Bon travail, certaines affirmations devraient être mieux justifiées.
Revoir l'exercice no 4.

TD5 : Intégration

Tuesday - Mar 12, 2024

1. (*Mesure image*) On prend la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et on considère des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables (par rapport à la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$). Décrire la mesure $f_*\lambda$ dans le cas des applications suivantes :
   (a) $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La mesure $f_*\lambda$ est-elle σ-finie ?
   (b) $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Donner un exemple d'application borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différente de l'identité, telle que $f_*\lambda = \lambda$.

1. (a). Non, car $f_*\lambda(A) = \begin{cases} +\infty & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$

Si $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ des ensemble mesurable t.q. $\lim_{n\to\infty} E_i = A$

et $0 \in E_n$, Alors $f_*\lambda(E_n) = +\infty$

donc $f_*\lambda$ n'est pas σ-finie. OK

(b). $f_*\lambda$ est σ-finie

On peut choisir les ensemble $E_n = (-n, n)$

Alors $E_n \subset E_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} E_n = \mathbb{R}$,

et $f_*\lambda(E_n) = \lambda(f^{-1}(E_n)) = \lambda((-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})) = n$ est finie

mieux décrire f*\lambda

(c). On peut choisir $f = -id$

Alors $f_*\lambda(A) = \lambda(-A) = \lambda(A)$

justifier cette égalité

2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : E \to F$ une fonction mesurable. Soit $\phi : F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_F \phi(x) f_* \mu(dx) = \int_E \phi(f(x)) \mu(dx).$$

2. ① D'abord, le cas de ϕ est ~~escalier~~ étagée est facile

Soit $\phi = \mathbb{1}_A$, alors $\int_F \phi(x) f_* \mu(dx) = f_* \mu(A)$

$= \mu(f^{-1}(A))$

et $\int_E \phi(f(x)) \mu(dx) = \int_E \mathbb{1}_A(f(x)) \mu(dx) = \int_E \mathbb{1}_{f^{-1}(A)} \mu(dx)$

$= \mu(f^{-1}(A)) = \int_F \phi(x) f_* \mu(dx)$

+ combinaisons linéaires

② Et Soit ϕ_n des function ~~escalier~~ et $\phi_n \to \phi$, et croissante à n

et on a alors $\phi_n \circ f \to \phi \circ f$ ~~escalier~~

$\int_F \phi(x) f_* \mu(dx) \overset{TCM}{=} \lim_{n \to \infty} \int_F \phi_n(x) f_* \mu(dx)$

$\int_E \phi(f(x)) \mu(dx) \overset{TCM}{=} \lim_{n \to \infty} \int_E \phi_n(f(x)) \mu(dx)$

et $\int_F \phi_n(x) f_* \mu(dx) = \int_E \phi_n(f(x)) \mu(dx)$ (car 1)

alors $\int_F \phi(x) f_* \mu(dx) = \int_E \phi(f(x)) \mu(dx)$

ok

$\square$

3. Soit f une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Indication : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles $A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\}$, $n \geq 1$.

3. pour tout $\eta > 0$, soit $A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\}$

Alors on doit montrer que

expliquer pourquoi c'est cet ensemble qu'il faut considérer !

$$\mu\left(\left(\bigcap_{k>0}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>N} A_{\frac{1}{k},n}\right)^C\right) = 0$$

$$\iff \mu\left(\bigcup_{k>0}\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n>N} A_{\frac{1}{k},n}\right) = 0$$

On a seulement besoin de montrer que pour tout k,

$$\mu\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n>N} A_{\frac{1}{k},n}\right) = 0$$

$$\iff \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_{\frac{1}{k},n}\right) = 0$$

Par lemme de Borel-Cantelli

On a seulement besoin de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{\frac{1}{k},n}) < \infty$$

$$\text{On a } C = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu > \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathbb{1}_{\{f(x) > \frac{1}{k}n^{\alpha}\}}\, d\mu$$

par Markov $> \frac{1}{k}n^{\alpha}\,\mu(\{f(x) > \frac{1}{k}n^{\alpha}\})$

$$= \frac{1}{k}n^{\alpha+1}\,\mu(A_{\frac{1}{k},n})$$

$$\text{Alors } \mu(A_{\frac{1}{k},n}) < \frac{Ck}{n^{\alpha+1}}$$

ok

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{\frac{1}{k},n})$ converge

ok □

4. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}_+$ positives mesurables, convergeant μ-p.p. vers une fonction f. On suppose que

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu < \infty. \quad (1)$$

Montrer alors que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

Donner un énoncé analogue pour des fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables.

Permier partie, pour positives

On a $\inf_{k\geq n} f_n \nearrow f$ μ.p.p.

et par TCM $\lim \int_E \inf_{k\geq n} f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$ ok

car $\boxed{\inf(f_n, f) + \sup(f_n, f) = 2f}$??

je ne comprends pas !

alors $\lim \int_E \sup(f_n, f) = \int_E f d\mu$

et $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = \lim \int_E (f - \inf(f_n, f)) d\mu + \lim \int_E (\sup(f_n, f) - f) d\mu$

$= 2\int_E f \, d\mu - \lim \int_E \inf(f_n, f) d\mu - \lim \int_E \sup(f_n, f) d\mu$

$= 0$

Pour général cas

on doit changer le (1) condition à

$\int_E f_n^+ \to \int_E f^+$, $\int_E f_n^- \longrightarrow \int_E f^-$

5. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_0^1 f(x^n)dx\right)_{n\geq 1} ?$$

①. Si f est décroissante

Soit $g_n(x) = f(x^n)$

alors $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$

et $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ justifier que cette limite existe

Par TCM, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx \overset{TCM}{=} \int_0^1 \lim_{t\to 0^+} f(t)dx$$
$$= \lim_{t\to 0^+} f(t)$$ ok

②. Si f est croissante

Soit $g_n(x) = f(x^n)$

alors $|g_n(x)| \leq f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\int f\,dx < \infty$

et $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$

Par TCD, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx \overset{TCD}{=} \int_0^1 \lim_{t\to 0^+} f(t)dx$$
$$= \lim_{t\to 0^+} f(t)$$
ok