De bonnes choses. Revoir le lemme de Borel-Cantelli, et l'exercice 5a.
Certaines explications devraient être plus détaillées

1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.
   (a) On suppose que f est intégrable. Étudier la convergence de la suite

$$I_n = n \int_E \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu$$

   lorsque $n \to \infty$.
   (b) Même question lorsque $\int_E f d\mu = \infty$.

1.

(a). $I_n = \int_E n \ln\left(1+\frac{f}{n}\right) d\mu$

$= \int_E \ln\left(1+\frac{f}{n}\right)^n d\mu$

car $f \geq 0$, alors $\ln\left(1+\frac{f}{n}\right)^n$ $\boxed{\text{est croissant}}$ et

justifier

$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{f}{n}\right)^n = f$

Par TCM, on a $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_E f d\mu$ ok

(b). c'est également dis que tu peux encore appliquer le TCM

2. Étudier la convergence de la suite

$$I_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} dx$$

lorsque $n \to \infty$. On précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}\right| \leq g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \in]0,1] \\ \frac{1}{x(1+x)} & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$ ok

alors $g(x)$ est intégrable finie. ok

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x \in]0,1[\\ \frac{\sin 1}{2} & x = 1 \\ 0 & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

la 1e limite est fausse

ok

Par TCD on a $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{]0,+\infty[} f d\mu = 1$

3. (*Convergence en mesure*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(x \in E,\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon) \to 0.$$

(a) Montrer que si $\int_E |f - f_n| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Exhiber un contre-exemple à la réciproque est fausse.

(b) Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Exhiber un contre-exemple à la réciproque est fausse.

(c) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une suite de (f_n) qui converge μ-p.p vers f.

(a). Pour $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N, \forall n > N$, $\int_E |f - f_n| d\mu < \varepsilon^2$

alors $\mu(x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon)\, \varepsilon < \int_E |f - f_n| d\mu < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \exists N, \forall n > N, \mu(x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon) < \varepsilon$ c'est vrai, mais ce n'est pas exactement ce qu'on veut montrer. On veut fixer epsilon, et faire tendre la limite vers zero lorsque n -> infty

Le contre-exemple.
Dans l'espace $((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda)$ $f_n = \frac{1}{nx}$, $f = 0$
et $\int_E |f - f_n| d\mu = +\infty$ ok

(b). Car $f_n \to f$ μ-p.p, explique d'où sort cet ensemble

alors $\mu\left(\left(\bigcap_{k>0} \bigcup_{N>0} \bigcap_{n\geq N} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}\}\right)^c\right) = 0$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k>0} \bigcap_{N>0} \bigcup_{n\geq N} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{N>0} \bigcup_{n\geq N} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$

Soit $I_N = \bigcup_{n\geq N} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}$

On a $\mu(\bigcap_{N>0} I_N) = 0$, $\mu(I_1) \leq \mu(E) < \infty$, $I_N \supset I_{N+1}$ ok (suite décroissante)

alors $\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$ ok

et $\mu(\{x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}) \to 0$

et $\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ k

alors $\mu(\{x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) \to 0$ ok

Le contre-exemple : Dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

On a $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$ $(n \in \mathbb{N}, k \in [\![0, 2^n - 1]\!])$

$f \equiv 0$

$f_n \not\to f$ expliquer qu'on n'a convergence en aucun point x, mais que f_n converge vers f en mesure (le montrer)

$(\Leftarrow)$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$

car $\mu(\{x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}) \to 0$

Alors il existe N_k, $\forall n \geq N_k$

$$\mu(\{x \in E, |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}) < \frac{1}{2^k}$$

Soit N_k est croissant on peut s'arranger pour que N_k soit croissante

Alors Pour $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{k \geq 1} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_{N_k}(x)| > \varepsilon\})$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k \in [\![1, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor - 1]\!]} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_{N_k}(x)| > \varepsilon\})}_{A}$$

$$+ \sum_{k \geq \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor - 1} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_{N_k}(x)| > \frac{1}{k}\})$$

$$< A + \sum_{k \geq \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor - 1} \frac{1}{2^k} \text{ est fini}$$

revoir le lemme de Borel Cantelli

Par lemme Borel-Cantelli :

$$\limsup_{k \geq 0} \mu(\{x \in E, |f(x) - f_{N_k}(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

attention ! tu inverses limsup et \mu

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{l \geq k} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_{N_l}(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

\mu( ) est un nombre, on ne peut pas prendre des unions et intersections de nombres !

$$\Rightarrow \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{l \geq k} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_{N_l}(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

$$\Rightarrow f_{N_k} \to f \quad \mu\text{-p.p.}$$

$A_n \to A$

4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu = 0.$$

Montrer que $|f| \leq 2$ μ-p.p., puis qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$ μ.p.p. ok. Montrer ensuite que si $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \Delta A) < \infty$, alors $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_A$ μ-p.p.

4. Si $\mu(|f|>2)>0$

alors $\int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| \geq \mu(|f|>2)$ contradiction

$\Rightarrow \mu(|f|>2) = 0 \Rightarrow |f| \leq 2$ μ-p.p.

Similaire : $\mu(\underbrace{f^{-1}((-\infty, -\frac{1}{k}) \cup (\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}) \cup (1+\frac{1}{k}, +\infty))}_{A_k}) = 0$ ok

$A_k \subset A_{k+1}$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{k\geq 0} A_k) = 0 \Rightarrow f = 0$ ou 1 μ-p.p. ok

$\Rightarrow f = \mathbb{1}_{f^{-1}(1)}$ μ-p.p. ok

on peut prendre $A = f^{-1}(1)$

$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \Delta A) < \infty$

Par Thm de Borel-Cantelli

$\mu(\limsup_{n\geq 1}(A_n \Delta A)) = 0$

$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{x : \mathbb{1}_{A_k}(x) \neq \mathbb{1}_A(x)\}) = 0$

$\mu((\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{x : \mathbb{1}_{A_k}(x) = \mathbb{1}_A(x)\})^c) = 0$

$\mu(\{x : \mathbb{1}_{A_n}(x) \not\to \mathbb{1}_A(x)\}) = 0$

Alors $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_A$ μ-p.p. ok

5. (*Un théorème de convergence dominée plus fort.*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

(a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.

(b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale (rappeler qu'il a été prouvé dans TD6, Ex5) que $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$.

Comme l'hypothèse (convergence en mesure) est plus faible que la convergence presque partout dans le TCD, le théorème ici est plus fort que le TCD habituel.

Car $f_n \to f$

attention, on ne suppose pas que f_n converge simplement vers f(x), on ne suppose que la convergence de f_n vers f en mesure

(a), $\{x \in E : |f(x)| > g(x)\}$

$$\subset \bigcup_{n \geq 0} \{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\}$$

Donc : $\mu(\{x \in E : |f(x)| > g(x)\}) \leq \mu(\bigcup_{n \geq 0} \{x \in E : |f_n(x)| > g\})$

$$\leq \sum_{n \geq 0} \mu(\{x \in E : |f_n(x)| > g\})$$

$$= \sum_{n \geq 0} 0 = 0$$

$\Rightarrow \mu(\{x \in E : |f(x)| > g(x)\}) = 0$

$\Rightarrow |f| \leq g$ μ-p.p.

(b). Par TD6-EX5 (2),

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A g \, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$

d'où sort cette caractérisation de la convergence p.p.?

$f_n \to f$ μ-p.p. $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} \{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$

$\Rightarrow \forall k, \mu\left(\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} \{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$

$\Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, \mu(\underbrace{\{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}\}}_{B}) < \delta$

alors $\forall n > N$, $\int_E |f_n - f| \, d\mu = \int_E |f_n - f| \mathbb{1}_B \, d\mu + \int_E |f_n - f| \mathbb{1}_{E \setminus B} \, d\mu$

$$< 2\int_B g \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \mu(E \setminus B)$$

$$\overset{\mu(B) < \delta}{<} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \mu(E) = \varepsilon$$ ok

donc on a $\lim \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$ ok