La plupart des questions ont été bien comprises. Revoir certains détails de preuves.

Charles.

中国科学技术大学

1. ~~$A_n = \{$~~ Soit $A_n = \{x \in E \mid 2^n \le |f(x)| \le 2^{n+1}\}$

Alors, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mathbb{1}_{A_n} \le |f| < \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n+1} \mathbb{1}_{A_n} = 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mathbb{1}_{A_n}$ ok

$\Rightarrow \int_E \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mathbb{1}_{A_n} d\mu \le \int_E |f| d\mu < 2 \int_E 2^n \mathbb{1}_{A_n} d\mu$

i.e. $\cancel{\int_E} \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n) \le \int_E |f| d\mu < 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n)$

Donc, $\int_E |f| d\mu < \infty \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \le |f| < 2^{n+1}) < \infty$ OK

Soit $B_n = \{x \in E \mid |f(x)| \ge n\}$

Alors, $\sum_{n\ge1} \mathbb{1}_{B_n} \le |f| < \sum_{n\ge0} \mathbb{1}_{B_n}$. justifier un peu cet encadrement

$\Rightarrow \int_E \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} d\mu \le \int_E |f| d\mu \le \int_E \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} d\mu$

i.e. $\sum_{n\ge1} \mu(B_n) \le \int_E |f| d\mu \le \sum_{n\ge1} \mu(B_n) + \mu(E)$

Or $\mu(E) < \infty$, donc $\int_E |f| d\mu < \infty \iff \sum_{n\ge1} \mu(|f| \ge n) < \infty$ ok

2. 1) Si $\int f = 0$, $\int |f| = |\int f| = 0 \Rightarrow |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ ok

Donc, pour $\alpha = 1$, $|f| = \alpha f$

2) Si $\int f \ne 0$, soit $\alpha = \frac{\int |f|}{\int f}$, $|\alpha| = 1$

$\int \alpha f = \alpha \int f = \int |f| \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int \mathrm{Im}(\alpha f) = 0$

Or $\alpha \int f = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \le \int |\alpha f| = \int |f|$ et $\alpha \int f = \int |f|$

$\Rightarrow \int \mathrm{Re}(\alpha f) = \int |f|$, i.e. $\int (|f| - \mathrm{Re}(\alpha f)) = 0$

Or $\forall x \in E$, $|f| - \mathrm{Re}(\alpha f) \ge 0$ ok

presque partout

$\Rightarrow |f| = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\alpha f| = |f|$

$\Rightarrow |f| = \alpha \mathrm{Re}(\alpha f) = \alpha f$. □

3.(a) $F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ f(1), & x \in (1,2]. \end{cases}$ est-ce le meilleur choix pour prolonger f?

$D_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto nf(x+\frac{1}{n}) - nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$

On D_n est mesurable.

Donc, $f' = \lim_{n\to\infty} D_n$ est mesurable. vrai sauf en x=1 (le membre de droite = 0)

(b) $\exists M>0$, t.q. $|f'| < M$ sur $[0,1]$

Alors, $\exists N>0, \forall n>N$, $|D_n| < M+1$. pourquoi M+1? Thme des accroissements finis

Par TCD, $\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 D_n(x)\,dx$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_1^{1+\frac{1}{n}} f - \int_0^{\frac{1}{n}} f\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f\left(\mathbb{1}_{[1,1+\frac{1}{n}]} - \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\right)$

Par le thm des accroissements finis, on a

$|f(x)-f(0)| \leq M(x-0)$, i.e. $f(0) - Mx \leq f(x) \leq f(0) + Mx$

$\Rightarrow \int_0^1 n(f(0)-Mx)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,dx \leq \int_0^1 nf(x)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,dx \leq \int_0^1 n(f(0)+Mx)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,dx$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$f(0) - \frac{M}{m}$ lettres difficiles à lire $\qquad f(0) + \frac{M}{m}$

$n \to +\infty$, on a $f(0) \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nf(x)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,dx \leq f(0)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,dx = f(0)$

De même, on a $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathbb{1}_{[1,1+\frac{1}{n}]}\,dx = f(1)$

$\Rightarrow \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ ok

4.(a) fixe x, $(f_n(x))_n \nearrow e^{-x}$ justifier cette affirmation

$$\Rightarrow \left|\mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\right| \le \left|\mathbb{1}_{[0,n]}(x)e^{-x}x^{\alpha-1}\right| \le \left|e^{-x}x^{\alpha-1}\right|$$

Par TCD, $\lim_{n\to\infty} I_{\alpha,n} = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = \Gamma(\alpha)$, $\alpha>0$.

Si $\alpha\le 0$, $I_{\alpha,n} \ge \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{\alpha-1}\,dx = +\infty$ ok

$\Rightarrow \forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} I_{\alpha,n} = \Gamma(\alpha)$ ok

De même, $J_{\alpha,n} = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \\ +\infty, & \alpha\ge 1. \end{cases}$ ok

(b) Soit $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

$|F_n| \le \sum_{k=0}^{n}|f_k| \le \sum_{k=0}^{+\infty}|f_k|$ et $\lim_{n\to\infty} F_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ cette limite existe-t-elle en tout point x?

Par TCM, $\int_E \sum_{n\ge0}|f_n|\,d\mu = \sum_{n\ge0}\int_E |f_n|\,d\mu < \infty$ ok. En déduire une domination pour les F_n

Par TCD, $\sum_{k\ge0}\int_E f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_E f_k\,d\mu$ ok

$= \lim_{n\to\infty}\int_E F_n\,d\mu$

TCD

$= \int_E \lim_{n\to\infty} F_n\,d\mu$

$= \int_E \sum_{n\ge0} f_n\,d\mu$

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n\ge0} x^n \ln x$$

Soit $f_n(x) = x^n\ln x$, $x\in(0,1)$

$$\int_0^1 |x^n\ln x|\,dx = -\int_0^1 x^n\ln x\,dx = -\frac{1}{n+1}\left((x^{n+1}\ln x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^n\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x^{-n-1}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-(n+1)x^{-n-2}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

中国科学技术大学

Donc, $\int_0^1 \sum_{n\geq 0} |x^n \ln x| \, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ ok

Donc, $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} f_n(x) dx$

$= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 f_n(x) \, dx$

$= -\frac{\pi^2}{6}$ ok

5. (a) $\left| |f| \mathbb{1}_{|f|>n} \right| \leq |f|$, et f est intégrable

Par TCD, $\lim_{n\to\infty} \int_E |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu = \int_E 0 \, d\mu = 0$

ok

(b) fixe $\varepsilon > 0$,

par (a), $\exists N > 0, \forall n \geq N, \int_E |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\int_A |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu \leq \int_E |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

$\int_A |f| \mathbb{1}_{|f| \leq N} d\mu = \int_A |f| \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{k-1 \leq |f| \leq k} d\mu$

$\leq \int_E k \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_A d\mu$

pourquoi se fatiguer à découper [0,N] en sous-intervalles? Tu sais que sur le support |f| \leq N

$= \sum_{k=1}^{N} \int_E k \mathbb{1}_A d\mu$

$= \sum_{k=1}^{N} k \mu(A) = \frac{N(N+1)}{2} \mu(A)$

Prend $\delta = \frac{\varepsilon}{N(N+1)}$, $\forall \mu(A) < \delta$, $\int_A |f| \mathbb{1}_{f^{-1}([0,N])} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow \int_A |f| \, d\mu = \int_A |f| \mathbb{1}_{|f|>N} d\mu + \int_A |f| \mathbb{1}_{|f| \leq N} d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

ok

(c) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{N(N+1)} > 0,\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, t.q. $|u_1 - u_2| < \delta$,

$$|F(u_1) - F(u_2)| = \int_{[u_1, u_2]} f(x)\, dx < \varepsilon \ \text{(Par (b))}. \ \square$$

OK