse sur son "comportement à grand x", on ne pourra l'appliquer qu'à des fonctions à support compact. Par contre, si l'objet est lui-même à support compact, alors on pourra l'appliquer à des fonctions test sans hypothèses de support. On considèrera donc deux classes distinctes de distributions :

(1) les distributions à support compact, agissant sur des fonctions test sans condition de support.
(2) les distributions sans conditions de support, agissant sur les fonctions test à support compact.

Néanmoins, comme on le verra plus loin, les distributions de second type (plus général) peuvent être approchées par une famille de distributions à support compact. Montrons-le dans le cas des mesures modulées $f\,dx$, avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ qui n'est, a priori, pas à support compact. Commençons par approcher f par des fonctions continues à supports compacts.

Proposition 5. *(v. Exo 1.2) Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\|f - f_n\|_{L^1} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.$$

Démonstration. La théorie des fonctions L^1 nous apprend qu'on peut approcher f par des fonctions continues à supports compacts g_M supportées dans $[-M, M]$:

$$\|f - g_M\|_{L^1} \stackrel{M\to\infty}{\to} 0.$$

Fixons un petit $\epsilon > 0$. Il existe donc un $M = M(\epsilon)$ tel que

$$\|f - g_M\|_{L^1} \leq \epsilon. \tag{2.3}$$

Ensuite, on se sert des fonctions χ_n définies ci-dessus (approximations de δ_0) pour régulariser la fonction g_M par convolution :

$$g_M * \chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int g_M(x-y)\,\chi_n(y)\,dy = \int g_M(y)\,\chi_n(x-y)\,dy.$$

La seconde égalité est obtenue par le changement de variable $z = x - y$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour montrer que $g_M * \chi_n$ dépend de façon C^∞ de x, puisque c'est le cas de χ_n. On vérifie aussi que pour tout n, $g_M * \chi_n$ est supporté dans $[-M-1, M+1]$.

Comme $g_M \in C_c(\mathbb{R})$, elle est uniformément continue. Toujours pour le même $\epsilon > 0$, il existe $n = n(\epsilon) \geq 1$ tel que,

$$\forall x, y \in]\mathbb{R},\ |y| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow |g_M(x-y) - g_M(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

En insérant cette inégalité dans l'intégrale définissant $g_M * \chi_n(x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |g_M * \chi_n(x) - g_M(x)| \stackrel{\text{def}}{=} \int |g_M(x-y) - g_M(x)|\ \chi_n(y)\,dy \leq \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

Ceci montre la convergence uniforme de $g_M * \chi_n$ vers g_M. Comme ces deux fonctions sont supportées sur $[-M+1, M+1]$, en intégrant cette inégalité on trouve

$$\|g_M * \chi_n - g_M\|_{L^1} \leq \epsilon,$$

En additionnant cette inégalité avec (2.3), on trouve donc, par inégalité triangulaire :

$$\|g_M * \chi_{n_\epsilon} - f\|_{L^1} \leq 2\epsilon.$$

On est donc parvenu à approcher f à 2ϵ près pour la norme L^1, par une fonction $g_M * \chi_{n_\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. □

On montre ensuite facilement que cette convergence $f_n \to f$ au sens L^1 implique que les mesures de Radon $f_n dx$ approchent également la mesure $f dx$ au sens de la convergence faible-étoile.

Proposition 6. *Si une suite $(f_n \in L^1(\mathbb{R}))_{n\geq 1}$ converge au sens L^1 vers $f \in L^1$ lorsque $n \to \infty$, alors pour toute fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, on a la convergence*

$$\langle f_n, \varphi\rangle \stackrel{n\to\infty}{\to} \langle f, \varphi\rangle.$$

Autrement dit, les mesures de Radon signées $f_n dx$ convergent vers la mesure signée $f\,dx$ au sens de la convergence faible-étoile. La convergence au sens L^1 est donc plus forte que la convergence faible-étoile.

Démonstration. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, la fonction est bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}|\langle f_n, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| &= \left|\int (f_n - f)\,\varphi\,dx\right| \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^1} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

□

Un autre corollaire à la Proposition 5 :

Corollaire 7. *Supposons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ n'est pas la classe nulle. Alors la mesure de Radon $\mu_f = f dx$ n'est pas la mesure nulle. En conséquence, l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \mapsto f\,dx$ est injective.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que $f \in L^1_{loc}$ n'est pas nulle, mais que la mesure $f\,dx$ est nulle.

Si $[f]$ n'est pas nulle dans L^1_{loc}, on peut choisir une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $[\psi f]$ n'est pas non plus nulle dans $L^1_{comp}(\mathbb{R})$. En utilisant les approximations χ_n de δ_0, on considère les approximations $(\psi f) * \chi_n$ de ψf. D'après la preuve de Prop. 5, on a $(\psi f) * \chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \psi f$. Mais on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\psi f) * \chi_n(x) = \int \psi(y) f(y) \chi_n(x-y)\,dy = \langle \mu_f, \psi(\cdot)\chi_n(x-\cdot)\rangle,$$

où dans le membre de droite on utilise le fait que la fonction $\psi(\cdot)\chi_n(x-\cdot)$ est dans $C_c(\mathbb{R})$. Si la mesure μ_f est nulle, l'expression ci-dessus doit donc être nulle, donc $(\psi f) * \chi_n$ est la fonction nulle (en tout point, c'est une fonction continue). La convergence $(\psi f) * \chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \psi f$ implique donc que ψf doit être nulle dans L^1, ce qui contredit notre hypothèse. $\square$

2.2. **Prendre la dérivée d'une mesure : des mesures aux distributions.** On a rencontré deux exemples de suites $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers une limite au sens de la convergence simple des formes linéaires agissant sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$ (convergence faible-étoile). Dans les deux cas, la limite est donnée par une mesure de Radon (en général complexe) sur $\mathbb{R}$:

— dans le premier cas, il s'agit de la mesure de Dirac en un point $x_0 \in \mathbb{R}$;
— dans le second cas, il s'agit de la mesure $f\,dx$ associée à une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.

On verra plus loin que toute mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ peut être obtenue ainsi, comme limite faible-étoile d'une suite de fonctions C^∞.

2.2.1. *Dériver la distribution de Dirac.* Cependant, notre objectif initial est de résoudre des équations aux dérivées partielles (en 1d, des équations différentielles ordinaires). On a dont besoin de manipuler des objets qu'on peut dériver ! Or, la théorie de Lebesgue ne permet pas de dériver une mesure. C'est dans ce but qu'a été introduite la notion de distribution : un objet aussi (voire plus) singulier qu'une mesure, mais sur lequel on peut agir par l'opération de dérivation !

Revenons à l'approximation de la mesure de Dirac δ_0 par les fonctions $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme ces fonctions sont dérivables, on peut donc considérer la suite des fonctions dérivées $(\chi_n')_{n\geq 1}$, qui sont également dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Chaque fonction χ_n' définit donc aussi une forme linéaire sur $C_c(\mathbb{R})$. On se pose alors la question suivante :

Pour une fonction test arbitraire $\varphi \in C(\mathbb{R})$, la suite des valeurs $\big(\langle \chi_n', \varphi\rangle = \int \chi_n'\,\varphi\,dx\big)_{n\geq 1}$ a-t-elle une limite ?

En général NON. Mais si on suppose que la fonction test est dans $C^1(\mathbb{R})$, une simple intégration par parties montre que c'est le cas :

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\langle \chi_n, \varphi'\rangle \overset{n\to\infty}{\to} -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

En restreignant ainsi l'espace des fonctions test aux fonctions $C^1(\mathbb{R})$, on peut donc définir comme limite de la suite $(\chi_n')_{n\geq 1}$ la fonction sur l'espace $C^1(\mathbb{R})$ (pour éviter de parler d'une "fonction sur l'espace des fonctions", on parle alors plutôt de "fonctionnelle") définie par :

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \mapsto -\varphi'(0) \in \mathbb{C}$$

On vérifie aisément que cette fonctionnelle est une *forme linéaire* sur l'espace de fonctions tests $C^1(\mathbb{R})$, on la notera δ_0'. En reprenant la convergence $\chi_n \to \delta_0$ de l'équation (2.2), on peut donc écrire :

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \chi_n', \varphi\rangle = -\varphi'(0) \overset{\text{def}}{=} \langle \delta_0', \varphi\rangle.$$

On interprètera cette nouvelle forme linéaire δ_0' comme la dérivée par rapport à x de la forme linéaire δ_0. On s'autorisera à noter :

$$\delta_0' = \frac{d}{dx}\delta_0. \tag{2.4}$$

Question. *Cette forme linéaire δ_0' est-elle une mesure de Radon ?*

Nous avions noté que la distribution/mesure δ_0 était de support réduit au point $\{0\}$. La distribution δ_0' est également de support réduit à ce point $\{0\}$. En effet, pour toute fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ dont le support [2] ne contient pas 0, ce qui implique qu'il existe une intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ sur lequel φ s'annule, alors on vérifie aisément que pour n assez grand, $\langle \chi_n', \varphi\rangle = 0$, de sorte que $\langle \delta_0', \varphi\rangle = 0$. Or les seules mesures de Radon supportées sur le singleton $\{0\}$ sont les multiples complexes de δ_0. En prenant la fonction test $\varphi(x) = x$, on trouve $\langle \delta_0', \varphi\rangle = -1$, tandis que $\langle \delta_0, \varphi\rangle = 0$. La distribution δ_0' ne peut donc pas être de la forme $\alpha\delta_0$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$. On aboutit donc à l'affirmation suivante :

Affirmation 8. La forme linéaire δ_0' définie ci-dessus n'est pas une mesure de Radon. Il s'agit d'un objet plus singulier, qu'on appellera une *distribution d'ordre 1*. L'identité (2.4) n'est donc pas une dérivée usuelle, mais est à interpréter *au sens des distributions*.

Remarque. Une autre façon de comprendre pourquoi δ_0' n'est pas une mesure est le fait que les fonctions χ_n' ne sont pas positives, elles ont forcément des grandes valeurs positives et négatives. Par construction, $\int \chi_n' dx = 0$, donc les χ_n' n'ont pas de "poids" au sens des mesures. En fait, en électrostatique les fonctions χ_n' représentent la distribution de charge d'un dipôle électrique, une charge positive et une charge négative de même charge absolue, très proches l'une de l'autre. La distribution δ_0' est donc une idéalisation mathématique d'un tel dipôle.

2.2.2. *Dérivée d'une mesure de Radon.* Au-delà de la mesure de Dirac, on peut considérer la mesure de la forme $f\,dx$, pour f une fonction dans $L^1_{comp}(\mathbb{R})$ (positive ou réelle ou complexe). Une telle mesure définit une forme linéaire sur l'espace $C(\mathbb{R})$. Plus haut on a noté l'action de

2. Rappelons que le support d'une fonction continue est la *fermeture* de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$.

cette forme linéaire $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$. On utilisera aussi la forme T_f pour spécifier qu'on considère f comme une forme linéaire (une distribution), plutôt que comme une fonction. Comme dans le cas de la mesure de Dirac, on peut alors définir, sur l'espace $C^1(\mathbb{R})$, la dérivée de cette distribution par une intégration par :

$$\langle T'_f, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Dans le cas où la fonction f est elle-même dans $C^1_c(\mathbb{R})$, on a le droit d'appliquer l'intégration par parties, qui nous donne

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \int f'(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

autrement dit $T'_f = T_{f'}$, la forme linéaire associée à la mesure de Radon $f'(x)\, dx$. Mais lorsque f n'est pas dérivable au sens usuel, on ne peut pas considérer la fonction f', mais on a le droit de considérer la distribution T'_f. Celle-ci n'est pas une mesure, elle ne peut agir que sur les fonctions C^1 : c'est une distribution d'ordre 1.

Comme pour la mesure de Dirac, on dit que T'_f est la dérivée de T_f (ou de f) *au sens des distributions.*

2.2.3. *Dérivées d'ordre supérieur d'une distribution (à support compact).* Si on souhaite appliquer une seconde dérivée à δ_0 en suivant la même stratégie (approximer δ_0 par χ_n, puis utiliser 2 intégrations par parties pour pouvoir prendre la limite $n \to \infty$), il va falloir se restreindre aux fonctions test $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ pour que la suite $\langle \chi''_n, \varphi \rangle$ admette une limite. Une double intégration par parties permet alors de définir la forme linéaire sur $C^2(\mathbb{R})$:

$$\varphi \in C^2 \mapsto \langle \delta''_0, \varphi \rangle = (-1)^2 \varphi''(0) = \varphi''(0),$$

et on dira que cette forme linéaire est la dérivée seconde de la distribution δ_0, $\delta''_0 = \frac{d^2}{dx^2}\delta_0$, cette identité étant à comprendre *au sens des distributions.* La distribution δ''_0 n'a de sens que si on l'applique aux fonctions C^2 : on dit que c'est une distribution d'ordre 2.

On peut de même définir la dérivée seconde de la distribution $f dx$, pour $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, comme la forme linéaire sur les fonctions test $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ par :

$$\langle T''_f, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^2 \langle T_f, \varphi'' \rangle = \int f(x) \varphi''(x)\, dx.$$

Si la fonction $f \in C^2_c(\mathbb{R})$, alors une double IPP montre que la distribution T''_f est identique à la distribution $T_{f''}$.

On voit que, si on dérive une distribution T agissant sur les fonctions $C^0(\mathbb{R})$, la distribution dérivée, elle, n'agira que sur les fonctions C^1, et la dérivée seconde n'agira que sur les fonctions C^2. L'opération de dérivation a donc réduit l'espace des fonctions test. Si on souhaite définir les distributions comme agissant sur un même espace de fonctions test, on ne pourra les faire agir que sur les fonctions test infiniment dérivables $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. De cette façon, on peut itérer autant qu'on veut cette procédure de dérivation, tout en conservant le même espace test. C'est la raison pour laquelle on préfère définir les distributions comme des formes linéaires agissant sur les fonctions C^∞.

Définition 9. Une distribution sur $\mathbb{R}$ à support compact est une forme linéaire T agissant sur les fonctions test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Chaque distribution à support compact T est la restriction d'une forme linéaire sur $C^M(\mathbb{R})$, pour un certain $M \in \mathbb{N}$. On dit alors que T est une distribution à support compact, d'ordre au plus M. On verra que toute distribution à support compact est contrôlée par une certaine semi-norme sur les fonctions $C^M(\mathbb{R})$.

Une fois qu'on agit sur $C^\infty(\mathbb{R})$, on peut dériver T autant qu'on veut, en restant dans la famille des distributions :

Définition 10. Soit T une distribution à support compact. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée k-ième de T est définie comme la forme linéaire agissant sur les fonctions test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle.$$

Remarque 11. Pour une fonction $f \in C^k_c(\mathbb{R})$ et la distribution associée T_f, alors pour $j \leq k$, la dérivée j-ième de T_f coincide avec la distribution $T_{f^{(j)}}$ (on le montre en appliquant j IPP). La dérivée au sens des distributions pest donc une *extension* de la dérivée usuelle des fonctions.

2.3. **Support et continuité d'une distribution à support compact.** On a déjà mentionné ci-dessus la notion de support d'une distribution, dans le cas de la mesure de Dirac, ou d'une distribution T_f pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De quoi s'agit-il précisément ? Comme une distribution est définie par son action sur les fonctions test, la notion même de support doit utiliser les propriétés des fonctions test. Dans le cas de la mesure de Dirac δ_0 ou de ses dérivées, on comprend intuitivement que son support doit être réduit à l'origine. Autrement dit, le complémentaire du support de $\delta_0^{(k)}$ est $\mathbb{R}^*$. Peut-on détecter cette propriété en termes de fonctions test ? Si une fonction test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ a son support contenu dans $\mathbb{R}^*$, alors, comme $\operatorname{supp}\varphi$ est un fermé dans $\mathbb{R}^*$, cela implique que pour un certain $\varepsilon > 0$, ce support sera contenu dans $\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon, \varepsilon[$. Par conséquent, φ sera identiquement nulle sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, et sera tuée par toutes les distributions $\delta_0^{(k)}$.

On aboutit à la définition suivante pour le support d'une distribution T :

Définition 12. Le complémentaire du support d'une distribution T à support compact est le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En particulier, le support de T est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 13. Dans le cas de δ_0, on a vu qu'en prenant $U = \mathbb{R}^*$, on a bien la propriété voulue. Agrandir U consisterait à rajouter le point 0, donc à considérer $\mathbb{R}$ tout entier. Or, il est clair que $\mathbb{R}$ ne remplit pas les conditions voulues, puisqu'il existe des fonctions $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ qui ne sont pas tuées par $\delta_0^{(k)}$. $\mathbb{R}^*$ est donc bien le plus grand ouvert possible, ce qui montre que $\operatorname{supp}(\delta_0^{(k)}) = \{0\}$.

2.3.1. *Support essentiel d'une fonction* L^1. Que donne cette définition sur les fonctions $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$? Il faut se souvenir qu'une fonction dans L^1 (ou L^1_{loc}, ou L^1_{comp}) n'est pas une "fonction", c'est une classe d'équivalence de fonctions égales les unes aux autres, sauf sur des ensembles négligeables. On confond souvent $f \in L^1$ avec un de ses représentants, qui est une vraie fonction. Par exemple, la classe de la fonction $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ contient également la fonction

$\tilde{f} = \mathbb{1}_{[0,1]} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}}$. Dans ces conditions, quelle est la bonne notion de support pour la classe $[f]$ de ces deux fonctions ? Est-ce l'intervalle $[0,1]$? Ou bien $[0,1] \cup \bigcup_{n\geq 2} \{n\}$?

La bonne notion de support pour les classes $[f] \in L^1$ est celle de *support essentiel* de f, défini par

$$ess - supp(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup \{U \,\text{ouvert},\ f = 0\,\text{p.p. sur}U\}\,,$$

ou de façon équivalente, $\complement ess - supp(f)$ est le plus grand ouvert U tel que $f = 0$ p.p. sur U. On voit que si un représentant f vérifie $f = 0$ p.p. sur U, alors c'est aussi le cas pour tout autre représentant de $[f]$, puisque ces fonctions sont égales p.p. Dans l'exemple ci-dessus, cet ouvert maximal sera $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, ce qui montre que $ess - \operatorname{supp} f = [0,1]$.

On remarque que cette notion de support essentiel est définie par son complémentaire, comme l'est le support d'une distribution. Montrons que les deux notions coincident.

Si une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est supportée dans $U = \complement ess - supp(f)$, alors automatiquement

$$\langle T_f, \varphi\rangle = 0,$$

ce qui montre que U est contenu dans $\complement\,\mathrm{supp}(T_f)$.

Inversement, si un ouvert $\tilde{U}$ est tel que $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{U})$, alors pour toute boule $B \subset \tilde{U}$, une adaptation du Corollaire 7 montre que la restriction $f_{\restriction B}$ est nécessairement nulle dans $L^1(B)$, autrement dit que f est nulle p.p. dans B. Par conséquent, $f = 0$ p.p. dans $\tilde{U}$, donc $\tilde{U}$ est contenue dans $U = \complement ess - supp(f)$. On a donc montré :

Proposition 14. *Pour toute $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, le support essentiel de f est identique au support (compact) de la distribution T_f.*

La même preuve montre que cette propriété est aussi vérifiée dans le cas d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, correspondant à une distribution T_f (de support possiblement non compact).

2.3.2. *Bornes uniformes d'une distribution à support compact.* On a vu en (2.1) que pour toute mesure de Radon et pour toute fonction test $\varphi \in C_c(]-a,a[)$, l'action de la mesure μ était bornée par $C_a\|\varphi\|_\infty = C_a\|\varphi\|_{C^0}$. On a aussi dit qu'une mesure était une distribution d'ordre zéro (i.e., qui agit sur les fonction continues).

Définition 15. [Ordre 0] Soit $a > 0$. Pour toute distribution T d'ordre zéro à support compact tel que $\operatorname{supp} T \Subset [-a,a]$, l'action de T sur une fonction $C^0(\mathbb{R})$ ne dépendra que des propriétés de φ sur l'intervalle $[-a,a]$, et sera bornée comme ceci :

$$\exists C_T > 0,\, \forall\varphi \in C(\mathbb{R}), \quad |\langle T,\varphi\rangle| \leq C_T \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)| = C_T\|\varphi\|_{C^0([-a,a])}.$$

Comme on l'a vu plus haut, une façon de "fabriquer" des distributions d'ordre $N > 0$ consiste à prendre N dérivées d'une distribution d'ordre zéro. La définition même de la dérivée $T^{(N)}$ d'une distribution T d'ordre zéro montre que $T^{(N)}$ satisfait la borne suivante :

$$\forall\varphi \in C^N(\mathbb{R}), \quad \left|\langle T^{(N)},\varphi\rangle\right| \leq C_T \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(N)}(x)| \leq C_T\|\varphi\|_{C^N([-a,a])}. \tag{2.5}$$

Ici on a utilisé la semi-norme sur l'espace $C^N(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\|\varphi\|_{C^N([-a,a])} = \sum_{j=0}^{N} \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = \sum_{j=0}^{N} \|\varphi^{(j)}\|_{C^0([-a,a])}.$$

On aurait pu aussi utiliser la semi-norme équivalente $\max_{j=0,..,N} \|\varphi^{(j)}\|_{C^0([-a,a])}$.

Ces propriétés de bornitude nous permettent de compléter la définition d'une distribution à support compact d'ordre M (v. la Définition 9). Rappelons que toute distribution à support compact doit avoir un ordre $M \in \mathbb{N}$. Comme on l'a vu plus haut, on ne fera agir la distribution que sur les fonctions lisses, même si celle-ci peut s'étendre aux fonctions C^M.

Définition 16. [Ordre N] Soit T une distribution à support compact $\operatorname{supp} T \Subset [-a,a]$ d'ordre M. Alors il existe $C_T > 0$ tel que,

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |\langle T,\varphi\rangle| \le C_T \|\varphi\|_{C^N([-a,a])} = C_T \sum_{j=0}^{M} \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| \tag{2.6}$$

Cette borne reste vraie si on étend la distribution aux fonctions $\varphi \in C^M(\mathbb{R})$.

2.3.3. *Les distributions à support compact comme limites de fonctions.* Au départ, on avait défini la distribution δ_0 comme limites de fonctions $\chi_n \in C_c(\mathbb{R})$, au sens de la topologie faible.

Théorème 17. *Toute distribution T à support compact peut s'obtenir comme limite (au sens faible) de fonctions $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si $\operatorname{supp} T \Subset]-a,a[$, on peut choisir des fonctions f_n toutes supportées dans $[-a,a]$.*

Démonstration. Pour montrer cette affirmation, on régularise la distribution T par une *convolution* par les fonctions $\chi_n \in C_c^\infty$ introduites ci-dessus. Il faudra pour cela définir la convolution des distributions (v. le chapitre ? ?). □

On peut prendre le contrepied du théorème ci-dessus, et considérer a priori toutes les suites $(f_n)_{n\ge1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(]-a,a[)$, qui convergent au sens faible, autrement dit telles que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \int f_n \varphi\, dx \quad \text{a une limite, qu'on note } \langle T,\varphi\rangle. \tag{2.7}$$

Il est clair que $\varphi \mapsto \langle T_{f_n},\varphi\rangle$ est une forme linéaire, donc que leur limite $\varphi \mapsto \langle T,\varphi\rangle$ est également une forme linéaire. Comme toutes les f_n sont supportées dans $]-a,a[$, alors la forme linéaire T a son support inclus dans $[-a,a]$. Par contre, il n'est pas évident, a priori, que la limite T est une distribution d'ordre fini, bornée comme dans la Définition 16. Mais ce fait est au c¡ur du Théorème de borne uniforme (pour les distributions).

Théorème 18. *[Borne uniforme - support compact] Supposons qu'une suite $(f_n)_{n\ge1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(]-a,a[)$ converge au sens faible, vers la forme linéaire T, au sens de l'équation (2.7).*

Alors, il existe $M_T \in \mathbb{N}$ et $C_T > 0$ tels que T est une distribution à support compact dans $[-a,a]$, d'ordre M_T, et qui vérifie la borne (2.6).

La preuve de ce théorème utilise des méthodes un peu avancées d'analyse fonctionnelle (théorème de Baire), nous ne la donneront pas. Elle est due originellement à Banach et Steinhaus dans le cadre des espaces de Banach.

2.4. **Continuité séquentielle d'une distribution à support compact.** Une distribution à support compact, satisfaisant une borne du type (2.6), est appelée une forme linéaire continue, pour la raison suivante. Il existe une notion naturelle de convergence pour une suite de fonctions tests $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, autrement dit une topologie sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 19. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R})$. On dit que la suite (φ_n) converge vers la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ si, pour tout $a > 0$ et tout $j \geq 0$,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^j([-a,a])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On notera cette convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{C^\infty} \varphi$, ou $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans C^∞.

A partir de cette notion de convergence dans l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$, on montre la caractérisation suivante des distributions à support compact ;

Théorème 20. *Soit T une forme linéaire à support compact sur $C^\infty(\mathbb{R})$. Alors T est une distribution à support compact si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{C^\infty} \varphi$, elle vérifie :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$: Si T vérifie la borne (2.6) et la suite $\varphi_n \to \varphi$ dans C^∞, alors il est immédiat que $\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle \to 0$.

$\Longleftarrow$: Supposons que $\operatorname{supp} T \Subset]-a, a[$, et que pour toute suite de fonctions φ_n convergeant vers 0 dans C^∞, $\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = 0$. On veut montrer qu'il existe $N_T \geq 0$ et $C_T > 0$ tels que T vérifie (2.6). On procède par contradiction : on suppose que la contraposée est vraie :

$$\forall N \geq 0, \forall C > 0, \exists \varphi \in C^\infty, \qquad |\langle T, \varphi\rangle| > C\|\varphi\|_{C^N([-a,a])}.$$

Ainsi, pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $C = N$, et il existe une fonction test $\varphi = \varphi_N \in C^\infty$ telle que

$$|\langle T, \varphi_N\rangle| > N\|\varphi_N\|_{C^N([-a,a])}.$$

On peut renormaliser chaque fonction φ_N, en prenant $\psi_N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_N}{\langle T,\varphi_N\rangle}$. On obtient donc :

$$\forall N \geq 1, \qquad \langle T, \psi_N\rangle = 1, \quad \text{et} \quad \|\psi_N\|_{C^N([-a,a])} < \frac{1}{N}.$$

En particulier, pour tout $k \geq 0$, on observe que $\|\psi_N\|_{C^k([-a,a])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Comme on ne contrôle pas ψ_N en-dehors de $[-a, a]$, on va utiliser une fonction plateau $\chi_a \in C_c^\infty(]-a, a[)$ telle que $\chi_a(x) = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp}(T)$. Ainsi, on aura pour toute fonction test :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi_a\varphi\rangle + \langle T, (1-\chi_a)\varphi\rangle = \langle T, \chi_a\varphi\rangle,$$

puisque $(1-\chi_a)$ a son support dans le complémentaire de $\operatorname{supp}(T)$. Considérons maintenant la suite $\tilde\psi_N = \chi_a\psi_N \in C^\infty$. En appliquant itérativement la règle de Leibnitz aux dérivées de $\tilde\psi_N$, on montre que

$$\tilde{\psi}_N^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{j} c_{j,\ell}\chi_a^{(j-\ell)}(x)\psi_N^{(\ell)}(x),$$

ce qui montre que $\|\tilde{\psi}_N\|_{C^k([-a,a])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, et donc que $\|\tilde{\psi}_N\|_{C^k([-b,b])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ pour tout $b>0$, puisque la fonction est nulle à l'extérieur de $[-a,a]$. On a donc $\tilde{\psi}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ dans C^∞. Par contre, on a toujours $\langle T,\tilde{\psi}_N\rangle = 1$. Ceci contredit notre hypothèse, et donc prouve l'assertion. □

2.5. **Distributions à support quelconque.** On a déjà rencontré des mesures de Radon à support non compact. Celles-ci agissaient, a priori, uniquement sur les fonctions $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. En effet, sans aucune information a priori sur la croissance de la mesure lorsque $|x|\to\infty$, on ne peut pas la faire agir sur une classe particulière de fonctions continues à support non compact. Ces mesures de Radon constituent des exemples de distributions (d'ordre zéro). Comme on l'a vu dans la borne (2.1), on peut borner l'action $\langle \mu,\varphi\rangle$ en termes de la taille du support de φ, et de la norme sup de cette dernière.

On va généraliser cette propriété pour définir les distributions d'ordre zéro, puis les distributions d'ordre fini N, enfin les distributions générales sur $\mathbb{R}$.

Définition 21. Une distribution d'ordre fini (au plus) $M\in\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire T sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que pour tout $a>0$ il existe $C_a>0$ tel que :

$$\forall \varphi \in C_c(]-a,a[), \qquad |\langle T,\varphi\rangle| \le C_a \sum_{j=0}^{M} \sup_{[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = C_a\|\varphi\|_{C^M(\mathbb{R})}.$$

Ces distributions forment un espace vectoriel, qu'on note $\mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$. En tant que formes linéaires, elles s'étendent naturellement aux fonctions $\varphi\in C_c^M(\mathbb{R})$.

La différence avec le cas des distributions à support compact, c'est que

(1) on ne peut appliquer T qu'à des fonctions test à support compact ;
(2) la constante C_a dans la borne dépend explicitement de l'intervalle $[-a,a]$ contenant le support de la fonction test. A priori, cette constante peut exploser lorsque $a\to\infty$.

2.5.1. *Une distribution d'ordre M est une somme de distributions à supports compacts.* Une distributions T d'ordre M peut être vue comme une somme de distributions à supports compacts d'ordre M. En effet, considérons une partition lisse de l'unité :

Définition 22. Une partition lisse de l'unité est une collection de fonctions $(\chi_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{Z}}$, telles que

$$\operatorname{supp}\chi_n \subset]-n-1,n+1[, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_n(x) = 1, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Exemple 23. Soit $\tilde{\chi}\in C_c^\infty([-1,1[,\mathbb{R}_+)$ telle que $\tilde{\chi}_{\restriction[-1/2,1/2]}\ge 1$. La fonction $S(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\chi}(x-n)$ est bien définie en tout point x (en chaque x il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls), elle est $\mathbb{Z}$-périodique, et vérifie $S(x)\ge 1$ en tout point. On définit alors

$$\chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\chi}(x-n)}{S(x)},$$

et on vérifie que cette famille de fonctions vérifie bien (2.8).

Pour $T \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$, on définit les distributions $T_n = \chi_n T$ par :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \chi_n T, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \chi_n \varphi \rangle.$$

On vérifie facilement que T_n est une distribution à support compact d'ordre N, dont le support est inclus dans $]n-1, n+1[$. On peut en fait l'étendre à toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, puisque $\chi_n \varphi$ sera supportée dans $]n-1, n+1[\subset]-|n|-1, |n|+1[$. En raison des supports de T_n

Proposition 24. *En utilisant les notations précédentes, toute distribution d'ordre M $T \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$ se décompose en la somme $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n$ au sens des distributions : pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$, où dans la somme de droite, seuls un nombre fini de termes sont non nuls, en raison des supports respectifs de T_n et φ.*

Inversement, pour toute famille $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de distributions d'ordre M supportées respectivement à l'intérieur de $]n-1, n+1[$, la somme $T = \sum_n T_n$ est bien définie au sens des distributions, et définit une distribution d'ordre M sur $\mathbb{R}$.

Exemple 25. Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution d'ordre zéro.

Pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients réels, la distributions $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n$ définit une distribution d'ordre zéro.

La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n^{(k)}$ définit une distribution d'ordre k.

2.5.2. *Distributions d'ordre infini.* Ci-dessus on a défini les distributions d'ordre $M \in \mathbb{N}$ comme somme de distributions d'ordre M à supports dans $]n-1, n+1[$. Mais on peut tout aussi bien sommer des distributions T_n à support dans $]n-1, n+1[$, d'ordres M_n quelconques. Si $\sup_n M_n = \infty$, on obtient une distribution d'ordre infini. Néanmoins, pour des fonctions test φ supportées sur $]-a, a[$, seuls les "morceaux" T_n tels que $\operatorname{supp} T_n \cap [-a, a] \neq \emptyset$ sont pertinents lorsqu'on calcule $\langle T, \varphi \rangle$, donc lorsque $|n| \leq a+1$. Pour une telle fonction φ, on aura donc une borne

$$\forall \varphi \in C_c(]-a, a[), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}(\mathbb{R})} = C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}([-a,a])},$$

avec $M(a) = \max\{M_n, \ |n| \leq a+1\}$.

On aboutit à la définition suivante d'une distribution générale.

Définition 26. Une distribution sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que pour tout $a > 0$ il existe $M(a) \in \mathbb{N}$ et $C_a > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in C_c(]-a, a[), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_a \sum_{j=0}^{M(a)} \sup_{[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}(\mathbb{R})}. \tag{2.9}$$

Ces distributions forment un espace vectoriel, qu'on note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La différence avec les distributions d'ordre M, c'est qu'ici, à la fois l'ordre $M(a)$ et la constante C_a dépendent du support de la fonction test, et on peut avoir $\lim_{a\to\infty} M(a) = \infty$. L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ contient comme sous-espace les distributions d'ordre fini $\mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$, et les distributions à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est défini de façon similaire au cas des distributions à support compact.

Définition 27. Le complémentaire du support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset U$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En particulier, le support de T est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 28. Pour une suite de points $x_n \to \infty$, et une suite de coefficients $(c_n \in \mathbb{R})$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_{x_n}^{(n)}$ définit une distribution qui est d'ordre infini si un nombre infini de coefficients c_n ne s'annulent pas. Son support est donné par $\bigcup_{n|c_n\neq 0}\{x_n\}$, qui est alors non compact. Les bornes () sont faciles à montrer, en fonction de $]-a,a[$ et des coefficients c_n.

Comme on l'avait fait dans le cas des distributions à support compact, on peut définir une notion naturelle de convergence de suites de fonctions test $(\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))_{n\geq 1}$, pour laquelle une distribution satisfait une propriété de continuité.

Définition 29. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$. On dit que la suite (φ_n) converge vers la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si

1. Il existe $a > 0$ tel que toutes les fonctions φ_n sont supportées à l'intérieur de $]-a,a[$;
2. Pour tout $j \geq 0$,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^j(\mathbb{R})} = \|\varphi_n - \varphi\|_{C^j([-a,a])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En conséquence, la fonctipn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est elle-même supportée dans $]-a,a[$. On notera cette convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, ou $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}$.

Munis de cette définition, on a alors la propriété de continuité des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Théorème 30. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors T est une distribution si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, elle vérifie :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

La preuve du théorème est très similaire à celle du Thme 20.

De même, en se servant de partitions lisses de l'unité, on montre comme dans la Proposition 24 que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut se décomposer en une somme de distributions T_n à supports compacts dans les intervalles $]n-1, n+1[$: $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n$.

Le théorème 17 nous informe que chacune des T_n peut s'obtenir, au sens des distributions à support compact, comme limite de fonctions $f_{n,k} \in C_c^\infty(]n-1,n+1[)$. On montre alors aisément que les fonctions

$$f_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{n,k}$$

sont bien définies et C^∞ (en effet, pour chaque x il n'y a au plus que 2 termes non nuls). Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le crochet $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$ n'impliquera qu'un nombre fini de termes (les $\{-a-1 \leq n \leq a+1\}$). Pour chacun de ces termes on a d'après le théorème 17 que

$$\langle f_{n,k}, \varphi \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle T_n, \varphi \rangle,$$

et en sommant les termes non triviaux on obtient

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \sum_{n=-[a]-1}^{[a]+1} \langle f_{n,k}, \varphi \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=-[a]-1}^{[a]+1} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Ceci montre que T_{f_k} converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (= au sens des distributions).

Définition 31. Une suite de distributions $(T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}))_{k\geq 1}$ converge (au sens des distributions) vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Remarque. Comme pour les mesures de Radon, ou les distributions à support compact, il s'agit d'une convergence faible, c'est-à-dire d'une convergence ponctuelle dans l'espace des fonctions test. La différence entre ces deux autres notions réside dans l'espace fonctionnel des fonctions test (pour les mesures de Radon, on prend les fonctions test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, alors que pour les distributions il faut prendre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Opérations sur les distributions

On sait déjà que les distributions forment un espace vectoriel. On a vu qu'on peut dériver une distribution. Lorsqu'il s'agit de fonctions continues, on sait multiplier une telle fonction avec une autre. En général, on ne sait pas multiplier deux distributions. Par contre, on va pouvoir :

(1) multiplier une distribution avec une fonction C^∞, pour obtenir une nouvelle distribution. Composé avec la différentiation, cela permettra d'appliquer à une distribution un opérateur différentiel à coefficients lisses.

(2) convoluer une distribution avec une fonction à support compact, ou même une distribution à support compact.

3.1. **Différentiation et multiplication par une fonction lisse.**

3.1.1. *Différentiation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.* On a déjà vu que la différentiation d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est définie en faisant passer la dérivée sur la fonction test, au biais d'une intégration par parties formelle. La même procédure permet de définir les dérivées d'une distribution générale $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: pour tout degré $m \geq 1$, la dérivée k-ième de T est la distribution $T^{(k)}$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T^{(m)} \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle.$$

Comme la fonction $\varphi^{(m)}$ est elle-même dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'expression de droite est bien définie. On remarque que si T est une distribution d'ordre M, alors $T^{(m)}$ est d'ordre $M + m$.

Comme on l'avait fait dans le cas de distributions à support compact, on peut justifier cette définition de T' en considérant une suite de fonctions $f_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que T_{f_k} converge vers T au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour chaque k on a bien

$$\langle T_{f_k'}, \varphi \rangle = \int f_k'(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int f_k(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\langle T_{f_k}, \varphi' \rangle.$$

En interprétant $T_{f_k'}$ comme la dérivée de la distribution T_{f_k}, on a donc

$$\lim_k \langle T'_{f_k}, \varphi \rangle = -\lim_k -\langle T_{f_k}, \varphi' \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle,$$

et donc que les distributions T'_{f_k} convergent vers la forme linéaire de droite. Il est simple de vérifier que celle-ci est une distribution, et on définit celle-ci comme la dérivée de la distribution $T = \lim_k T_{f_k}$, au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Cette définition de la dérivée nous montre aussi une propriété de continuité :

Proposition 32. *L'opération de dérivation $\frac{d}{dx} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est continue, au sens de la convergence des suites de distributions. Si une suite $(T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}))_{k\geq 1}$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors T_k' converge vers T'.*

Démonstration. Si $T_k \to T$, alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$\langle T_k', \varphi \rangle = -\langle T_k, \varphi' \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} -\langle T, \varphi \rangle = \langle T', \varphi \rangle.$$

Ceci montre l'affirmation $T_k' \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}'} T'$. □

3.1.2. *Une première EDO sur les distributions.* L'objectif du cours étant de résoudre certaines EDP, commençons déjà par résoudre l'EDO la plus simple, autrement dit :

$$T' = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Cette équation est à interpréter dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Autrement dit, on veut que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\langle T', \varphi\rangle = \langle 0, \varphi\rangle = 0$. Donc on veut en fait résoudre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi'\rangle = 0. \tag{3.2}$$

Si $T = T_f$ avec f une fonction dérivable, cette équation s'écrit $T_{f'} = 0$ au sens des distributions. Comme $f' \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cela amène à l'équation $f' = 0$ au sens des fonctions continues. On connait les solutions de cette équation : les fonctions $f = Cste$, qui forment un espace de dimension 1.

Notre but est de montrer qu'il n'existe pas d'autres solutions à l'équation (3.1). Pour cela, on va caractériser les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui s'écrivent comme la dérivée d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

Lemme 33. *Une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égale à la dérivée d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0$. Ces fonctions forment un sous-espace fermé de codimension* 1 *dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Les conditions $\psi(x) = \varphi'(x)$ pour tout x et le fait que $\psi(x) = 0$ et $\varphi(0) = 0$ pour $x \leq -a$, pour a assez grand, on tire que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x > \operatorname{supp}\psi$, on obtient $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy$. Si on impose que φ est à support compact, cela implique que cette dernière intégrale est nulle.

Inversement, si $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy = 0$, la fonction φ définie par l'intégrale ci-dessus est bien dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et c'est la seule primitive de ψ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L'espace des fonctions dérivables coincide donc avec le noyau de la forme linéaire continue $T_1 : \varphi \mapsto \int \varphi\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$. Cet espace est un hyperplan dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qu'on pourra noter $H = \ker T_1$. □

Toute solution T de (3.1) doit s'annuler lorsqu'on l'applique aux fonctions $\varphi \in H$. Comment agit-elle sur les distributions qui ne sont pas dans cet hyperplan ? Choisissons une fonction $\chi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans cet hyperplan, par exemple telle que $\langle T_1, \chi_0\rangle = 1$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\tilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \langle 1, \varphi\rangle \chi_0 \tag{3.3}$$

vérifie $\langle 1, \tilde{\varphi}\rangle = 0$, donc $\tilde{\varphi} \in H$ [3].

Comme $\tilde{\varphi}$ est une dérivée, toute solution T doit satisfaire

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle T, \varphi\rangle = \langle 1, \varphi\rangle\langle T, \chi_0\rangle.$$

3. Ici, on a juste utilisé le fait géométrique que tout point de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut se décomposer comme somme d'un point de l'hyperplan H et d'un point sur une droite transversale à l'hyperplan (ici, la droite $\mathbb{R}\chi_0$).

Notons $C = \langle T, \chi_0 \rangle$. On a donc montré que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = C\langle 1, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle$. Cela montre que T est la distribution donnée par la fonction constante $f = C$. On a donc retrouvé les solutions simples (fonctions constantes) qu'on connaissait déjà.

3.1.3. *Une version inhomogène de cette EDO.* Considérons maintenant une distribution arbitraire $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et cherchons à résoudre l'équation

$$T' = S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En général, on n'aura pas de solution T "simple" à cette équation. Cherchons néanmoins à résoudre cette équation. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cette équation s'écrit :

$$-\langle T, \varphi' \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

Si $\psi \in H$ est dans l'hyperplan des dérivées, elle aura une unique primitive $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy$ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. L'action de toute solution T sur ψ est alors donnée par

$$\langle T, \psi \rangle = -\langle S, \Psi \rangle.$$

Prenons maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitraire. En utilisant la fonction χ_0 ci-dessus, on fabrique la fonction $\tilde{\varphi} \in H$ par (3.3). Cette fonction admet une unique primitive $\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}$, donnée par

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}\,dy.$$

On aura donc, pour toute solution T :

$$\begin{aligned} \langle T, \tilde{\varphi} \rangle &= -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle \\ \langle T, \varphi \rangle &= -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle + \langle 1, \varphi \rangle \langle T, \chi_0 \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En revenant à la définition $\tilde{\varphi} = \varphi - \langle 1, \varphi \rangle \chi_0$, on remarque que l'application $\varphi \mapsto \tilde{\Phi}$ est linéaire, de sorte que l'expression ci-dessus est bien une forme linéaire en φ. Il reste à vérifier que cette forme linéaire est une distribution, autrement dit que le membre de droite est borné par une expression de la forme (2.9). Si φ est supportée dans un intervalle $]-a, a[$, alors $\tilde{\Phi}$ sera supportée sur $]-a, a[\cup \operatorname{supp} \chi_0$. On peut supposer a assez grand pour que cette union soit $]-a, a[$. L'expression de $\tilde{\Phi}$ montre alors que

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^0(\mathbb{R})} \le a\|\tilde{\varphi}\|_{C^0} \le a(1 + \|\chi_0\|_{C^0})\|\varphi\|_{C^0},$$

et les dérivées d'ordre supérieures vérifient

$$\|\tilde{\Phi}^{(k)}\|_{C^0} = \|\tilde{\varphi}^{(k-1)}\|_{C^0} \le \|\varphi^{(k-1)}\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^0}\|\chi_0^{(k-1)}\|_{C^0},$$

de sorte que pour tout $k \ge 1$,

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^k} \le C_{k\chi_0}\|\varphi\|_{C^{k-1}}.$$

En rajoutant la borne satisfaite par la norme sup de $\tilde{\Phi}$, on trouve pour tout $k \ge 0$:

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^k} \le C_{k,a,\chi_0}\|\varphi\|_{C^k}.$$

Ce contrôle sur les normes C^k de $\tilde{\Phi}$ montre que $\varphi \mapsto \langle S, \tilde{\Phi} \rangle$ est une distribution. C'est aussi bien sûr le cas pour le second terme $\varphi \mapsto \langle C, \varphi \rangle$. On conclut que T est une distribution

En rajoutant à notre solution particulière T la distribution T_c pour $c \in \mathbb{R}$ arbitraire, qui vérifie $T_c' = 0$, on voit que $T + T_c$ est une solution de $T' = S$. L'ensemble des solutions est donc formé par les distributions

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle + \langle C, \varphi \rangle,$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$ arbitraire. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 34. *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $T' = S$ admet comme solutions les distributions*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = -\langle S, Q(\varphi) \rangle + \langle C, \varphi \rangle,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, et $Q(\varphi)$ est la fonction $\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie ci-dessus.

Remarque 35. La construction de $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ dépend d'un choix de fonction χ_0. Si on change χ_0 par une autre fonction $\chi_0^\flat$ satisfaisant aussi $\int \chi_0^\flat = 1$, on obtiendra une autre fonction $\tilde{\varphi}^\flat \in H$, donc une autre primitive $\tilde{\Phi}^\flat$. On vérifie que la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi}^\flat \rangle + \langle 1, \varphi \rangle \langle T, \chi_0^\flat \rangle$$

donne la même distribution T que (3.4).

3.2. **Multiplication par une fonction lisse.** On a en fait déjà rencontré cette situation au moment de "découper" une distribution T en la somme de distributions $T_n \stackrel{\text{def}}{=} \chi_n T$: il s'agissait de multiplier $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par les fonctions $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en faisant passer la fonction χ_n du côté de la fonction test. Cette manipulation peut se généraliser à la multiplication par une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, sans condition de support.

Définition 36. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors on définit la distribution $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle.$$

Il est simple de vérifier que cette expression définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, la fonction $f\varphi$ est bien dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et l'opération est linéaire. Les formules de Leibnitz montrent que si $\operatorname{supp} \varphi \subset]-a, a[$, les normes $\|f\varphi\|_{C^k}$ sont contrôlées par :

$$\|f\varphi\|_{C^k} \leq C_k \|f\|_{C^k([-a,a])} \|\varphi\|_{C^k(\mathbb{R})},$$

avec C_k un facteur combinatoire ne dépendant que de k. Par conséquent, si T vérifie les bornes (2.9), alors fT vérifiera des bornes similaires, où il sera nécessaire de modifier les constantes C_a en fonction de f, mais pas les ordres $M(a)$. La forme linéaire fT est donc bien une distribution.

Remarque 37. On a le droit de multiplier T par une fonction C^∞, qui est un cas très particulier de distribution. Mais *on ne peut pas multiplier entre elles deux distributions T, S quelconques.* C'est la conséquence d'autoriser ces objets très singuliers que sont les distributions.

3.2.1. *Une équation fonctionnelle.* Cette procédure de multiplication permet de poser des équations "fonctionnelles" sur les distributions. Par exemple, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, quelles distributions T satisfont l'équation

$$fT = 0\ ?$$

Plus généralement, pour une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quelconque, quelles distributions T satisfont

$$fT = S \ ? \tag{3.5}$$

La réponse va dépendre des propriétés de f.

Proposition 38. *Supposons que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ne s'annule jamais. Alors, pour tout $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la seule solution de l'équation $fT = S$ est la distribution $T = \frac{1}{f}S$, où on remarque que $\frac{1}{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On veut trouver $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, f\varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

Comme f ne s'annulle pas, l'application $\varphi \in \mathcal{D} \mapsto \psi = f\varphi \in \mathcal{D}$ est bijective, d'inverse $\psi \mapsto \frac{1}{f}\psi$. En utilisant cette bijection, on voit que la propriété ci-dessus peut s'écrire

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \psi \rangle = \langle S, \frac{1}{f}\psi \rangle,$$

ce qui définit uniquement T. □

Si on relaxe la condition de non-annulation de f, la situation devient plus compliquée. Commençons par le cas le plus simple.

Proposition 39. *L'équation $xT = 0$ admet comme uniques solutions les distributions $T = c\delta_0$, avec $c \in \mathbb{R}$.*

Remarque 40. Ce résultat montre l'identité $x\delta_0 = 0$. Plus généralement, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $(x - x_0)\delta_{x_0} = 0$.

Démonstration. On cherche à résoudre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, x\varphi \rangle = 0. \tag{3.6}$$

Pour définir T, on a besoin de calculer $\langle T, \psi \rangle$ pour toute $\psi \in \mathcal{D}$. Mais contrairement à la proposition précédente, ici l'application $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto x\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas bijective, puisqu'il existe des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui ne s'annulent pas en l'origine. On va d'abord considérer le sous-espace $\mathcal{D}_{ext}$des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui sont supportées à l'extérieur de l'intervalle $]-1, 1[$. Pour de telles fonctions, l'application $\varphi \in \mathcal{D}_{ext} \mapsto x\varphi \in \mathcal{D}_{ext}$ est bijective, puisque la fonction $1/x$ est bien définie et lisse à l'extérieur de $]-1, 1[$. On aura donc, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Cela montre que T est supportée dans $[-1, 1]$ [4].

Choisissons une fonction plateau $\chi_0 \in C_c^\infty(]-2, 2[)$ telle que $\chi_0(x) = 1$ pour $x \in [-1, 1]$. On peut s'en servir pour décomposer toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $\varphi = \chi_0\varphi + (1 - \chi_0)\varphi$. La seconde fonction $(1 - \chi_0)\varphi$ est supportée à l'extérieur de $]-1, 1[$, donc elle est "tuée" par T. Il reste donc à étudier l'action de T sur la fonction $\chi_0\varphi$, ou plus généralement sur toutes les fonctions φ supportées dans $]-2, 2[$.

4.

Démonstration. En fait, au lieu de $]-1, 1[$ on aurait pu choisir un intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui montre que T est supportée dans $]-\epsilon, \epsilon[$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a finalement $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$. □

Pour étudier l'action de T sur une telle fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{]-2,2[}(\mathbb{R})$, on va procéder comme dans la section 3.1.2, c'est-à-dire décomposer φ en une partie "simple", et une partie de la forme $x\psi$. Pour cela on utilise le Lemme de Hadamard, une variation sur le développement limité en zéro : φ peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\theta(x),$$

où $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Cependant, si $\varphi(0) \neq 0$, la fonction θ ne sera pas à support compact. Pour pallier ce "défaut", on se sert d'une fonction plateau $\chi_1 \in C_c^\infty(]-3,3[)$ telle que $\chi_1 = 1$ sur $[-2,2]$. Pour simplifier les calculs ultérieurs, on suppose que χ_1 est paire. En tenant compte du fait que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-2,2[$, on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0)\,\chi_1(x) + x\psi(x), \qquad \text{avec } \psi = \theta\chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

Les deux fonctions du membre de droite étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, cette décomposition permet de calculer l'action de T sur φ :

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \langle T, x\psi\rangle = c\varphi(0) = c\langle \delta_0, \varphi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle.$$

en définissant $c \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \chi_1\rangle$, et en se servant de la propriété (3.6).

En conclusion, on a montré que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle$, donc que $T = c\delta_0$. $\square$

Remarque 41. Si on avait supposé que $T = T_f$ avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, l'équation $xT_f = 0$ serait équivalente à $T_{xf} = 0$ (le montrer !), et donc que xf est la fonction nulle dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Cela impose que $f = 0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$, donc aussi dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque $\{0\}$ est de mesure nulle.

3.2.2. *Une équation fonctionnelle inhomogène : la partie principale de $\frac{1}{x}$.* Cherchons maintenant à résoudre l'équation

$$xT = 1. \tag{3.8}$$

(plus exactement, $xT = T_1$). Là encore, on peut séparer l'étude entre les fonctions φ supportées à une certaine distance de l'origine, et celles dont $0 \in \operatorname{supp}\varphi$.

Considérons les fonctions test φ telles que $\operatorname{supp}\varphi \cap [-1,1] = \emptyset$. Pour ces fonctions, la fonction $\psi = \frac{1}{x}\varphi$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et est également supportée dans le complémentaire de $[-1,1]$. Pour un tel φ, on aura donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, x\psi\rangle = \langle xT, \psi\rangle = \langle 1, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Cette expression définit bien une distribution, qui agit comme la mesure de Radon $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\frac{1}{x}dx$. En effet, en supposant que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-a,a[\setminus[-1,1]$, l'expression de droite est bornée en valeur absolue par $2(a-1)\|\varphi\|_{C^0}$. On aurait pu remplacer $[-1,1]$ par $[-\epsilon,\epsilon]$ pour n'importe quel $\epsilon > 0$.

Concentrons-nous maintenant sur les fonctions φ supportées près de l'origine, disons dans l'intervalle $]-2,2[$. La décomposition de Hadamard (3.7) permet d'écrire

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \langle T, x\psi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle + \langle xT, \psi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle + \langle 1, \psi\rangle, \tag{3.9}$$

en notant $c = \langle T, \chi_1 \rangle$, et en rappelant que la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\chi_1(x)}{x}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et est supportée dans $]-3, 3[$. La formule

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x} = \int_0^1 (\varphi'(tx) - \varphi(0)\chi_1'(tx))\, dt$$

montre que l'application $\varphi \mapsto \psi$ est linéaire, et en utilisant l'expression intégrale on voit que

$$\|\psi\|_{C^0} \leq \|\varphi'\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^0}\|\chi'\|_{C^0} \leq C_\chi \|\varphi\|_{C^1}.$$

En tenant compte de la longueur du support de ψ, et du premier terme, on trouve finalement, pour toute fonction test supportée dans $]-3, 3[$.

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq |c|\|\varphi\|_{C^0} + 6C_\chi\|\varphi\|_{C^1} \leq C\|\varphi\|_{C^1},$$

pour une certaine constante C. Si on ajoute à cette solution $C_0\delta_0$, on aura toujours une solution de $xT = 1$. Notons que $C_0\delta_0$ agit trivialement sur les fonctions φ supportées en-dehors de 0.

On a montré l'existence d'une famille à 1 paramètre de solutions à cette équation. On sait aussi que toutes ces solutions agissent de la même façon sur les fonctions test supportées en-dehors de l'origine, par la mesure de Radon $\frac{1}{x}dx$, bien définie en-dehors de l'origine. Mais comment décrire ces distributions au voisinage de zéro ? Si on reprend la formule (3.9), on trouve

$$\langle 1, \psi\rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x}\, dx,$$

où on a vu que l'intégrand est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On rappelle que la fonction plateau χ_1 a été choisie paire. Comme l'intégrale est celle d'une fonction continue, on

$$\int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon\searrow 0} I_\epsilon(\varphi).$$

Sur $\{|x| \geq \epsilon\}$, les deux termes de l'intégrand sont bien définis et sont continues. La parité de χ_1 implique que la contribution du second terme est nulle, de sorte que

$$I_\epsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx,$$

en utilisant le changement de variable $x \mapsto -x$ dans la seconde intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(x)}{x} = \psi(x) + \psi(-x)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, en particulier elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\langle 1, \psi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Cette limite d'intégrales définit une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée la **valeur principale de $\frac{1}{x}$**, qu'on note $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$. L'expression ci-dessus permet de la définir sur les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, même lorsque l'origine est dans le support de φ. Sur les fonctions φ supportées en-dehors de 0, cette distribution a le même effet que la mesure $\frac{1}{x}dx$, qui est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Pour φ supportée sur $]1, a[$, la distribution sera contrôlée par $\left|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq (a-1)\|\varphi\|_{C^0}$. Par contre, on a montré ci-dessus que lorsque $\operatorname{supp}\varphi \subset]-2, 2[$, on a la borne $\left|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq C\|\varphi\|_{C^1}$.

Affirmation. On ne peut pas améliorer cette borne pour la transformer en $C'\|\varphi\|_{C^0}$, même en prenant une constante $C' > C$. En effet, si on choisit des fonctions test φ_n de la forme $\varphi_n(x) =$

$\varphi_1(nx)$, avec $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ et $\sup \varphi = 1$, on voit que pour n assez grand $\operatorname{supp} \varphi_n \subset]0, 2[$, alors que

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_n \rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\varphi_1(y)}{y} dy \quad \text{(changement de variable } y = nx\text{)}.$$

En choisissant une fonction φ_1 à très long support (et égale à 1 sur la majeure partie de ce support), on peut rendre cette dernière intégrale très grande. Celle-ci ne sera donc pas bornée par $C' = C' \|\varphi\|_{C^0}$.

La distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est donc bien une distribution d'ordre 1, et non d'ordre zéro. Ce n'est donc pas une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$. On aurait pu s'en douter, du fait que $\frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ du fait de la singularité en zéro.

Conclusion 42. Les distributions T solutions de $xT = 1$ sont toutes de la forme $T = \mathrm{vp}\frac{1}{x} + C\delta_0$, avec $C \in \mathbb{R}$ arbitraire. Ce sont des distributions d'ordre 1, à support $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}$.