Très bon travail
(revoir l'exercice 4)

TD 6

1.
a) $\int_E |f| \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int |f| \mathbb{1}_{(2^n \le |f| < 2^{n+1})}$

$2\cdot 2^n \mu(2^n \le |f| < 2^{n+1}) \ge |f| \mathbb{1}_{\{2^n \le |f| < 2^{n+1}\}} \ge 2^n \mu(\{2^n \le |f| < 2^{n+1})$

donc, $2\cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \le |f| < 2^{n+1}) \ge \int_E |f| \, d\mu \ge \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \le |f| < 2^{n+1})$

Alors, $\int_E |f| \, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \le |f| < 2^{n+1}) < \infty$

OK

b)
Si $\mu(E) < \infty$.

$$\int_E |f| \, d\mu = \int \sum_{n\ge 0} |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}}$$

On sait que

$\sum_{n=0}^{k} |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}} \nearrow \sum_{n\ge 0} |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}} = |f|$

par TCM $\Rightarrow \int_E |f| \, d\mu = \int \sum_{n\ge 0} |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}}$

$= \sum_{n\ge 0} \int |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}}$

$\sum_{n\ge 0} n \cdot \mu(|f| \in [n, n+1)) \le \sum_{n\ge 0} |f| \cdot \mathbb{1}_{\{n \le |f| < n+1\}} < \sum_{n\ge 0} (n+1) \cdot \mu(|f| \in [n, n+1))$

$= \sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n)$

expliquer un peu plus

$= \sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n) + \sum_{n\ge 0} \mu(|f| \in [n, n+1))$

$= \sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n) + \underbrace{\mu(E)}_{<+\infty}$

donc, $\int_E |f| \, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n) < \infty$ OK

c) si $\mu(E) = \infty$, alors $\int_E |f| \, d\mu < \infty \Rightarrow \underbrace{\sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n)}_{<\infty}$

mais $\Leftarrow$ n'est pas vrai

on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ OK

$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = +\infty$ mais $\sum_{n\ge 1} \mu(|f| \ge n) = 0 < \infty$.

(2). $\int_E f\,d\mu = \int_E \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int_E \mathrm{Im}(f)\,d\mu$

$$|f| = \max_{|a+bi|=1}\left(a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\right)$$

$$\Rightarrow \int_E |f|\,d\mu = \int_E \max_{|a+bi|=1}\left(a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\right) d\mu$$

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| = \max_{|a+bi|=1} a\int_E \mathrm{Re}(f)\,d\mu + b\int_E \mathrm{Im}(f)\,d\mu$$

$$= \max_{|a+bi|=1} \int_E a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\,d\mu$$

$\forall\ |a+bi|=1$, $\int_E a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\,d\mu \le \int_E \max_{|a+bi|=1}\left(a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\right) d\mu$.

$\Rightarrow \max_{|a+bi|=1} \int_E a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\,d\mu \le \int_E \max_{|a+bi|=1}\left(a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\right) d\mu$

si "=" est vrai, alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a+bi|=1$

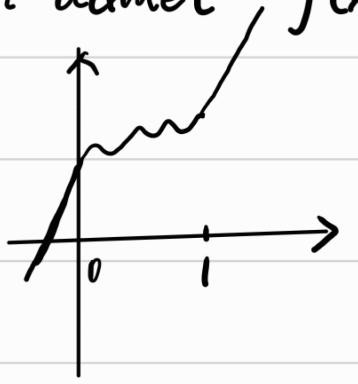
t.q. $a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f) = \max_{|a+bi|=1}\left(a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)\right)$, μ-p.p.

$\Rightarrow a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f) = |f|$, μ-p.p.

On met $\alpha = a+bi$, $\alpha f = a\mathrm{Re}(f) + b\,\mathrm{Im}(f)$.

donc $\alpha f = |f|$ μ-p.p. OK

3) (a) On ~~admet~~ prolonge g sur R telle que: $g(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[0,1] \\ f'(0)x+f(0), & x<0 \\ f'(1)x+f(1)-f'(1), & x>1 \end{cases}$



$$g'(x) = \begin{cases} f'(x), & x\in[0,1] \\ f'(0), & x<0 \\ f'(1), & x>1 \end{cases}$$

dire que g est dérivable sur R

$g_n(x) = n\left[g(x+\frac{1}{n}) - g(x)\right]$ est mesurable, sur R

car $g(x)$ est continue.

pour tout x dans [0,1] $g'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) \Rightarrow g'(x)$ est mesurable OK

$\Rightarrow f'(x)$ est mesurable sur [0,1].

(b) $|f'| \leq M$, $M>0 \Rightarrow |g'(x)| \leq M, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\int |g'(x)|\, \mathbb{1}_{[0,1]}\, d\lambda \leq M$$

On sait que $\exists\, m\in[x, x+\frac{1}{n}]$ t.q.

$$g'(m) = n\left[g(x+\tfrac{1}{n}) - g(x)\right] = g_n(x)$$

$\Rightarrow |g_n(x)| \leq |g'(m)| \leq M$ OK (ou en utilisant le thme des accroissements finis)

$$\Rightarrow |g_n(x)\cdot \mathbb{1}_{[0,1]}| \leq M\cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

et $\int M\cdot \mathbb{1}_{[0,1]} = M \Rightarrow M\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}$ intégrable

par TCD,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int g'(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}$$

$$= \int \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}$$

TCD

$$= \lim_{n\to+\infty} \int g_n(x)\cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\int n\, g(x+\tfrac{1}{n})\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}\, d\lambda - \int n\, g(x)\mathbb{1}_{[0,1]}\, d\lambda\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\int n\, g(x)\cdot\mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]}\, d\lambda - \int n\, g(x)\mathbb{1}_{[0,1]}\, d\lambda\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\int n\, g(x)\cdot\mathbb{1}_{[1,1+\frac{1}{n}]}\, d\lambda - \int n\, g(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\, d\lambda\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\int n\cdot\left(f'(1)x+f(1)-f'(1)\right)\cdot\mathbb{1}_{[1,1+\frac{1}{n}]}\, d\lambda - \int n\cdot f(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\, d\lambda\right]$$

$$= f(1) - \lim_{n\to+\infty}\int n\cdot f(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\, d\lambda = f(1) - f(0)$$ OK

car: On sait que $n\int f(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\, d\lambda \in \left[f(x)_{\min[0,\frac{1}{n}]},\ f(x)_{\max[0,\frac{1}{n}]}\right]$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \boxed{f(x)_{\max[0,\frac{1}{n}]}} = f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \boxed{f(x)_{\min[0,\frac{1}{n}]}}$ mauvaises notations

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int n\, f(x)\cdot\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\, d\lambda = f(0)$$ OK

4) a) $I_{\alpha,n} = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}}_{f_n(x)}\, dx$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x} x^{\alpha-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)} = g(x)$$

justifier

On sait que $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(\forall n)$

$$\text{TCM} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_{\alpha,n} = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$$

$$\overset{\text{TCM}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

que vaut cette fonction de \alpha?

$$J_{\alpha,n} = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathbb{1}_{[0,n]}}_{f_n'(x)}\, dx$$

ne pas noter cette fonction f_n', on pense qu'il s'agit de la dérivée de f_n

$f_n'(x)$ ont mesurable positive

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = e^{(\alpha-1)x}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty)} = g'(x)$$

De même, $\lim_{n\to+\infty} J_{\alpha,n} \overset{\text{TCM?}}{=} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\, dx$

la sute (f_n') est-elle croissante?

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases}$$

(b) $g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} |f_n(x)|$, $g(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k(x) = \sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$

$\Rightarrow g_k(x) \uparrow_k g(x)$, par TCM, on a

$$+\infty > \lim_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)\, d\mu = \int_E \lim_{k\to+\infty} g_k(x)\, d\mu = \int_E g(x)\, d\mu$$

OK

$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$ est intégrable. et

attention, les f_n ne sont pas positives, donc T_k(x) n'est pas non plus toujours positif

$$|T_k(x)| \le g_k(x) \le g(x)$$

$$\lim_{k\to+\infty} T_k(x) = \sum_{n\ge 0} f_n(x) = T(x), \quad |T(x)| \le g(x)$$

Attention, la limite T(x) n'existe pas forcément en tout point, car g(x) peut diverger en certains points (qui forment un ensemble négligeable).

On sait déjà que $g(x)$ est intégrable.

$\Rightarrow$ par TC~~M~~, $\lim_{k\to+\infty} \int_E T_k(x)\, d\mu = \int_E T(x)\, d\mu$

non, le TCD

#.

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln x}{1-x} \mathbb{1}_{(0,1)}\, dx$$

On met $f_n(x) = x^n \ln x \, \mathbb{1}_{(0,1)}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mu = \int_0^1 x^n \ln x\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, d\mu \le \sum_{n\ge 0} \left|\frac{-1}{(n+1)^2}\right| = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

c'est vrai parce que f_n garde le même signe sur tout l'intervalle

et $\frac{\ln x}{1-x} = \sum f_n(x)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx = \sum_{n\ge 0} \int_E f_n\, d\mu = \sum_{n\ge 0} \frac{-1}{(n+1)^2} = \frac{-\pi^2}{6}$$

OK

5) (a) Pf: On ~~admet~~ pose $g_n(x) = |f| \mathbb{1}_{|f|>n}$

alors, $g_n(x) \downarrow g(x) = 0$, $g_n(x) \geq 0$.

$g_n(x) \leq |f|$ et $|f|$ intégrable, $g_n(x)$ mesurable.

Par TCD,

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n(x) d\mu$$

$$= \int \lim_{n\to+\infty} g_n(x) d\mu$$

$$= \int g(x) d\mu = \int 0 d\mu$$

$$= 0.$$ OK

(b)

par (a). $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. $n \geq N \Rightarrow \int f \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

$B_n = \{x \mid |f| > n\}$, $\forall A \in \mathcal{A}$

$A = (B_n \cap A) \sqcup (B_n^c \cap A)$

si $\mu(A) < \delta$, $\mu(B_n \cap A) + \mu(B_n^c \cap A) = \mu(A) < \delta$

$\Rightarrow \mu(B_n \cap A) < \delta$

$\quad \mu(B_n^c \cap A) < \delta$

$$\int_A |f| d\mu = \int |f| (\mathbb{1}_{B_n \cap A} + \mathbb{1}_{B_n^c \cap A}) d\mu$$

$$= \int |f| \mathbb{1}_{B_n \cap A} d\mu + \int |f| \mathbb{1}_{B_n^c \cap A} d\mu$$

On sait que $\int |f| \mathbb{1}_{B_n} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\int |f| \mathbb{1}_{B_n \cap A} \leq \int |f| \mathbb{1}_{B_n} < \frac{\varepsilon}{2}$

et pour $x \in B_n^c \cap A$, $|f(x)| \leq n$

donc $\int |f| \mathbb{1}_{B_n^c \cap A} \leq \int n \mathbb{1}_{B_n^c \cap A} = n\mu(B_n^c \cap A)$

$< n\delta$.

donc on admet $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$

$\Rightarrow n\delta < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$. OK

(c) $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{[0,u]} \, d\mu$

On admet $f(u,x) = \begin{cases} f(x) \mathbb{1}_{[0,u]}, & u \geq 0 \\ f(x) \mathbb{1}_{[u,0]}, & u < 0 \end{cases}$

on sait que :

1) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f(u,x)$ est mesurable.

2) pour $\forall x \neq u_0$, $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $f(u,x)$ est continue en u_0

3) $f(u,x) \leq |f(u,x)| \leq |f(x)|$ et $|f(x)|$ est intégrable.

$\Rightarrow \int f(u,x)$ est continue pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow F(u)$ est continue Oui, c'est dans le cours

par (b) on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\lambda < \varepsilon$

donc, pour $\forall |x-y| < \frac{\delta}{2}$, on admet

$A = (x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}) \Rightarrow |F(x) - F(y)| = \left|\int_A f \, d\lambda\right|$

$\leq \int_A |f| \, d\lambda$

$< \varepsilon$ OK

$\Rightarrow F(u)$ est uniformément continue.