Très bon travail

TD 8 Théo Wu Jiayi

Date. /

1. $f(x,\xi) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ix\xi}$ -ix\xi $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ix\xi}\,dx$

i) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $f(x,\xi)$ est mesurable, $|e^{ix\xi}| = 1$

alors $|f(x,\xi)| = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\int_{\mathbb{R}} |f(x,\xi)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$

$\forall \xi$, $f(x,\xi)$ est intégrable ($f(x,\xi)$ est continue donc mesurable)

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(x,\xi)$ est dérivable : $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot ix e^{ix\xi}$

iii) $g = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \leq g(x)$ attention, on a déjà une fonction g!

$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 2$

$g(x) \in L^1$ ok.

Donc, $\hat{g}(\xi)$ est continue et dérivable, et $\hat{g}'(\xi_0) =$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} ix e^{ix\xi_0}dx = -i\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi_0}\, d e^{-\frac{x^2}{2}}$

$= i\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} i\xi_0 e^{ix\xi_0}\,dx = -\int e^{-\frac{x^2}{2}} \xi_0 e^{ix\xi_0}\,dx$

$= -\xi_0 \hat{g}(\xi_0)$ ok

Alors $\hat{g}$ satisfait : $\xi \hat{g}(\xi) + \hat{g}'(\xi) = 0$

$\frac{dy}{dx} = -xy$ $\frac{dy}{y} = -x\,dx$ $\ln y = -\frac{x^2}{2} + C$ $y = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$

Donc $\hat{g}(\xi) = C_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ si $\xi = 0$ $\hat{g}(\xi) = C = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

Alors $C = \sqrt{2\pi}$ $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ ok

2.1) $g(x,u) = \sqrt{f(x)^2 + u}$ $F(u) = \int_{[0,1]} g(x,u)\,dx$

i) $\forall u \in [0,+\infty)$, $g(x,u)$ est ~~continue donc mesu~~

mesurable : $g^{-1}((a,+\infty)) = f^{-1}((\sqrt{a^2-u},+\infty)) \cup$

$f^{-1}(]-\infty,-\sqrt{a^2-u}[)$ si $u < a^2$ $\in \mathcal{B}([0,1])$

$g^{-1}(]a,+\infty[) = [0,1] \in \mathcal{B}([0,1])$ si $u > a^2$ ok

ii) $\forall x \in E$, $g(u,x)$ est continue en u_0, $\forall u_0 \in [0,+\infty)$ ok

iii) $\bar{g} = \sqrt{f(x)^2 + M}$, $\forall u \in [0,M]$ $|f(u,x)| \leq \bar{g}(x)$

et $\int_{[0,1]} \bar{g}\,dx \leq \int_{[0,1]} (|f(x)| + \sqrt{M})\,dx$ $\bar{g}$ est intégrable ok

Donc, $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ un espace mesuré, $(U = [0,M],$

$d)$ espace métrique, $u \mapsto F(u)$ est continue pour tout

$u \in U$. Alors, (U,d) est sous-topologie de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

et $\forall M \geq 0$, $u \mapsto F(u)$ est continue dans $[0,M]$, OK

donc F est continue sur $[0,\infty)$ OK

i) $\forall u \in (0,+\infty)$, $x \mapsto g(u,x)$ est mesurable

Date. /

$\int_{[0,1]} g(u,x)\,dx \leq \int_{[0,1]} |f(x)|+\sqrt{u} < \infty$ intégrable

ii) $\forall x \in [0,1]$, $u \mapsto g(x,u)$ est dérivable sur $(0,+\infty)$

$\frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)+u}}$

iii) $h = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$, $\forall u \in [\varepsilon,+\infty)$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \geq \left|\frac{1}{2\sqrt{f(x)+u}}\right|$

$h \in L^1_+$ ok

Donc, $F(u)$ est dérivable sur $[\varepsilon,+\infty)$ pour $\forall \varepsilon>0$

c.a.d. ~~F~~ $F(u)$ est dérivable sur $(0,+\infty)$. ok

2) $\frac{F(u)-F(0)}{u} = \frac{\int_{[0,1]}\sqrt{f(x)^2+u}-|f(x)|\,dx}{u} = \int_{[0,1]} \frac{dx}{\sqrt{f(x)^2+u}+|f(x)|}$

$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)-F(0)}{u} = \lim_{u\to 0^+}\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)^2+u}+|f(x)|}$

~~i) $\forall u \in [0,1]$~~ Montrons $F'(0)<+\infty$ ssi $\int_{[0,1]} \frac{1}{|f|}\,dx < +\infty$ ok

Si $\int_{[0,1]} \frac{1}{|f|}\,dx < +\infty$ $\quad H(u,x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u}+|f(x)|}$

i) $\frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u}+|f(x)|} \leq \frac{1}{2|f|}$ $\quad H(u,x)$ est mesurable et intégrable ii) $\forall x \in [0,1]$, $H(u,x)$ est continue en $u=0$

iii) $|H(u,x)| \leq \frac{1}{2|f|}$ $\forall u,x$ $\quad \frac{1}{|f|} \in L^1_+$

Donc ~~$F'(u)$~~ $\int H(u,x)$ est continue en $u=0$, $\lim_{u\to 0^+}\int_{[0,1]} H(u,x)\,dx = \int_{[0,1]} H[0,x]\,dx < +\infty$. ok

Réciproque, si F est dérivable en $u=0$

$\lim_{u\to 0^+}\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u}+|f(x)|} < +\infty$

par le TCM, $\int_{[0,1]} \frac{1}{|f|}\,dx = 2\int \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+\frac{1}{n}}+|f(x)|}\,dx$

$f_n = \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+\frac{1}{n}}+|f(x)|}$, $f_n \nearrow \frac{1}{2|f|}$ et $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\int_{[0,1]} f_n\,dx < +\infty$

Donc $2\int \lim_{n\to\infty} f_n\,dx = 2\int \frac{1}{2|f|}\,dx < +\infty$

Alors $F'(0)<+\infty \Leftrightarrow \int_{[0,1]} \frac{1}{|f|}\,dx < +\infty$ OK

3.a) $g(x,u) = |f(x)-u|$ Fixons $M>0$,

i) $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,u)$ est ~~continue sur [0,1] donc~~ mesurable, $\int_{[0,1]} |f(x)-u|\,dx \leq \int_{[0,1]} |f(x)|+|u|\,dx < +\infty$

$x \mapsto g(x,u)$ est intégrable ($f(x)-u$ mesurable, donc $|f(x)-u|$ mesurable)

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ $u \mapsto g(x,u)$ est continue en $u=u_0$, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$

iii) $\forall u \in [-M,M]$, $|g(x,u)| \leq \underbrace{|f(x)|+M}_{\in L^1_+}$ pour tout $x \in [0,1]$

Date. /

Donc $\int_{[0,1]} g(x,u)\, dx = G(u)$ est continue sur $[-M,M]$ pour $\forall M>0$, c.a.d. $G(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ OK

b) Si $\lambda(\{x\in[0,1], f(x)=u_0\})=0$,

i) $\forall u\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,u)\in L^1_+$

ii) $u\mapsto g(x,u)$ est dérivable en u_0 sur $\{x\in[0,1], f(x)\neq u_0\} = \{x\in[0,1], f(x)=u_0\}^c$, alors $u\mapsto g(x,u)$ est dérivable en u_0 pour λ-p.p. x OK

iii) $|g(u,x)-g(u_0,x)| = \big||f(x)-u|-|f(x)-u_0|\big| \leq |u-u_0|$

~~$\int_{[0,1]} |u-u_0|$~~ ~~$I=(u_0-1, u_0+1)$~~ pour tout $u\in\mathbb{R}$

$|g(u,x)-g(u_0,x)| \leq 1\cdot|u-u_0|$ $1\in L^1_+$ pour tout $x\in[0,1]$

Donc G est dérivable en $u_0\in\mathbb{R}$ OK

Réciproquement, si G est dérivable en $u_0\in\mathbb{R}$, $A=\{x\in[0,1], f(x)=u_0\}$

$G'(u_0)=\lim\limits_{u\to u_0}\int_{[0,1]}\frac{|f(x)-u|-|f(x)-u_0|}{u-u_0}\,dx$ si $u>u_0$

$$|f(x)-u|-|f(x)-u_0| = \begin{cases} u-u_0 & \text{si } f(x)>u \text{ ou } f(x)<u_0 \\ 2f(x)-u-u_0 & \text{si } u_0\leq f(x)\leq u \end{cases}$$

$\int_{[0,1]}\frac{|f(x)-u|-|f(x)-u_0|}{u-u_0}\,dx = \lambda\{x\in[0,1] ; f(x)>u \text{ ou } f(x)<u_0\} + \int_{\{u_0\leq f(x)\leq u\}}\frac{2f(x)-u-u_0}{u-u_0}\,dx$

cette partie de preuve disparaît ?

$u\to u_0$, $A_n=\{x\in[0,1] ; u_0\leq f(x)\leq u_0+\frac{1}{n}\}$ $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_+} A_n = A$.

$\lambda(A_1)<+\infty$, $\lambda(A_n)\to\lambda(A)>0$ est-ce ton hypothèse?

~~$\exists m, \forall n\geq m, \lambda(A_n)\leq\frac{5}{4}\lambda(A)$~~

tu recommences la preuve?

$h(u,x)=\frac{|f(x)-u|-|f(x)-u_0|}{u-u_0}$ ~~≤ 1~~ $|h(u,x)|\leq 1$ et continue

Par le TCD $\lim\limits_{u\to u_0}\int_{[0,1]} h(u,x)\,dx = \int_{[0,1]}\lim\limits_{u\to u_0} h(u,x)\,dx$

$f(x)=u_0$ $\lim\limits_{u\to u_0^+} h(u,x)=1$ $\lim\limits_{u\to u_0^-} h(u,x) = -1$

$f(x)\neq u_0$ $\lim\limits_{u\to u_0^+} h(u,x)=\lim\limits_{u\to u_0^-} h(u,x)$

Donc $\int\lim\limits_{u\to u_0^+} h(u,x)\,dx = \int\lim\limits_{u\to u_0^-} h(u,x)\,dx$ ssi $\lambda(\{f(x)=u_0\})=0$

c.a.d. G est dérivable en $u_0\in\mathbb{R}$ ssi $\lambda(\{x\in[0,1], f(x)=u_0\})=0$ ok

4. a) ~~f~~ $g(u,x)=\frac{\arctan(uf(x))}{1+x^2}$

i) $\forall u\in U$, $x\mapsto g(u,x)$ est mesurable : $u\cdot f(x)$ est

deli得力

Date. pour montrer la mesurabilité, tu peux utiliser le fait que la composée ou le produit de fonctions mesurables est mesurable

mesurable, donc $(\arctan(uf(x)))^{-1}(a,+\infty) =$
$(uf(x))^{-1}(\tan a, +\infty)$ si $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ou $(0,+\infty)$ si $a \leq -\frac{\pi}{2}$
ou ϕ si $a \geq \frac{\pi}{2}$. $\arctan(uf(x))$ est mesurable
$\frac{1}{1+x^2}$ mesurable donc $g(u,x)$ mesurable

ii) pour tout $x \in [0,+\infty)$ $uf(x)$ est continue en u_0, donc $\frac{\arctan(uf(x))}{1+x^2}$ est continue en u_0 ($\forall u_0 \geq 0$)

iii) $|g(x,u)| \leq \frac{10}{1+x^2}$, $\frac{10}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1_+$, $\forall u \in \mathbb{R}$ OK

donc F est continue ~~sur $[0,+\infty)$~~ OK

b) F est continue en $u=+\infty$, $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) \neq 0\}$

on dit plutôt que F a une limite en +\infty

Donc $\lim_{u\to+\infty} F(u) = \int_0^{+\infty} \lim_{u\to+\infty} \frac{\arctan(uf(x))}{1+x^2} dx$
$= \int_{A^c} \frac{\arctan 0}{1+x^2} dx + \int_A \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_A \frac{1}{1+x^2} dx$ OK

c) $I_n = [\frac{1}{n}, n]$ sur I_n

i) $\forall u \in I_n$, $|g(u,x)| \leq \frac{10}{1+x^2}$ g est intégrable

ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $u \mapsto g(u,x)$ est dérivable sur $[\frac{1}{n}, n]$

iii) $\forall u \in I_n$ $\left|\frac{\partial g}{\partial u}(u,x)\right| = \left|\frac{1}{1+x^2} \frac{f(x)}{1+u^2 f(x)}\right|$ ~~$\leq \frac{1}{2u} \frac{1}{1+x^2}$~~

~~$\frac{n}{2} \frac{1}{1+x^2}$~~

~~$|f(x)| \in \mathcal{L}^1_+$, Donc par le TCD, F est dérivable sur I_n, alors dérivable sur $(0,+\infty)$~~

~~d) $\frac{F(u)-F(0)}{u} = \int_0^\infty \frac{\arctan(uf(x))}{(1+x^2)u} dx$~~

~~$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{(1+x^2)} dx < +\infty$~~ $\left|\frac{f(x)}{1+u^2 f^2(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{\frac{1}{f}+u^2 f}\right| \leq \left|\frac{1}{2u}\right|$ ok

donc $\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right| \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1_+$ par le TCD, F est dérivable ok
sur I_n, alors sur $(0,+\infty)$ ok

d) $F'(0)$ existe ssi $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx < +\infty$ ok

$\Leftarrow$: $F'(0) = \lim_{u\to 0} \int_0^\infty \frac{\arctan(uf(x))}{u(1+x^2)} dx \leq \lim \int_0^\infty \frac{uf(x)}{u(1+x^2)} dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x^2} < +\infty$

et $\left|\frac{\partial g}{\partial u}(u,x)\right| \leq \left|\frac{f(x)}{1+x^2}\right| \in \mathcal{L}^1_+$, $F'(u)$ est continue en $u=0$

$\Rightarrow \liminf_{u\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(uf(x))}{u(1+x^2)} dx \geq \int_0^{+\infty} \liminf_{u\to 0} \frac{\arctan(uf(x))}{u(1+x^2)} dx$ (Fatou)
$= \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ (car $uf(x) \to 0$, $uf(x) \sim \arctan uf(x)$)

donc $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx < +\infty$ OK