中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

TD7, EX1 :

La plupart des questions ont été bien traitées. Revoir certaines preuves. Il manque parfois des explications.

$f(x) \geq 0, \forall x \in E$.

donc. $f_n(x) := n \ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right) = \ln\left(1\cdot\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right)$

$\leq \ln\left(\left(\frac{1+n\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1}\right) = (n+1)\ln\left(1+\frac{f(x)}{n+1}\right)$.

d'où sort cette inégalité?

$= f_{n+1}(x)$.

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, μ-p.p.

donc, par TCM.

on a $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)\,d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\mu = \int f(x)\,d\mu$. ok

c'est la même pour case a) et b). ok

EX2. $I_n = \left(\int_{]0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}[} + \int_{]1-\frac{1}{\sqrt{n}},1[} + \int_{]1,1+\frac{1}{\sqrt{n}}[} + \int_{]1+\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty[}\right) \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}$

① $\frac{\sin x^n}{x^n}$ converge uniformément vers à 1 sur $]0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}[$ quand $n\to+\infty$. ok

donc $\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}[} \frac{\sin x^n}{x^n(1+x)}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}[} \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln 2$. ok

② $\left|\int_{]1-\frac{1}{\sqrt{n}},1[} \frac{\sin x^n}{x^n(1+x)}\,dx\right| \leq \int_{]1-\frac{1}{\sqrt{n}},1[} \left|\frac{\sin x^n}{x^n(1+x)}\right| dx \leq \int_{]1-\frac{1}{\sqrt{n}},1[} \frac{1}{1+x}\,dx < \int_{]1-\frac{1}{\sqrt{n}},1[} 1\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}$. ok

$\left|\int_{]1,1+\frac{1}{\sqrt{n}}[} \frac{\sin x^n}{x^n(1+x)}\,dx\right| \leq \int_{]1,1+\frac{1}{\sqrt{n}}[} 1\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ok

$\left|\int_{]1+\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty[} \frac{\sin x^n}{x^n(1+x)}\,dx\right| \leq \left|\int_{]1+\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty[} \frac{1}{x^n(1+x)}\,dx\right| \leq \left|\int_{]1+\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty[} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx\right| \leq \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$

donc ⓪ $\left|\lim_{n\to+\infty}(I_n - \ln 2)\right| \to 0$.

$\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2$. ok

en utilisant le TCD, tu auras pu éviter de découper R_+ en 4 morceaux.

Ex 3.

explique tu raisonnes par contradiction

(a) s'il existe $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n>N$, t.q.

$$\mu(\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})\geq\delta$$

alors $\int_E |f_n(x)-f(x)|\,d\mu \geq \delta\varepsilon$. contraire avec $\int_E |f_n(x)-f(x)|d\mu\to 0$

ok

contre exemple.

$E=\mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\mu([x,y])=(y-x)\cdot\frac{1}{2^n}$ si $n\leq x\leq y<n+1$

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & (\cancel{0\leq x<n})\ (\text{autre})\\ 2^n & (\cancel{m\leq x<m+1,\ m\in\mathbb{Z}_{\geq n}})\ (n\leq x<n+1)\end{cases}$$

$f(x)=0$.

Détailler un peu plus le calcul

(b) $f_n\to f$ μ-p.p $\Rightarrow$ $\boxed{\mu(\{x\in E \mid f(x)-f_n(x)\neq 0\})\to 0}$

NON ! on ne peut rien dire sur cet ensemble il peut être = E

$\mu(\{x\in E \mid f(x)-f_n(x)\neq 0\})\geq\mu(\{x\in E \mid |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})$, $\forall\varepsilon>0$

revoir cette question

donc, $\mu(\{x\in E \mid |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})\to 0$, $\forall\varepsilon>0$.

contre exemple.

$E=[0,1]$. $\forall\, 2^k\leq n<2^{k+1}$

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & (x\in[\frac{n-2^k}{2^k},\frac{n+1-2^k}{2^k}[)\\ 0 & (\text{autre})\end{cases}$$

et alors, que se passe-t-il avec ces fonctions?
Il faut montrer qu'on a bien un contre-exemple

$f(x)\equiv 0$

(c) par $\forall\varepsilon>0$, $\mu(\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})\to 0$.

donc $\forall k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\exists N_k\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N_k$,

$\mu(\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\})<\frac{1}{2^k}$.

$B_k:=\{x\in E \mid |f_{N_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(B_k)<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=1<+\infty$.

[redacted]

扫描全能王 创建

donc $\mu(\limsup_{n\to+\infty} B_n)=0. \Rightarrow \mu(\liminf_{n\to+\infty} B_n^c)=\mu(E)$

$\liminf_{n\to+\infty} B_n^c = \{x\in E \mid \exists n\in\mathbb{N}, \forall k\geq n, |f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}.$

donc cet ensemble est composé des points x tels que f_n(x) -> f(x)

donc $\lim_{k\to+\infty} f_{n_k} \to f$, μ-p.p.

car le complémentaire de cet ensemble est négligeable

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

Ex4.

① s'il existe $F \subset A$ t.q. $\mu(F) \neq 0$, $|f| > 2$ sur F.

alors $\int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu > \int_F |2-1| d\mu = \mu(F)$

donc $\lim_{n\to+\infty} \int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu \geq \mu(F) > 0$. contradiction. OK

donc $|f| \leq 2$, μ-p.p.

②. $B_n := \{x \in E \mid \cancel{f(x) \notin \{0,1\}} \min\{|f(x)|, |f(x)-1|\} > \frac{1}{n}\}$.

si $\mu(B_n) \neq 0$. $\int_E |\mathbb{1}_{A_m} - f| d\mu > \frac{1}{n}\mu(B_n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} \int_E |\mathbb{1}_{A_m} - f| d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(B_n) > 0$. contradiction

donc $\mu(B_n) = 0$. par $B_{n+1} \supset B_n$.

$\mu(\lim_{n\to+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$.

donc $\mu(\{x \in E \mid f(x)(f(x)-1) \neq 0\}) = 0$. ok

donc $f = \mathbb{1}_A$ p.p. pour un $A \in \mathcal{A}$ comment définis-tu A?

③ $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \Delta A) < +\infty$, donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n\geq N} \mu(A_n \Delta A) = 0$.

$C_N := \bigcup_{n\geq N} (A_n \Delta A)$. $\mu(C_N) \leq \sum_{n\geq N} \mu(A_n \Delta A)$

donc $\lim_{N\to+\infty} \mu(C_N) = 0$. par $C_N \supset C_{N+1}$

$\mu(\bigcap_{N\geq N} C_N) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_N) = 0$. et $\bigcap_{N\geq N} C_N = \{x \in E \mid \lim_{n\to+\infty} (\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A) \neq 0\}$

ok (expliquer un peu pourquoi)

donc $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_A$ μ-p.p. ok

EX5

(a) par EX3, on a $f_{n_k} \to f$ μ-p.p., où $(n_k)_{k\geq 1} \subset [\![1, +\infty[\![$.

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\boxed{\mu(\{f_{n_k} \neq f\}) < \varepsilon.}$

NON (même problème que ci-dessus)
Il faut jouer un peu plus avec des \delta

donc $\mu(\{x \in E \mid |f| \leq g\}) \geq \mu(\{x \in E \mid |f_{n_k}| \geq g\})$
$- \mu(\{x \in E \mid f_{n_k} \neq f\})$
$= \mu(E) - \varepsilon.$

donc $\mu(\{x \in E \mid |f| \leq g\}) \geq \mu(E)$,
$\mu(\{x \in E \mid |f| \leq g\}) = \mu(E)$.

(b) par $|f_n|, |f| < g$, donc $|f_n - f| < 2g$, $\forall n$, μ-p.p.
par la continuité uniforme de l'intégrale. pour un $\varepsilon > 0$ fixé
$\exists\ \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, si $\mu(A) < \delta$, alors $\int_A g \, d\mu < \frac{\varepsilon}{10}$.
pour $\eta = \frac{4}{5\mu(E)}$, par $f_n \to f$ ~~μ-p.p.~~ en mesure
$\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\mu(\{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| > \eta\}) < \delta$.
$B_n := \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| > \eta\}$.
donc $\int_E |f_n - f| \, d\mu = \int_{B_n} |f_n - f| \, d\mu + \int_{B_n^c} |f_n - f| \, d\mu$
$\leq \int_{B_n} 2g \, d\mu + \int_{B_n^c} \eta \, d\mu$
$\leq \frac{\varepsilon}{10} \cdot 2 + \eta \, \mu(B_n^c)$
$\leq \frac{\varepsilon}{5} + \eta \, \mu(E)$
$\leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{4}{5}\varepsilon = \varepsilon$, OK

($\exists N > 0$, $\forall \cancel{k}\, n \geq N$) donc $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$.

扫描全能王 创建