Bon travail dans l'ensemble. Certaines preuves sont à revoir, ou les explications à développer un peu plus.

Ex 1.

(a) On fixe $\varepsilon > 0$. car E un ensemble mesurable de Lebesgue

Supposons.. ① $\lambda(E) < +\infty$. alors par la définition de la mesure de Lebesgue. $\exists$ une suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est $\boxed{\text{intervalles ouvert}}$ vérifiant $E \subseteq \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$. $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(I_k) < \lambda(E) + \varepsilon$.

ici on regarde des sous-ensembles de R^d, pas de R. Donc il faut prendre des pavés d-dimensionnels

Soit $G = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$. alors G est un ouvert contenant E OK.

Donc $\lambda(E) \leq \lambda(G) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. c.a.d $0 \leq \lambda(G) - \lambda(E) \leq \varepsilon$

Comme $E \subseteq G$. $\lambda(E) < +\infty$ $\lambda(G \setminus E) = \lambda(G) - \lambda(E) \leq \varepsilon$

② $\lambda(E) = +\infty$ on a qu'il existe une suite d'ensembles mesurable $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ t.q. $\lambda(E_i) < +\infty$ $\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i = E$. Comment construis-tu les E_i ?

Donc par ①. $\forall i \in \mathbb{N}$. $\exists$ un ouvert G_i contenant E_i t.q $\lambda(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. $G \setminus E = (\bigcup_{i=0}^{+\infty} G_i) \setminus E = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (G_i \cap E^c) \subseteq \bigcup_{i=0}^{+\infty} (G_i \setminus E_i)$

Donc on a $\lambda(G \setminus E) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda(G_i \setminus E_i) < 2\varepsilon$ OK

□

(b) ~~On considère~~

De plus. par les conclusions qui ont été prouvées ci-dessus. $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $\exists$ un ouvert G_k contenant E t.q. $\lambda(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. Soit $H_1 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k$. H est un ensemble G_δ et contenant E. Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $\lambda(H_1 \setminus E) \leq \lambda(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$.

Donc $\lambda(H_1 \setminus E) = 0$. on note $Z_1 = H_1 \setminus E$. OK

(b) On considère E^c. par (a) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un ouvert G contenant E^c. $\lambda(G \setminus E^c) < \varepsilon$.

On note $F = G^c$. alors F est fermé et contenu dans E

Donc $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E \setminus G^c) = \lambda(G \setminus E^c) < \varepsilon$. □

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $\exists$ une fermé F_k contenu dans E t.q. $\lambda(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$. Soit $H_2 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$. H est une ensemble ~~fermé~~ F_σ et contenu dans E OK

Alors. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\lambda(E \setminus H_2) \leq \lambda(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$.

Donc $\lambda(E \setminus H_2) = 0$ On note $Z_2 = E \setminus H_2$. OK

Ex 2

(a) Pour tout un recouvrement ouvert de $f(K)$ $\{H_i\}$

Soit $C_i = f^{-1}(H_i)$ alors $\{C_i\}$ est un recouvrement ouvert de K. Parce que K est compact $\exists\, C_{i_1}, C_{i_2}, \dots \in \{C_i\}$

k t.q. $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j}$. OK Alors $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^{k} f(C_{i_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} H_{i_j}$. OK

Donc $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^m$. OK

De plus si K est un ensemble F_σ.

Donc $K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} (F_i \cap B(0,j))$ boules fermées?

Parce que F_i est fermé alors $F_i \cap B(0,j)$ est compact

c.a.d $f(F_i \cap B(0,j))$ est compact

Donc $f(K)$ est un ensemble F_σ. OK

(b) Parce que f est une fonction de Lipschitz

Donc $\sup_{x,y\in Q} |f(x)-f(y)| \leq M \sup_{x,y\in Q} |x-y|$ Q'

Alors $f(Q)$ est contenu dans un cube Q' d'une longueur de côté de $\cancel{2}M \sup_{x,y\in Q} |x-y|$ Mieux expliquer

Alors $\lambda^*(f(Q)) \leq \lambda^*(Q') = \left(\frac{\cancel{2}M \sup_{x,y\in Q}|x-y|}{\sqrt{n}}\right)^n = M^n \cancel{2}\, \mathrm{vol}(Q)$

En fait $\frac{\sup_{x,y\in Q}|x-y|}{\sqrt{n}}$ est la longueur des côtés du cube de quel cube? Q?

(c) Soit N est un ensemble de mesure nulle

~~Alors~~ Comme $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ une suite de cubes $\{Q_k\}$ peut-on toujours le faire avec des cubes?

$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ ~~tq~~ et Q_k est un cube ~~de~~ avec la longueur des côtés est l_k, $\sum_k \lambda(Q_k) < \varepsilon$. D'où vient cette propriété?

Par (b) $\lambda^* f(Q_k) \leq M^n \mathrm{vol}(Q_k)$

Donc $\lambda^*(f(N)) \leq M^n \sum_k \lambda(Q_k) < M^n \varepsilon$

On choisit ε arbitrairement. Donc $f(N)$ est un ensemble de mesure nulle. OK

De plus $\forall A$ est un ensemble mesurable A $\exists M, N$: $A = M \cup N$. et M est un ensemble F_σ, N est un ensemble de mesure nulle par (a) et ci-dessous $f(M)$ est un ensemble F_σ, $f(N)$ est un ensemble de mesure nulle. Ils sont mesurables OK $\square$

(ici, "mesurable" = "Lebesgue-mesurable")

Ex 3

(a) On va démontrer que $\forall a \in]0,1[$, $\exists n \in \mathbb{N}$ $a\lambda(P_n) < \lambda(E \cap P_n)$

Expliquer d'où viennent ces P_n (tu le fais finalement plus bas)

Si non, c.a.d. si $\forall n \in \mathbb{N}$ $a\lambda(p) \geq \lambda(E \cap p)$

alors on a $(1+\varepsilon)\lambda(E) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(P_n)$ (par la définition de la mesure de Lebesgue)

$$\geq \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E \cap P_n)$$

$$\geq \frac{1}{a}\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap P_n\right)$$

$$= \frac{1}{a}\lambda(E)$$

Donc si $\varepsilon < \frac{1}{a} - 1 \in]0,1[$ absurde. OK $\square$

Rq : par la définition de $\lambda(E)$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ une suite de rectangle (P_n) dans $\mathbb{R}^d$ t.q. $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(P_n) \leq (1+\varepsilon)\lambda(E)$

$\square$.

(b)

On choisit $\xi \in]1-\frac{1}{2^{d+1}}, 1[$, par (a). $\exists$ P un rectangle ~~avec~~ t.q. $\xi\lambda(p) < \lambda(P \cap E)$

Soit $\delta = \min_{j\in[\![1,d]\!]} \lambda(I_j)$. $\{I_j\}$ vérifie $P = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$.

Soit $Q =]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[^d$. On va démontrer que $Q \subseteq E - E$.

i.e. $\forall x \in Q$ $\exists y, z \in E$ $y - z = x$

$$\lambda(P \cup (P+x)) = \lambda(P) + \lambda(P+x) - \lambda(P \cap (P+x))$$

$$< 2\lambda(P) - \boxed{2^{-n}\lambda(P)}$$ expliquer d'où vient cette inégalité

n=d ?

$$< 2\lambda(P \cap E)$$

$$= \lambda(P \cap E) + \lambda(P \cap E + x)$$ OK

Comme $P \cap E$ et $P \cap E + x \subseteq P \cup (P+x)$ Donc $(P \cap E) \cup (P \cap E + x) \neq \emptyset$

à refaire

pas clair! Mieux expliquer! \cap?

Alors $\exists y, z \in P \cap E$ $y = z + x$

Par l'arbitraire de x. on obtient $B(x, \frac{\delta}{2}) \subseteq Q \subseteq E - E$. OK

Ex 4

① Tout d'abord on considère des fonctions étagées.

Lem : $f=\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ $a_1 \cdots a_n \in\mathbb{R}$ deux à deux distinctes $A_1 \cdots A_n$ mesurables et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ alors il existe une fonction ~~[illegible]~~ $\varphi\in C(E,\mathbb{R})$ et un ~~fermé~~ fermé $F\subseteq E$; $\boxed{f=G}$ \phi? sur F et $\lambda(E\setminus F)<\varepsilon$.

Dém : Par Ex 1 On a qu'il existe $F_1 \cdots F_n$ fermés de $\mathbb{R}^d$ t.q. $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $F_k\subseteq A_k$ $\lambda(A_k\setminus F_k)<\frac{\varepsilon}{2^n}$

Soit $F=\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ $\lambda(E\setminus F)=\lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\setminus F_k)<\varepsilon$

On définit g : $g|_{F_k}=a_k$ $\forall k\in[\![1,n]\!]$

Car $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $x\in F_k$ $\exists\delta>0$ $B(x,\delta)\cap(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!], i\neq k} F_i)=\emptyset$

Alors $g|_{F_k\cap B(x,\delta)}$ = const. donc continue sur F

Par le Thm ~~d'extension~~ ~~expression~~ de $\boxed{\text{Tietze}}$?? on obtient le lemme. □

② de prolongement

② Car $\exists$ une suite $\{f_n\}$ de fonctions étagées t.q. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$. Alors $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ une suite de fermés $\{F_n\}$ et une suite de fonctions continues $\{g_n\}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$ $F_n\subseteq E$ $\lambda(E\setminus F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ $g_n|_{F_n}=f_n|_{F_n}$

~~soit~~ $F=\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$. donc $\{f_n\}\to f$ sur $E\setminus F$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n|_{E\setminus F}$ est continue ok

Car le thm d'Egoroff $\exists G\subseteq E\setminus F$ et $\lambda(G)<\frac{\varepsilon}{2}$ $\{f_n\}\rightrightarrows f$ sur $E\setminus(F\cup G)$ ok

De plus $\lambda(F\cup G)<\varepsilon$. f est continue sur $E\setminus(F\cup G)$. ok

□

Non, il faut le justifier

Ex 5 Il est clair que $f|_{\mathbb{Q}}$ est linéaire

insuffisant

Par Ex 4. On a qu'il existe au moins un point $x\in\mathbb{R}$ t.q. f est continue en x. donc f est linéaire sur $\mathbb{R}$.