Un bon travail. Certaines réponses sont trop rapides.

2024年3月22日 17:02

TD9 étudiant:David

1 (a) situation 1 : $\lambda(E) < +\infty$

alors par définition de la mesure de Lebesque,

on sait que il existe un suite de ensemble $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

t.q. $\lambda(E) = \lambda^*(E) = \inf_{n\to\infty} \lambda^*(P_n) = \inf_{n\to\infty} \lambda(P)$

les P_n sont des union des pavé ouvert

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n,

t.q. $\lambda(P_n) - \lambda(E) < \varepsilon$ et $P_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{i,n}$ OK

est aussi un ouvert.

situation 2 : $\lambda(E) = +\infty$

il existe une suite d'ensemble E_i t.q.

$\begin{cases} E = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \\ E_i \text{ mesurable et } \lambda(E_i) < +\infty \end{cases}$

on peut fabrique les E_i facillement :

$E_i := E \cap \{x \mid \|x\|_2 \leq i\}$

alors, comme la situation 1.

il existe (O_i) une suite d'ouvert

t.q. $E_i \subset O_i$ et $\lambda(O_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

alors $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \setminus E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(O_i \setminus E_i) \leq \varepsilon$

depuis, pour chaque $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$

et $\lambda(O_n \setminus E) \leq \varepsilon$. OK

ayant les bonnes propriétés

alors $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est un ensemble ~~suffisant~~

(b) On utilise la conclusion de (a) sur

E^c, c'est en fait la même chose développer un peu la réponse

2. (a) si K un ensemble compact alors pour tout

recouvrement ~~couvert~~ ouvert $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe un

ensemble d'indice J fini, $J \subset I$ et $K \subset \bigcup_{i\in J} O_i$

on considère un couvert de $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.

alors $K \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$

on sait que $f^{-1}(O_i)$ est ouvert parce que

il est l'image reciproque d'une ouvert

alors il existe $J \subset I$, $|J| < +\infty$. t.q.

$K \subset \bigcup_{i\in J} f^{-1}(O_i)$

on obtiens $f(K) \subset \bigcup_{i\in J} O_i$. OK

donc $f(K)$ est un ensemble compact

Soit K un ensemble F_σ, $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, OK

on pose $E_i = \{x \mid |x| \leq i\}$, $i \in \mathbb{N}$

alors $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_n \cap E_i$. OK

$F_n \cap E_i$ est fermé et borné, donc compact.

on obtiens que $f(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(F_n \cap E_i)$ est

un ensemble F_σ OK compacts

(b) on vais démontrer que $(2M\sqrt{n})^n$ est une constante suffissante.

soit une cube $Q = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$, on note $r = b_i - a_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, et point $A = (a_1, \dots, a_n)$

alors $f(Q) \subset \prod_{i=1}^{n}]f(a_i) - M\sqrt{n}r, f(a_i) + M\sqrt{n}r[$

parce que tout $P \in Q$, $\|P - A\|_2 \leq \sqrt{n}r$

$\Rightarrow P \in B(f(A), \sqrt{n}r) \subset \prod_{i=1}^{n}]f(a_i) - M\sqrt{n}r, f(a_i) + M\sqrt{n}r[\Rightarrow \lambda^*(f(Q)) \leq \lambda^*(\prod_{i=1}^{n}]f(a_i) - M\sqrt{n}r, f(a_i) + M\sqrt{n}r[)$

Donc $C = (2M\sqrt{n})^n$ est une constante suffissant. OK

(c) soit E un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^n$

comme f est Lipschitz, f est continue, alors

mesurable.

comme f est Lipschitz, f est continue, alors mesurable.

(i) si E est de mesure ~~de mesure~~ nulle alors pour tout $\varepsilon>0$. il existe une famille de cube Q_i t.q

$$E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \quad \text{et} \quad \lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i) < \varepsilon.$$

alors $\lambda^*(f(E)) < C\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i) < C\varepsilon$.

$\Rightarrow \lambda^*(f(E)) = 0 \Rightarrow f(E)$ est de mesure nulle OK

(ii) Soit E un ensemble mesurable

Par TD 9 ex 1, on a : $E = K \cup Z_2$, avec K un F_sigma, Z_2 négligeable

$\Rightarrow f(E) = f(K) \cup f(Z_2)$, par (a)(i), $f(Z_2)$ est mesurable car négligeable

il reste de montrer $f(K)$ mesurable, par (a), c'est vrais car f(K) est un F_sigma

OK

3. (1) on montre par l'absurde. on ~~fixe~~ α On suppose qu'il existe \alpha dans]0,1[, tel que pour tout P, \lambda(P\cap E)\leq \alpha \lambda(P).

par définition, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, il existe une suite de rectengle P_i, t.q.

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) \leq (1+\varepsilon)\lambda(E)$$

et on a $\alpha\lambda(P_i) \geq \lambda(P_i\cap E)$ par notre hypothèse

donc
$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\lambda(E) &\geq \sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda(P_i)\\ &\geq \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda(P_i)\\ &\geq \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda(P_i\cap E)\\ &\geq \frac{1}{\alpha}\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(P_i\cap E))\\ &= \frac{1}{\alpha}\lambda(E)\end{aligned}$$

on obtiens $1+\varepsilon \geq \frac{1}{\alpha}$ pour $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

mais $\alpha \in]0,1[$, on peut choisir un ε assez petit, t.q. $\alpha < \frac{1}{1+\varepsilon}$, absurde ! OK

(2) on fixe un α, et P un rectengle tel que

$\alpha\lambda(P) < \lambda(P\cap E)$

la dimension est notée d

Soit $P = \prod_{i=1}^{?}]a_i, b_i[$ on pose $r = \min_{1\le i\le n}\{b_i - a_i\}/2$

et $Q = \prod_{i=1}^{n}(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$

on va démontrer que $\forall x\in Q$, $x\in(E\cap P)-(E\cap P)$

autrement dit, $\forall x \in Q$, $(E\cap P)\cap(E\cap P+x) \neq \emptyset$

calculons la mesure de $(E\cap P)\cap(E\cap P+x)$

$$\begin{aligned}\lambda((E\cap P)\cap(E\cap P+x)) &= \lambda(E\cap P)+\lambda(E\cap P+x) - \lambda((E\cap P)\cup(E\cap P+x))\\ &> 2\lambda(E\cap P) - \lambda(P\cup(P+x))\\ &> 2\alpha\lambda(P) - \lambda(P\cup(P+x))\\ &> 2\alpha\lambda(P) - (2-\tfrac{1}{2^n})\lambda(P)\\ &= (2\alpha + \tfrac{1}{2^n} - 2)\lambda(P)\end{aligned}$$

expliquer ce terme 1/2^n

donc on peut choisir un $\alpha > 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

et on a $B(0,\frac{r}{2}) \subset Q \subset (E\cap P)-(E\cap P) \subset E-E$ OK

4. supposons que f est fini partout, sinon on considère $f|_F$, où $F := \{x \mid f(x) \text{ fini}\}$

demontrer d'abord le cas que f est étapee étagée

par TD 9 ex 1 (2), soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, on a qu'il existe $F_1 \cdots F_n$ fermés de $\mathbb{R}^d$ t.q.

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ F_k \subseteq A_k \text{ et } \lambda(A_k\setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

alors $F = \bigcup_{n=1}^{n} F_n$ est un ensemble suffisant,

on a $\lambda(E\setminus F) = \sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k\setminus F_k) < \varepsilon$

et $f|_F$ continue.

retournons au cas général.

par l'approximation par des fonctions étagées,

retournons au cas général.
par l'approximation par des fonctions étagées,
il existe une suite de fonctions étagées
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Alors $\forall \varepsilon > 0$
il existe une suite de fermés (F_n) et
t.q.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq E$, $\lambda(E \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et f_n est continue sur F_n
soit $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F$, alors sur $E \setminus F$, $(f_n) \to f$ et
$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n $E\setminus F$ est continue Il y a une confusion : les bons ensembles sont les F_n ou bien les E\F_n ?
par le Thm d'Egoroff, on a
$\exists G \subseteq E \setminus F$ et $\lambda(G) < \frac{\varepsilon}{2}$,
$(f_n) \rightrightarrows f$ sur $E \setminus (F \sqcup G)$ cet ensemble est-il fermé?
et $\lambda(F \sqcup G) = \lambda(F) + \lambda(G) < \varepsilon$, f est continue sur $E \setminus (F \sqcup G)$

5. on pose $f(1) = a$.
on sait que il faut expliquer pourquoi ! $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$
par TD 9 ex 4. on sait que il existe au
moin un point x t.q. f est continue sur que veux-tu dire?
x.
Expliquer par translation, f est continue sur $\mathbb{R}$
donc $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Il faut plus détailler tes réponses !