Bon travail, écrit de façon soignée.
Il faudrait revoir le 2)b).

TD 12 (Ex 1, 2)

samedi 6 avril 2024 16:24

$\|\cdot\|_p$ peut être écrit comme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ dans Ex 1 a) et b), puisque l'habitude personnel, mais je change d'après 1) b).

1. a). Soit $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ avec la métrique $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int |\cdot|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$. Alors,

$$\begin{aligned}\|\tau_h(f)\|_{\mathcal{L}^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau_h(f)|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-h)|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \quad (*) \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^p}\end{aligned}$$

quelle formule de changement de variable? Il faudrait dire que \lambda est invariante par translation

d'où on utilise $\boxed{\text{la formule de changement de variable}}$ dans l'étape $(*)$

C'est-à-dire que $\tau_h : \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$ est une isométrie. OK

b). i). Soit $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ avec $1\le p<\infty$. Fixe p. Grâce à les fonctions continues avec support compact sont dense dans $\mathcal{L}^p$. (On va l'appeller $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.)

On peut prendre $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, t.q. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

Maintenant, puisque τ_h est isométrie. (vu en a)), on a $\tau_h(\varphi_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \tau_h(f)$ pour tout h. ok

On a $\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{L}^p} \le \|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} + \|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} + \|\varphi_n - f\|_{\mathcal{L}^p}$ pour tout n

C'est-à-dire

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{L}^p} \le \lim_{h\to0}\|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} + \lim_{h\to0}\|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} + \|f-\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p}.$$ ok $(*)$.

Or, on sait que pour tout n, φ_n est uniformément continue sur l'ensemble compact $\operatorname{supp}\varphi_n$. Donc, fixe n. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}$, il existe $\delta\in\mathbb{N}$, t.q. $\forall h\le\delta$, $|\tau_h\varphi_n(x) - \varphi_n(x)| \le \varepsilon$, qui implique que $\int_{\mathbb{R}} |\tau_h\varphi_n(x) - \varphi_n(x)|^p d\mu \le \varepsilon^p(\mu(\operatorname{supp}\varphi_n) + \delta)$, Alors on a

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} \le \varepsilon^p \mu(\operatorname{supp}\varphi_n), \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Donc $(*)$ devient

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{L}^p} \le \lim_{h\to0}\|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} + \|f-\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p} = 2\|f-\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

Mais, car on a choisit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n\in\mathbb{N}_{>0}$ t.q. $\|f-\varphi_n\|_{\mathcal{L}^p}\le\varepsilon$. C'est

$$\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{L}^p} \le 2\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon.$$

Alors, $\lim_{h\to0}\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$. OK

ii). De même façon, il faut montrer que pour $\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$$\lim_{|h|\to\infty}\|\tau_h\varphi - \varphi\|_p = 2^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_p.$$

Prenons $|h| \ge \sup\operatorname{supp}\varphi$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\tau_h\varphi - \varphi|^p d\lambda &= \int_{\operatorname{supp}\varphi}|\varphi|^p d\lambda + \int_{\operatorname{supp}\tau_h\varphi}|\tau_h\varphi|^p d\lambda \\ &= 2\int_{\operatorname{supp}\varphi}|\varphi|^p d\lambda.\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau_h\varphi - \varphi|^p d\lambda = \int_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi|^p d\lambda + \int_{\operatorname{supp}\tau_h\varphi} |\tau_h\varphi|^p d\lambda$$

$$= 2 \int_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi|^p d\lambda.$$

d'où on utilise la formule de changement de variable. ok

Donc, prenons φ_n une suite de $C_c(\mathbb{R})$ qui converge à f. C'est-à-dire

pour tout ε. il exist n t.q. $\|\varphi_n - f\|_p < \varepsilon$. Donc

$$\lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\| + \lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\| + \lim_{|h|\to\infty} \|\varphi_n - f\|.$$

$$\leq 2\varepsilon + \left|2 \int_{\operatorname{supp}} |\varphi_n|^p d\lambda\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2\varepsilon + 2^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi_n\|_p.$$

$$\leq (2 + 2^{\frac{1}{p}})\varepsilon + 2^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p.$$

$$\lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h f - f\|_p \geq \lim_{|h|\to\infty} \left(\|\tau_h\varphi_n - f\| - \|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\|\right)$$

$$\geq \lim_{|h|\to\infty} \left(\|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\| - \|f - \varphi_n\| - \|\tau_h f - \tau_h\varphi_n\|\right)$$

$$\geq 2^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p - (2^{\frac{1}{p}} + 2)\varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon \to 0$. On a $\lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p$. OK

c). C'est pas necessairement vrai.

i). $f := \mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathcal{L}^\infty$ ne suffit pas. puisque $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = \lim_{h\to 0} \operatorname{esssup} \mathbb{1}_{[0,h] \cup [1,1+h]} = 1$. OK

ii). $f := \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^\infty$ ne suffit pas. puisque $\lim_{|h|\to\infty} \|\tau_h f - f\|_\infty = \lim_{|h|\to\infty} 0 = 0$. OK

d). On peut prendre $f := \mathbb{1}_A$. Alors par b). on a $\forall p$. $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$. $(h \to 0)$.

Puisque $|\mathbb{1}_{\tau_h A} - \mathbb{1}_A| = |\mathbb{1}_{\tau_h A \Delta A}| = |\mathbb{1}_{\tau_h A \cup A} - \mathbb{1}_{\tau_h A \cap A}|$, on a C'est écrit très petit, on a du mal à lire

$$\|\mathbb{1}_{\tau_h A} - \mathbb{1}_A\|_p = \|\mathbb{1}_{\tau_h A \cup A} - \mathbb{1}_{\tau_h A \cap A}\|_p$$

$$\geq \|\mathbb{1}_{\tau_h A \cup A}\|_p - \|\mathbb{1}_{\tau_h A \cap A}\|_p$$

Donc $\|\mathbb{1}_{\tau_h A \cap A}\|_p \geq \|\mathbb{1}_{\tau_h A \cup A}\|_p - \|\mathbb{1}_{\tau_h A} - \mathbb{1}_A\|_p$.

Car $\lim_{h\to 0} \|\mathbb{1}_{\tau_h A} - \mathbb{1}_A\|_p = 0$ (par b)). On a,

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists h_0 > 0. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq h_0.$$

$$\|\mathbb{1}_{\tau_x A \cap A}\|_p \geq \|\mathbb{1}_{\tau_x A \cup A}\|_p - \varepsilon.$$

On peut prendre $\varepsilon < \lambda(A) \leq \|\mathbb{1}_{\tau_x A \cup A}\|_1$. et $p = 1$. On a

$$\|\mathbb{1}_{\tau_x A \cap A}\|_1 > 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad |x| \leq h_0$$

C'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$. $|x| \leq h_0$. il y a $z(x), w(x) \in A$. tels

que $x = z(x) - w(x)$. Alors $x + A \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in A - A$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$. $|x| \leq h_0$. Alors $B_{h_0}(0) \subseteq A - A$. OK

2. a). Puisque $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, on a $f\chi_{[0,x]} \in \mathcal{L}^p([0,x], \mathcal{B}([0,x]), \lambda)$ pour

tout $x \in \mathbb{R}_+$. Grâce à $\mathcal{L}^1 \supseteq \mathcal{L}^p$ en cas mesure fini. On a $f\chi_{[0,x]} \in \mathcal{L}^1[0,x]$

2. a). Puisque $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$, on a $f\chi_{[0,x]}\in\mathcal{L}^p([0,x],\mathcal{B}([0,x]),\lambda)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Grâce à $\mathcal{L}^1\supseteq\mathcal{L}^p$ en cas mesure fini. On a $f\chi_{[0,x]}\in\mathcal{L}^1[0,x]$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Alors F est bien définie.

On va simplifie, de même façon on sait que $f\in\mathcal{L}^p[x,x+h]$ pour tout $x,h\in\mathbb{R}_+$

On peut aussi supposer que $h>0$, puisqu'il n'a relation que $|h|$.

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{|h|^{\frac{1}{q}}}\cdot\sup_x|F(x+h)-F(x)|$$

$$=\lim_{h\to0}\sup_x h^{-\frac{1}{q}}\left|\int_x^{x+h}f(t)\,dt\right|$$

$$=\lim_{h\to0}\sup_x h^{-\frac{1}{q}}\cdot\int_x^{x+h}f(t)\cdot1\,dt$$

$$\le\lim_{h\to0}\sup_x h^{-\frac{1}{q}}\cdot h^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_x^{x+h}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(*).$$

$$=\lim_{h\to0}\sup_x\|f\mathbb{1}_{[x,x+h]}\|_p$$

On utilise l'inégalité de Hölder dans l'étape $(*)$.

absolue

Pour $\int_x^{x+h}|f|^p\,d\lambda$, on va utiliser la continuité ~~absolument~~ de l'intégral :

$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta\ \forall A\subseteq\mathbb{R}.\ \lambda(A)<\delta\Rightarrow\int_A|f|^p\,d\lambda<\varepsilon$ Alors, prenons le même ε,δ.

$$\sup_x\|f\mathbb{1}_{[x,x+h]}\|_p\le\varepsilon^{\frac{1}{p}}\quad\text{quand}\quad h\le\delta$$

Donc $\lim_{h\to0}\frac{1}{|h|^{\frac{1}{q}}}\cdot\sup_x|F(x+h)-F(x)|\le\lim_{h\to0}\sup_x\|f\mathbb{1}_{[x,x+h]}\|_p=0$. ok

Mais celui-là est positive. donc il est 0. ok

b). Par la théorème de Newton-Leibnitz. On a $g(x)=\int_0^x g'(t)\,dt+g(0)$. ok

Donc $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x g'(t)\,dt+g(0)$. il est bien défini puisque la $\boxed{\text{suite}}$ $\left(\int_0^x g'(t)\,dt\right)_{x\in\mathbb{R}_+}\in\mathbb{R}$ est une suite de cauchy (par a)).

je ne comprends pas

On appelle $\lim_{x\to\infty}\int_0^x g'(t)\,dt$ comme $\mathcal{C}\in\mathbb{R}_+$. admettons alors que g(x) a une limite en +\infty

Alors, prenons $\varepsilon>0$. il existe $M\in\mathbb{R}_+$ T.q. $\forall x\ge M$ $\left|\int_0^x g'(t)\,dt-\mathcal{C}\right|<\varepsilon$

C'est-à-dire $\left|\int_M^{+\infty}g(s)\,ds\right|=\left|\int_M^{+\infty}\left(\int_0^s g'(t)\,dt+g(0)\right)ds\right|<\infty$. Donc, si $g(0)+\mathcal{C}>\varepsilon$. On a $g(s)=\int_0^s g'(t)\,dt+g(0)>\varepsilon$, qui devient contraire avec $g(s)$ est intégrable. De même façon, $g(0)+\mathcal{C}<-\varepsilon$ est interdit aussi.

Alors, $\forall\varepsilon>0$. $|g(0)+\mathcal{C}|\le\varepsilon$. Donc $-g(0)=\mathcal{C}$. Alors $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$.

oui, si on sait que g(x) a une limite en +\infty, alors cette limite est forcément 0 pou que g soit intégable.