Très bon travail. Tu pourrais donner parfois un peu plus de détails

1: (a) On sait que $\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{P}(X>1)^n$ pour touts $n \in \mathbb{N}^*$

et $\mathbb{P}(X>0) = 1$

Soit $m = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$.

alors $\mathbb{P}(X>m) = \mathbb{P}(X > \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}}_{q \text{ fois}}) = \mathbb{P}(X > \frac{1}{p})^q$ OK

Mais $\mathbb{P}(X>1) = \mathbb{P}(X > \underbrace{\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}}_{p \text{ fois}}) = \mathbb{P}(X > \frac{1}{p})^p$

Donc $\mathbb{P}(X > \frac{q}{p}) = \mathbb{P}(X>1)^{\frac{q}{p}}$

C'est à dire $\mathbb{P}(X>x) = \mathbb{P}(X>1)^x$ pour touts $x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$

Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors il exists une suite $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$

et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ où $x_i \in \mathbb{Q}$ pour touts i

Alors $\mathbb{P}(X>x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x,+\infty)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(x_i,+\infty))$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(x_n,+\infty))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X>1)^{x_n}$$

$$= \mathbb{P}(X>1)^x$$

Clairement $0 < \mathbb{P}(X>1) < 1$. est-ce si clair? On pourrait avoir P(X>0)=0.

Posons $e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X>1)$ où $\lambda > 0$ OK

On a $\mathbb{P}(X>t)=e^{-\lambda t}$ OK

(b) Supposons $\mathbb{P}(X>t)=e^{-\lambda t}$ pour $\lambda>0$. Soit $a\in\mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{P}([X]=a) = \mathbb{P}(a\leq X<a+1)$$

$$= \mathbb{P}(X\geq a)-\mathbb{P}(X\geq a+1)$$

$$= \lim_{x\to a^+} \mathbb{P}(X>x)-\mathbb{P}(X>x+1)$$

$$= e^{-\lambda a}-e^{-\lambda(a+1)}$$ Montrer que c'est une loi géométrique

2. Si $t\leq 0$, $\mathbb{P}(\frac{1}{N^2}\leq t)=0$

Si $t>0$, $\mathbb{P}(\frac{1}{N^2}\leq t)=\mathbb{P}(N>\frac{1}{\sqrt{t}})+\mathbb{P}(N\leq -\frac{1}{\sqrt{t}})$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= 2\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Donc $p(t)=\frac{d}{dt}\mathbb{P}(\frac{1}{N^2}\leq t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{?}}}e^{-\frac{1}{2t}}$ illisible

3. (a) $E(|XY|)^2=\left(\int_\Omega |X(\omega)Y(\omega)|\,\mathbb{P}(d\omega)\right)^2$

$$\leq \int_\Omega (X(\omega))^2\,\mathbb{P}(d\omega)\cdot\int_\Omega (Y(\omega))^2\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= E(X^2)E(Y^2)$$

par l'inégalité de Hölder pour p=2, on l'appelle plutôt Cauchy-Schwarz

Donc $E(|XY|) \leq \left(E(X^2)E(Y^2)\right)^{\frac{1}{2}}$ OK #

(b) par (a), $E(|X_1X_2\cdots X_n|) \leq E(X_1^2)^{\frac{1}{2}} E(X_2^2 \cdots X_n^2)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \cdots$

$\leq E(X_1^2)^{\frac{1}{2}} E(X_2^{2^2})^{\frac{1}{2^2}} \cdots E(X_n^{2^n})^{\frac{1}{2^n}}$

Si on pose $p_n = 2^n$ alors $E(X_i^{p_n}) < +\infty$,

donc $E(X_i^{2^i}) < +\infty$ car $2^i \leq 2^n$

pour tout $i \leq n$.

donc $E(|X_1X_2\cdots X_n|) < +\infty$ OK

(c) Soit p_n définie par (b)

$$E\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{k=1}^{n} G_k^2\right)\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n} \exp(\varepsilon G_k^2)\right)$$

Mais $E\left(\left|\exp(\varepsilon G_k^2)\right|^{p_n}\right) = E\left(\exp(\varepsilon p_n G_k^2)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} \exp(\varepsilon p_n x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\left(\varepsilon p_n - \frac{1}{2\sigma_k^2}\right) x^2\right) dx$$

Si $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2p_n\sigma_k^2},\ k = 1, 2, \cdots, n\right\}$

Alors $E\left(\left|\exp(\varepsilon G_k^2)\right|^{p_n}\right) < +\infty$

Et par (b), $E\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{k=1}^{n} G_k^2\right)\right) < +\infty$ OK #

Quelle fonction f prends-tu ici?

4. (a) $E(f(U)) = \lambda\mu \int_{\mathbb{R}_+^2} f(\min(x,y))\, e^{-\lambda x - \mu y}\, dx\, dy$

$$= \lambda\mu \int_{\{0\le x\le y\}} f(x) e^{-\lambda x-\mu y} dx\, dy + \lambda\mu \int_{\{0\le y\le x\}} f(y) e^{-\lambda x-\mu y} dx\, dy$$

$$= \lambda\mu \int_0^\infty f(x) e^{-\lambda x} \left(\int_x^\infty e^{-\mu y} dy\right) dx + \lambda\mu \int_0^\infty f(y) e^{-\mu y} \left(\int_y^\infty e^{-\lambda x} dx\right) dy$$

$$= \lambda \int_0^\infty f(x)\, e^{-(\lambda+\mu)x} dx + \mu \int_0^\infty f(y)\, e^{-(\lambda+\mu)y} dy$$

$$= (\lambda+\mu) \int_0^\infty f(x)\, e^{-(\lambda+\mu)x} dx$$

Donc $P_U = (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)x}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)\, dx$ OK

(b) $E(f(\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y)) = \frac{1}{4\pi} \int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} f(\sqrt{x}\cos y, \sqrt{x}\sin y)\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx\, dy$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(x\cos y, x\sin y)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\, dy$$

détailler le changement de variable

Posons $\begin{cases} u = x\cos y \\ v = x\sin y \end{cases}$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(x\cos y, x\sin y)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\, e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du\, dv$$

Donc $P_{(\sqrt{X}\cos Y,\, \sqrt{X}\sin Y)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du\, dv.$ OK

c) $$E\left(f\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t)\, e^{-\frac{t^2+1}{2} \cdot y^2}\, y\, dt\, dy$$

décrire le changement de variable

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\frac{y^2}{2}(t^2+1)}\, dy \right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

Donc $P_{\frac{X}{Y}} = \frac{1}{\pi(t^2+1)}\, dt$

Quentin