1. On fix $u \in \mathbb{R}$ et pour chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n \in \mathbb{R}\setminus\{u\}$ et $u_n \to u$.

On va montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{g}(u_n)-\hat{g}(u)}{u_n-u} = h(u)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{g}(u_n)-\hat{g}(u)}{u_n-u} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iux} \left(\frac{e^{-i(u_n-u)x}-1}{u_n-u} \right) dx$$

Quand $u_n \to u$, $|u_n-u| \to 0$ donc $\exists N$ $\forall n > N$ $\left|e^{-i(u_n-u)x}-1\right| \leq 2(u_n-u)x$

et
$$\left| g(x) e^{-iux} \left(\frac{e^{-i(u_n-u)x}-1}{u_n-u} \right) \right| \leq \left| g(x) e^{-iux} \cdot 2x \right| = \left| 2x e^{-\frac{x^2}{2}-iux} \right|$$
$$= \left| 2x e^{-\frac{x^2}{2}} \right|$$

par la TCD, et $2|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ est mesurable et intégrable.

on a. $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{iux} \left(\frac{e^{-i(u_n-u)x}-1}{u_n-u} \right) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g(x) e^{iux} \left(\frac{e^{-i(u_n-u)x}-1}{u_n-u} \right) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iux} \cdot (-ix)\, dx$$

donc $\hat{g}$ dérivable, et $\hat{g}'(u) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iux} \cdot (-ix)\, dx$ ok

Mais $$\hat{g}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-iux}\, dx = \frac{1}{-iu} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d(e^{-iux}) = \frac{1}{-iu} \int e^{-iux} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)\, dx$$

tu fais une intégration par parties

$$= -\frac{1}{u} \int g(x) \cdot (-ix)\, e^{-iux}\, dx = -\frac{1}{u} \hat{g}'(u)$$

la constante est difficile à lire

on résolve la equation différentielle, on a. $\hat{g}(u) = C e^{-\frac{u^2}{2}}$

Mais $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$ donc $C = \sqrt{2\pi}$, et $\hat{g}(u) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ OK

2. a) pour chaque $u \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n \to u$ $u_n \neq u$

Il faudrait déjà montrer que F est continue sur R_+.

on va montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{F(u_n)-F(u)}{u_n-u} = h(u)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{\sqrt{f(x)^2+u_n} - \sqrt{f(x)^2+u}}{u_n-u}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u_n}+\sqrt{f(x)^2+u}}\, dx$$

Mais $\left| \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u_n}+\sqrt{f(x)^2+u}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{f(x)^2+u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ c'est intégrable. si u > 0

et $$h(u) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f^2+u_n}+\sqrt{f^2+u}}\, dx = \int_{[0,1]} \lim \frac{1}{\sqrt{f^2+u_n}+\sqrt{f^2+u}}\, dx = \int_{[0,1]} \frac{dx}{2\sqrt{f(x)^2+u}}$$

donc F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

$F(0) = \int_{[0,1]} |f(x)|$. $\lim_{u\to 0^+} F(u) - F(0) = \boxed{\int_{[0,1]} \frac{\cancel{\quad}}{\sqrt{f(x)^2+u} + |f(x)|}\, dx \leq \int_{[0,1]} \varepsilon\, dx \leq \varepsilon}$

argument pas clair

donc F est continue dans $[0,+\infty[$.

扫描全能王 创建

b) Si F soit dérivable en 0 . alors $\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f(x)^2 - u_n} + |f(x)|} dx < +\infty$

c'est toujours vrai si u_n>0 ! Tu veux que cette intégrale ait une limite lorsque u_n -> 0, donc, qu'elle soit bornée unifomément p/r n.

et $\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f(x)+u_n} + |f(x)|} dx \geq \int_{[0,1]} \frac{1}{2|f(x)|}$ ~~aussi~~ c'est nécessaire

expliquer d'où vient ce (2+epsilon)

Si $\int_{[0,1]} \frac{1}{|f(x)|} < +\infty$ alors $\int_{[0,1]} \frac{1}{(2+\varepsilon)|f(x)|} > \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f^2(x)+u_n} + |f(x)|} dx$

donc $F'(0) = \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{f^2(x)+\mu)} + |f(x)|} dx$

vérifier les conditions

Alors. le condition nécessaire est $\frac{1}{|f(x)|}$ intégrable dans $[0,1]$

est-ce aussi une conditions suffisante?

3.(a) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$, $u_n \to u$. $|G(u_n) - G(u)| = \left| \int_{[0,1]} |f(x) - u| - |f(x) - u_n| dx \right|$

$\leq \int_{[0,1]} \big| |f(x) - u| - |f(x) - u_n| \big| dx \leq \int_{[0,1]} |u - u_n| dx \leq |u - u_n| \longrightarrow 0$

donc. G est continue sur $\mathbb{R}$

ok (tu aurais pu utiliser le thme du cours).

(b) G dérivable $\Leftrightarrow \forall u$, $u_n \to u$, $u_n \neq u$. $\exists\, g(u)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{G(u_n) - G(u)}{u_n - u} = g(u)$

Si $\lambda(\{x \in [0,1]\ f(x) = u\}) = 0$, on suppose que $A_n = \{x \mid G(x) \leq u_n\}$

tu veux dire f(x) ?

$B_n = \{x \mid G(x) > u_n\}$

$A = \{x \mid Gx < u\}$

$B = \{x \mid Gx > u\}$

~~donc~~

~~donc $\lambda(A) = \lambda(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N} A_n) = \lambda(\{x \mid G(x) \leq \underbrace{\liminf u_n}_{u}\}) = \liminf A_n$~~

~~$\lambda(A) = \lambda(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} A_n) = \lambda(\{x \mid G(x) \leq \limsup u_n\}) = \limsup A_n$~~

NON, on n'a pas forcément A = liminf A_n. ex: f(x)=u constante, u_n choisis > u

et on a $\boxed{\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)}$ $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)$ (le meme.)

faux en général

$G(u_n) = \int_{A_n} u_n - f(x) + \int_{B_n} f(x) - u_n = u_n(\lambda(A_n) - \lambda(B_n)) + \int_{B_n} f(x) - \int_{A_n} f(x)$

3.b) ~~Si G(u) dérivable.~~

on suppose que $A_u = \{x \mid f(x) > u\}$

donc $\lambda(A_u)$ décroissant par u.

tu décomposes l'intégrale de façon compliquée, ce n'est pas nécessaire

$$G(u) = \int_{A_u} f(x) - u + \int_{[0,1]\setminus A_u} u - f(x) = \int_{[0,1]} u - f(x) - 2\int_{A_u} f(x) - u$$

$$= u - \int_{[0,1]} f(x) - 2\int_{A_u} f(x) + 2u\,\lambda(A_u)$$

Si $\lambda(\{x \in [0,1], f(x) = u\}) = 0$ alors $\lambda(A_u)$ continue il faut le montrer

donc $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to u$. $\exists N\ \forall n > N\ |u_n - u| < \varepsilon$.

$$\frac{G(u_n) - G(u)}{u_n - u} = 1 \pm 2\,\frac{\int_{A_{u_n}} (f(x) - u_n) - \int_{A_u} (f(x) - u)}{u_n - u}$$

on suppose que $u_n > u$.

cela ne devrait pas être nécessaire

$A_{u_n} \subset A_u$

on ne trouve pas ça

$$\frac{G(u_n) - G(u)}{u_n - u} = 1 + 2\lambda(A_{u_n}) + 2\,\frac{\int_{A_{u_n}\setminus A_u} (f(x) - u)}{u_n - u}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\lambda(A_{u_n}) = 1 + 2\lambda(A_u)$ à justifier

$$\lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{\int_{A_{u_n}\setminus A_u} (f(x) - u)}{u_n - u}\right| \le \lim_{n\to\infty} 2\lambda(A_{u_n}) - 2\lambda(A_u)$$

$= 0$ (parce que $u_n > f(x) > u$, donc $|f(x) - u| < |u_n - u|$)

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{G(u_n) - G(u)}{u_n - u} = 1 + 2\lambda(A_u)$ c'est dérivable

Si $\lambda(\{x \in [0,1], f(x) = u\}) > 0$ et f dérivable.

on n'a jamais supposé que f est dérivable !

on a deux suites $(u_n) \nearrow u$, $(v_n) \searrow v$.

et $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\lambda(A_{u_n}) + 2\int_{A_{u_n}\setminus A_u} \dfrac{f(x) - u}{u_n - u} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\lambda(A_{v_n}) - 2\int_{A_u\setminus A_{v_n}} \dfrac{f(x) - u}{v_n - u}$

illisible

on suppose que $C_u = \{x \in [0,1], f(x) = u\}$

$$\text{LHS} - \text{RHS} = 2(\lambda(A_{u_n}) - \lambda(A_{v_n})) + 2\int_{A_{u_n}\setminus A_u} \frac{f(x) - u}{u_n - u} - 2\int_{A_u\setminus A_{v_n}} \frac{f(x) - u}{v_n - u}$$

Mais $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_u \setminus A_{v_n}) = \lambda(A_u) - \lambda(\bigcup_{n\ge 1} A_{v_n}) = 0$, donc $\text{LHS} - \text{RHS} \ge 2\lambda(C)$ contradiction!

je ne comprends pas ta preuve, elle est très compliquée. Tu aurais dû appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale du cours.

4. (a) $\forall (u_n) \to u$. On a.

$$|F(u_n)| = \left|\int_0^{\infty} \frac{\arctan(f(x)\, u_n)}{1+x^2} dx\right| \leq \int_0^{\infty} \frac{|\arctan f(x)\cdot u_n|}{1+x^2} dx$$

$$\leq \int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2} dx \text{ c'est intégrable}$$ ok

donc $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = \int_0^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan(u_n f(x))dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(f(x)u)}{1+x^2} dx = F(u)$

par le TCD

c.a.d F est continue.

(b) $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = \lim\limits_{u_n\to+\infty} F(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\arctan(u_n f(x))}{1+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\lim \arctan(u_n f(x))}{1+x^2} dx$

$\left(\left|\frac{\arctan u_n f(x)}{1+x^2}\right| < \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2}\right)$

$= \int_{f(x)\neq 0} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2} dx$. on suppose que $A = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ alors $\int_A \frac{\pi}{2(1+x^2)} dx$ ok

(c) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to u$, $u_n \neq u$.

$$\frac{F(u_n)-F(u)}{u_n-u} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\arctan[f(x)\,u_n] - \arctan[f(x)\,u]}{u_n-u}\right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{[u_n-u]f(x)}{1+f^2(x)\,u_n\cdot u} \cdot \frac{1}{u_n-u} dx$$

et $|\arctan x| \leq |x|$. donc.

$$\left|\frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{(u_n-u)f(x)}{1+f^2(x)\,u_n u}\cdot\frac{1}{u_n-u}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{|f(x)|}{1+f^2(x)\cdot u_n\cdot u} \leq \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{2\sqrt{u_n\cdot u}}$$ est intégrable. $(u_n\cdot u \neq 0)$

il faut une fonction dominatrice pour tout n.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(u_n)-F(u)}{u_n-u} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \lim\limits_{y\to 0} \frac{\arctan y}{y} \cdot (1+f^2(x)u^2)^{-1} dx$ (si $y = \frac{u_n-u}{1+f^2(x)u_n u}$

TCD

$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}(1+f^2(x)u^2)^{-1} dx$ donc F est derivable. ok.

(d) Si $u=0$: F dérivable $\iff \lim\limits_{u\to 0} \int_0^{\infty} \frac{\arctan(u f(x))}{(1+x^2)\,u} dx$ existe.

si f est bornée, alors $\left|\frac{\arctan(u f(x))}{(1+x^2)\,u}\right| \leq \frac{|f(x)|}{1+x^2} \leq \frac{M}{1+x^2}$ est intégrable

donc $\lim\limits_{u\to 0} \frac{F(u)}{u} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = F'(0)$

f bornée est une condition suffisante, mais pas nécessaire. Il faut et il suffit que f(x)/(1+x^2) soit intégrable.

Tu n'as pas assez utilisé les théorèmes du cours (continuité et dérivation sous l'intégrale), tu veux tout redémontrer en partant de zéro. Parfois ça marche, parfois non. Sers-toi du cours !