Différents laplaciens sur $[0,1]$

Exercice 5.1 Propriétés de $H^1(I)$ et $H_0^1(I)$

Exercice 5.2 Laplacien de Neumann sur I et Laplacien périodique sur le tore $\mathbb{T}^1$

Soit $I =]0,1[$. On considère $L^2(I)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. Etant donné $a : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit un opérateur non borné A sur $L^2(I)$ en posant $Au = -(au')'$ pour tout élément $u \in D(A) = \{u \in H^2(I) \,:\, u'(0) = u'(1) = 0\}$.

a. Pour montrer que A est accrétif sur $L^2(I)$ on calcule:

$$\mathrm{Re}(Au|u) = \mathrm{Re}\int_I -(au')'\bar{u} = \int_I au'\bar{u}' = \int_I a|u'|^2 \geq 0$$

car $a \geq 0$ sur I. Pour justifier la deuxième égalité on utilise une intégration par parties en remarquant que si u est dans $D(A)$ alors u' est dans $H^1(I)$ et au' est dans $H^1(I)$ (en effet lorsqu'on multiplie une fonction de $H^1(I)$ par une fonction de $C^\infty(\bar{I})$ on obtient une fonction dans $H^1(I)$ pour le voir calculer la dérivée au sens des distributions par exemple). On peut donc utiliser la formule d'intégration par parties de l'exercice 5.1 question 1. en utilisant que $u'(0) = u'(1) = 0$.

b. Pour $u, v \in H^1(I) \times H^1(I)$ on définit $b(u,v) = \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \langle au', v'\rangle_{L^2(I)} = \int_I u\bar{v} + \int_I au'\bar{v}$. Alors b est une forme sesquilinéaire car le produit scalaire dans L^2 est sesquilinéaire. De plus, par l'inégalité triangulaire et par l'inégalité de Cauchy-Scwarz dans $L^2(I)$

$$|b(u,v)| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|a\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq (1 + \|a\|_{L^\infty(I)})\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}.$$

Pour la dernière inégalité on a utilisé $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ et $\|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$. Donc b est continue.

Enfin

$$|b(u,u)| = \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^1 a|u'|^2 \geq \|u\|_{L^2} + \min_I a\|u'\|_{L^2}^2 \geq \min(1, \min_{\bar{I}} a)\|u\|_{H^1}^2.$$

On a bien que $\min_{\bar{I}} a$ existe et est strictement positif car a est strictement positive et continue sur $[0,1]$ compact. Donc b est aussi coercive. En utilisant le théorème de Lax-Milgram on déduit que pour tout $w \in L^2(I)$ il existe un unique $u \in H^1(I)$ tel que

$$b(u,v) = \langle w, v\rangle_{L^2(I)} \ \forall v \in H^1(I). \tag{1}$$

(Ceci car la forme linéaire $v \mapsto \langle w, v\rangle_{L^2}$ est continue sur $H^1(I)$.) En prenant des fonctions test v dans $C_c^\infty(I) \subset H^1(I)$ dans (1) on observe que

$$-(au')' + u = w \text{ dans } \mathcal{D}'(I). \tag{2}$$

En particulier, $(au')' = u - w \in L^2(I)$, donc $(au') \in H^1(I)$. Donc, comme a est minorée par une constante strictement positive $\frac{1}{a} \times (au') = u' \in H^1(I)$ et u est dans $H^2(I)$. On réécrit la relation (1) comme

$$\int_I au'\bar{v}' + \int_u v = \int_I wv \text{ pour tout } v \in H^1(I). \tag{3}$$

En utilisant que $(au')' = u - w$ et une intégration par parties on a alors $a(1)u'(1)v'1) - a(0)u'(0)v'(0) = 0$ pour tout $v \in H^1(I)$ donc $u'(1) = u'(0) = 0$. Finalement pour tout $w \in L^2(I)$ on a trouvé un unique $u \in D(A)$ tel que $Au + u = w$ ce qui signifie que A est maximal (prendre $\lambda_0 = 1$ dans la définition du cours). Il est donc maximal accrétif.

c. L'opérateur non borné A est maximal accrétif sur $L^2(I)$ qui est un espace de Hilbert donc d'après le théorème de Hille-Yosida (version espace de Hilbert) il engendre un semi-groupe de contractions sur $L^2(I)$ que l'on note $S(t)$. On pose $u(t) = S(t)u_0$ pour $u_0 \in L^2(I)$, on a $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(I)$. Posons $u(t,x) := u(t,x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times I)$. Montrons que u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times I) \tag{4}$$

avec la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout x dans I et les conditions au bord (dites de Neumann)

$$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*_+. \tag{5}$$

Ces dernières conditions au bords étant à interpréter dans un certain sens. En fait on a résolu l'équation de la chaleur dans un milieu inhomogène et/ou anisotrope (modélisé par le coefficient a) en considérant un milieu isolant (conditions de Neumann). En effet d'après le cours, la fonction $u(t)$ vérifie que pour tout $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$ en posant $u_\psi := \int_0^{+\infty} \psi(t)u(t)dt$ on a $u_\psi \in D(A)$ et $Au_\psi = u_{\psi'}$. On teste cette dernière relation sur des fonctions test dans $C^\infty_c(I)$ et on trouve

$$\int_I a(x) \left(\int_0^{+\infty} \psi(t)u(t)dt \right)' \varphi'(x)dx = \int_I \int_0^{+\infty} \psi'(t)u(t)dt\varphi(x)dx. \tag{6}$$

Avec la défintion au sens des distributions de la dérivation et la définition de l'intégrale de Riemann comme limite d'intégrale de fonctions en escaliers on obtient (interversion crochet intégrale vue en TD)

$$\int_I \int_0^{+\infty} \psi(t)u(t)(-a\varphi')'dtdx = \int_I \int_0^{+\infty} \psi'(t)u(t)\varphi(x)dtdx \tag{7}$$

ce qui signifie

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(a(x)\partial_x u)}{\partial x}, \varphi(x)\psi(t) \rangle_{D'(\mathbb{R}^+ \times I) \times D(\mathbb{R}^+ \times I)} = 0 \ \forall \varphi, \psi \in C^\infty_c(I) \times C^\infty_c(\mathbb{R}^*_+). \tag{8}$$

Les sommes finies de fonctions de la fomre $\varphi(x)\psi(t)$ étant denses dans $C^\infty_c(\mathbb{R}^*_+ \times I)$ on en déduit que u est solution de (4). La condition initiale est satisfaite car, par définition des semi-groupes, $u(0,x) = S(0)u_0(x) = u_0(x)$ pour (presque) tout x dans I. La condition au bord est à interpréter comme $u_\psi \in D(A)$. En fait si $u_0 \in D(A)$ alors d'après le cours $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$ donc en particulier on peut vérifier que la condition au bord est vérifier dans un sens classique.

d. On remarque que $\int_I S(t)u_0(x)dx = \langle S(t)u_0, 1\rangle_{L^2}$. La fonction $t \mapsto \int_I S(t)u(x)dx$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (faire la differnece en t_1, t_2 et appliquer Cauchy-Schwarz) donc en particulier c'est une distribution). Calculons sa dérivée en temps au sens des distributions:

$$\begin{aligned}
-\langle \frac{d}{dt}\left(\int_I S(t)u_0(x)dx\right), \psi\rangle &= \int_0^{+\infty}\left(\int_I S(t)u_0 dx\right)\psi'(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\langle S(t)u_0, 1\rangle_{L^2}\psi'(t)dt = \langle \int_0^{+\infty}\psi'(t)S(t)u_0 dt, 1\rangle_{L^2} \\
&= \langle A\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0 dt\right), 1\rangle_{L^2} \\
&= \int_I -\left(a(x)\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0 dt\right)'\right)' dx \\
&= -a(1)\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0\right)'(1) + a(0)(\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0\right)'(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car $\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0 \in D(A)$. De même, le fait d'avoir $\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0 \in D(A) \subset H^1(I)$ nous permet de justifier les intégrations par parties. La dérivée temporelle au sens des distributions de $\int_I S(t)u_0(x)dx$ étant nulle on déduit que cette fonction est constante, en l'évaluant en $t = 0$ on obtient

$$\int_I S(t)u_0(x)dx = \int_I u_0(x)dx.$$

e. On note $u^* = \int_I u(x)dx$ pour $u \in L^2(I)$. L'espace $L^2_* = \{u \in L^2(I); u^* = 0\}$ est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(I)$ (en effet si $u_n \to u$ dans $L^2(I)$ on peut voir par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $u_n^* \to u^*$ dans R. On remarque que pour $u \in D(A) \cap L^2_*$ on a $Au \in L^2_*$. En effet, pour un tel u on a $\int_I Au(x)dx = \int_I (au')' = a(1)u'(1) - a(0)u'(0) = 0$ (l'IPP est justifiée car au' et la fonction constante égale à 1 sont toutes deux dans $H^1(I)$). Pour $\mu > 0$ on considère la forme sesquilinéaire définie sur $H^1(I)$ par

$$b_\mu(u,v) = \int_I au'\bar{v}' - \mu\int_I u\bar{v}.$$

Comme dans la question b) on peut montrer que cette forme est continue sur $H^1(I)$. De plus par l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}
|b_\mu(u,u)| &= \left|\int_I a|u'|^2 - \mu\int_I uv\right|^2 \\
&\geq \int_I a|u'|^2 - \mu\int_I u^2
\end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré (question 5 exercice 5.1) on a pour tout $u \in H^1(I) \cap L^2_*$: $\int_I |u|^2 \leq M\int_I |u'|^2$ pour un certain $M > 0$. Ceci implique

$$\begin{aligned}
|b_\mu(u,u)| &\geq \int_I a|u'|^2 - \mu M\int_I |u'|^2 \\
&\geq (\min_I a - \mu M)\int_I |u'|^2.
\end{aligned}$$

Donc si $(\min_I a - \mu M) > 0$ alors $b_c(u,v)$ est coercive sur $H^1(I) \cap L^2_*$ (en effet d'après l'inégalité de Poincaré, $\int_I |u'|^2$ définit une norme équivalente sur $H^1 \cap L^2_*$). Soit donc $0 < c < \frac{\min_I a}{M}$ et $\lambda_0 > 0$. Comme $b_{c-\lambda_0}$ est coercive et continue sur $H^1(I) \cap L^2_*$ d'après le théorème de Lax-Milgram, pour tout $w \in L^2_*$, il existe un unique $u \in H^1(I) \cap L^2_*$ tel que

$$\int_I au'\bar{v}' - c\int_I u\bar{v} + \lambda_0 \int_I u\bar{v} = \int_I w\bar{v} \text{ pour tout } v \in H^1(I) \cap L^2_*.$$

En particulier, il existe un unique $u \in H^1(I) \cap L^2_*$ tel que $Au - cu + \lambda_0 u = w$. Ceci signifie que $A - c$, défini ici sur $D(A) \cap L^2_*$ est maximal sur L^2_*. Montrons qu'il est aussi accrétif:

$$\begin{aligned}(Au - cu|u) &= \int_I a|u'|^2 - c\int_I |u|^2 \\ &\int_I a|u'|^2 - cM\int_I |u'|^2 \geq 0\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Poincaré et le fait que $\min_{\bar{I}} a - cM > 0$. Donc A est maximal accrétif sur L^2_* et on a

$$\mathrm{Re}(Au|u) \geq c\|u\|^2_{L^2} \text{ pour tout } u \in D(A) \cap L^2_*.$$

On peut alors appliquer le corollaire 2.19 du cours pour déduire que A engendre un semi-groupe sur L^2_* qui vérifie l'estimation $\|S(t)\| \leq e^{-ct}$. Maintenant si $u_0 \in L^2(I)$ alors $u_0 - u_0^* \in L^2_*$ et on a

$$\|S(t)(u_0 - u_0^*)\|_{L^2(I)} \leq e^{-ct}\|u_0 - \int_I u_0(x)dx\|_{L^2(I)} \ \forall t \geq 0.$$

Or $S(t)u_0^* = S(t)\int_I u_0(x)dx = \int_I u_0(x)dx$. En effet, $\int_I u_0(x)dx$ est dans le domaine de A (c'est une fonction constante) donc $S(t)\int_I u_0(x)dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{d}{dt}\left(S(t)\int_0 u_0(x)dx\right) = -A\int_I u_0(x)dx = 0$. On en déduit $S(t)u_0^* = \int_I u_0(x)dx$ et

$$\|S(t)u_0 - \int_I u_0(x)dx\|_{L^2(I)} \leq e^{-ct}\|u_0 - \int_I u_0(x)dx\|_{L^2(I)} \ \forall t \geq 0.$$

f. On suppose que $a(0) = a(1)$. Ici on définit A sur un autre domaine

$$D(A) = \{u \in H^2(I) \ : \ u(0) = u(1)\,,\ u'(0) = u'(1)\}\,.$$

et par la même formule $Au = -(au')'$ pour $u \in D(A)$. On note $H^1_{\mathrm{per}} = \{u \in H^1(I); u(0) = u(1)\}$. L'espace H^1_{per} est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de $H^1(I)$) (ici on utilise l'injection continue de $H^1(I)$ dans $C^0(\bar{I})$ pour montrer la fermeture. La forme sesquilinéaire $b(u,v) = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle au', v'\rangle_{L^2}$ est continue et coercive sur H^1_{per} (car elle l'est sur $H^1(I)$). Donc pour tout $w \in L^2(I)$ il existe un unique $u \in H^1_{\mathrm{per}}$ tel que

$$\int_I au'\bar{v}' + \int_I u\bar{v} = \int_I w\bar{v} \ \ \forall v \in H^1_{\mathrm{per}}. \tag{9}$$

En particulier en prenant des fonctions test $v \in C^\infty_c(I) \subset H^1_{\mathrm{per}}$ dans l'équation précédente on trouve

$$-(au')' + u = w \text{ dans } \mathcal{D}'(I).$$

Ainsi on a $(au')' = w - u \in L^2(I)$ et donc $u \in H^2(I)$. En intégrant par parties (9) on trouve
$$a(1)u'(1)\bar{v}(1) = a(0)u'(0)\bar{v}(0)\ \forall v \in H^1_{\text{per}}.$$
Comme $a(1) = a(0)$ on en déduit $u'(1) = u'(0)$ et donc $u \in D(A)$. Donc A est maximal sur $L^2(I)$. De plus A est accrétif car
$$\begin{aligned}(Au|u)_{L^2} &= \int_I -(au')'\bar{u} = \int_I a|u'|^2 + a(1)u'(1)\bar{u}(1) - a(0)u'(0)\bar{u}(0)\\ &= \int_I a|u'|^2 \geq 0\end{aligned}$$
pour tout $u \in D(A)$. D'après le théorème de Hille-Yosida A engendre un semi-groupe de contractions sur $L^2(I)$. On note $u(t) = S(t)u_0$ pour $u_0 \in L^2(I)$. Alors, comme avant, on montre que $u(t,x) := u(t)(x)$ vérifie
$$(10)\qquad \begin{cases} \partial_t u - \partial_x(a(x)\partial_x u) = 0 \text{ dans } I\\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in I\\ u(t,0) = u(t,1)\ \ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1)\ \ \text{pour } t > 0.\end{cases}$$
La dernière condition étant à interpréter au sens faible suivant: pour tout $\psi \in C^1_c(\mathbb{R}^*_+)$, $\int_0^{+\infty}\psi(t)u(t)dt \in D(A)$ et le fait d'appartenir au domaine contient les conditions au bord.

On a aussi pour ce semi-groupe
$$\int_I S(t)u_0(x)dx = \int_I u_0 1(x)dx\ \forall t \geq 0.$$
On peut reprendre la démonstration précédente ligne à ligne en utilisant cette fois que
$$a(1)\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0 dt\right)'(1) - a(0)\left(\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0\right)'(0) = 0$$
car $a(0) = a(1)$ et $\int_0^{+\infty}\psi(t)S(t)u_0dt \in D(A)$ pour tout $\psi \in C^1_c(\mathbb{R}^*_+)$. Enfin, en utilisant l' inégalité de Poincaré sur $H^1(I) \cap \{u; \int_I u = 0\}$ on va pouvoir montrer qu'il existe $\tilde{c} > 0$ tel que $A - \tilde{c}$ est maximal accrétif sur $L^2_*(I)$. En particulier pour tout $u_0 \in L^2(I)$ d'après le corollaire 2.19 du cours on va avoir
$$\|S(t)u_0 - \int_I u_0(x)dx\|_{L^2(I)} \leq e^{\tilde{c}t}\|u_0 - \int_I u_0\|_{L^2(I)}\ \ \forall t \geq 0.$$

Exercice 5.3 Laplacien avec conditions au bord mixtes

Soit $I =]0,1[$. On considère l'espace $L^2(I)$ muni de son produit scalaire usuel. Etant donnés $a : [0,1] \to \mathbb{R}^*_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit un opérateur A_α sur $L^2(I)$ en posant $A_\alpha u = -(au')'$ pour $u \in D(A_\alpha) = \{u \in H^2(I)\ :\ \alpha u(0) = u'(0),\ u(1) = 0\}$. On note $H^1_d = H^1(I) \cap \{u(1) = 0\}$ et
$$I(\alpha) = \inf_{u \in S} F(\alpha, u)\,,\quad F(\alpha,u) = \alpha a(0)|u(0)|^2 + \int_0^1 a(x)|u'(x)|^2 dx\,,$$
où $S = \{u \in H^1_d\ :\ \|u'\|_{L^2(I)} = 1\}$.

1. L'espace H_d^1, muni du produit scalaire de $H^1(I)$, est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de $H^1(I)$. Pour montrer qu'il est effectivement fermé on utilise l'injection de $H^1(I)$ dans $C^0(\overline{I})$, et donc si $u_n \to u$ dans $H^1(I)$ on a $u_n(1) \to u(1)$. Montrons l'inégalité de Poincaré, pour $u \in H_d^1$ on peut écrire, si $x \in (0,1)$

$$u(x) = u(1) + \int_1^x u'(s)ds = -\int_x^1 u'(s)ds.$$

On a alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I)$: $|u(x)|^2 \leq \|u'\|^2_{L^2(I)}(1-x)$. On obtient donc $\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_{L^2(I)}$.

2. Pour $u \in D(A_\alpha)$ on a

$$(A_\alpha u|u)_{L^2(I)} = -\int_I (au')'\bar{u} = \int_I a|u'|^2 dx - a(1)u'(1)\bar{u}(1) + a(0)u'(0)\bar{u}(0) = F(\alpha, u).$$

Donc si $I(\alpha) \geq 0$, pour u dans H_d^1 différente de la fonction nulle on a $F(\alpha, \frac{u}{\|u'\|_{L^2}}) \geq 0$. D'après la définition de F_α on en déduit que pour tout $u \in H_d^1$ on a $F(\alpha, u) \geq I(\alpha)\|u'\|_{L^2}$. Ce qui montre que si $I(\alpha) \geq 0$ alors A_α est accrétif. Maintenant si $I(\alpha) > 0$, on se donne $I(\alpha) > \lambda_0 > 0$ et on considère la forme sesquilinéaire définie sur H_d^1 par

$$b_\alpha(uv) = \int_I au'\bar{v}' + \alpha a(0)u(0)\bar{v}(0) + \lambda_0 \int_I u\bar{v}.$$

On peut montrer que b_α est continue et $|b_\alpha(u,v)| \leq (2\max_I \alpha + 1)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$. De plus b_α est coercive car, en utilisant l'inégalité de Poincaré il vient:

$$\begin{aligned}
|b_\alpha(u,u)| &\geq F(\alpha, \frac{u}{\|u\|_{L^2}}) - \lambda_0\|u'\|_{L^2} \geq I(\alpha)\|u'\|_{L^2} - \lambda_0\|u\|_{L^2} \\
&\geq \frac{I(\alpha)}{2}\|u'\|_{L^2} + (\sqrt{2}I(\alpha)/2 - \lambda_0)\|u\|_{L^2} \\
&\geq C\|u\|_{H^1}
\end{aligned}$$

si $\lambda_0 > 0$ est assez petit. En particulier, b_α est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, pour tout $f \in L^2(I)$ il existe un unique $u \in H_d^1$ tel que

$$\int_I au'\bar{v'} + \alpha(0)u(0)\bar{v}(0) + \lambda_0 \int_i u\bar{v} = \int_I w\bar{v} \text{ pour tout } v \in H_d^1. \tag{11}$$

En prenant des fonctions tests dans $C_c^\infty(I) \subset H_d^1$ on a que $-(au')' = w - \lambda_0 u$. Donc $u \in H^2(I)$. De plus en intégrant par parties la relation (11) on trouve que $\alpha u(0) = u'(0)$ et donc $u \in D(A_\alpha)$. Ceci signifie que A est maximal.

3. a. Soient $\alpha_1 < \alpha_2$, on a alors pour tout $u \in S$: $F(\alpha_1, u) \leq F(\alpha_2, u)$. Donc $I(\alpha_1) \leq F(\alpha_2, u)$ pour tout u dans S et encore $I(\alpha_1) \leq I(\alpha_2)$. De plus par l'injection de Sobolev dans les fonctions continues et l'inégalité de Poincaré on a, pour tout u dans H_d^1

$$F(\alpha, u) \geq a_{\min}\|u'\|_{L^2} - C\alpha\|u'\|_{L^2} \geq (a_{\min} - C\alpha)\|u'\|_{L^2}.$$

Donc pour α assez petit (α dans un voisinage de 0 on $F(\alpha, u) \geq (a_{min} - C\alpha) \geq c > 0$ pour tout u dans S et donc $I(\alpha) > 0$ sur ce voisinage de 0.

b. Pour u dans S on a $|F(\alpha,u)-F(\alpha',u)| = |(\alpha-\alpha')||u(0)|^2 a(0) \leq |\alpha-\alpha'|a_{max}\|u'\|_{L^2}^2 \leq a_{max}|\alpha-\alpha'|$. Donc $k = a_{max}$ convient. Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$ soit u_1 tel que $F(\alpha, u_1) = I(\alpha) + \epsilon$, on a

$$I(\alpha') - I(\alpha) \leq F(\alpha', u_1) - F(\alpha, u_1) - \epsilon \leq k|\alpha' - \alpha| - \epsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$ on en déduit que I est Lipschitzienne.

4. On suppose qu'il existe deux zéros de I notés $\alpha < \alpha'$. Soit $u_n \in S$ telle que $F(\alpha', u_n) \to I(\alpha') = 0$. Comme $F(\alpha', u_n) \geq F(\alpha, u_n) \geq I(\alpha) = 0$ on déduit $F(\alpha', u_n) - F(\alpha, u_n) \to 0$ ou encore $(\alpha'-\alpha)a(0)|u_n(0)|^2 \to 0$. Ceci implique $|u_n(0)| \to 0$. Mais alors on a $\int_0^1 a(x)|u_n'|^2 \to 0$, mais ceci est une contradiction car $\int_0^1 a(x)|u_n'|^2 \geq a_{min}\int_0^1 |u_n'|^2 \geq a_{min} > 0$. On déduit qu'il existe au plus un zéro.

5. Soit $\lambda > 0$. On note $J = \inf_{u\in S}(F(\alpha_0, u) + \lambda\|u\|_{L^2(I)}^2)$.

   a. On a $F(\alpha_0, u) + \lambda\|u\|_{L^2}^2 \geq F(\alpha_0, u) \geq I(\alpha_0) = 0$. Donc on déduit que $J \geq 0$. On suppose $J > 0$. Alors on va avoir que la forme sesquilinéaire $b_{\alpha_0}(u,v) = \int_I au'\bar{v}' + \alpha_0 a(0)u(0)\bar{v}(0) + \lambda\int_I u\bar{v}$ est continue et coercive. Donc d'après le théorème de Lax-Milgram on peut montrer que $A_{\alpha_0} + \lambda$ est maximal sur $L^2(I)$.

   b. On suppose par l'absurde que $J = 0$. On considère une suite minimisante $(u_n)_n \subset S$ pour J. Comme $I(\alpha_0) = 0$ on a $\|u_n\|_{L^2} \to 0$. Mais on a $\|u_n'\|_{L^2} = 1$ donc par injection compacte dans les fonctions continues on a $u_n \to 0$ uniformément sur $\bar{I}$. Ceci implique que $\int_I a|u_n'|^2 \to 0$ ce qui n'est pas possible car cette quantité est supérieure à $a_{min} > 0$.

6. On note $q_\alpha(u,v) = \alpha a(0)\bar{u}(0)v(0) + \int\limits_0^1 a(x)\bar{u}'(x)v'(x)dx$.

   a. On prend $u_n \subset S$ une suite minimisante pour $I(\alpha_0)$ on a alors $\|u_n'\|_{L^2} = 1$. Donc u_n est bornée dans $H^1(I)$ par injection compacte dans $C^0(\bar{I})$, quitte à extraire on en déduit $u_n \to u$ dans $C^0(\bar{I})$ et $u_n' \rightharpoonup u'$ dans $L^2(I)$.

   b. Par semi-continuité inférieure séquentielle on a $F(\alpha_0, u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(\alpha, u_n) = I(\alpha_0) = 0$. Par l'absurde, si il existe $v \in H_d^1$ telle que $F(\alpha_0, v) < F(\alpha_0, u)$. Alors v n'est pas nulle, car sinon $F(\alpha_0, v) = 0$. On a donc $\|v'\|_{L^2} \neq 0$ et on infère $F(\alpha_0, \frac{v}{\|v\|_{L^2}}) = \|v\|_{L^2} F(\alpha_0, v) \geq I(\alpha_0, v) = 0$. C'est donc une contradiction et alors

   $$F(\alpha_0, u) = \inf_{u\in H_d^1} F(\alpha_0, u).$$

   Donc u est un minimiseur sur H_d^1, en faisant des variations de la forme $u + tv$, t petit et $v \in H_d^1$ on déduit $q_{\alpha_0}(u,v) = 0$ pour tout $v \in H_d^1$. En prenant v dans $C_c^\infty(I) \subset H_d^1$ on déduit $(au')' = 0$. En utilisant une intégration par parties on trouve aussi $u'(0) = \alpha_0 u(0)$ et comme $u \in H_d^1$ on a $u(1) = 0$.

   c. On conclut que $\alpha_0 = u_*'(0)$ où u_* est solution de $(au')' = 0$ dans I, $u(1) = 0$, $u(0) = 1$ et $u'(0) = \alpha_0$.