E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

T.D. numéro 19

Algèbre

Exercice 1 Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier strictement positif. On note D le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices diagonales, et H l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui ont exactement un coefficient non nul sur chaque colonne et sur chaque ligne.

1. Montrer que H est un produit semi-direct $D \rtimes W$, où W est l'ensemble des matrices de permutation.

2. On suppose que $\mathbb{K}$ possède au moins trois éléments. Montrer que H est le normalisateur de D dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $gDg^{-1} = D$. Ce résultat subsiste-t-il quand $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$?

Exercice 2 Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier strictement positif. Soient $\underline{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ et $\underline{W} = (W_0, W_1, \ldots, W_n)$ deux drapeaux complets dans $\mathbb{K}^n$. On pose $A_{i,j} = V_j + W_i$ pour i et j compris entre 0 et n. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $s(i)$ le plus petit entier j tel que $A_{i,j} = A_{i-1,j}$.

1. Construire des vecteurs $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tels qu'on ait, pour tout i compris entre 1 et n :

$$W_i = W_{i-1} \oplus \mathbb{K}\delta_i \qquad \text{et} \qquad V_{s(i)} = V_{s(i)-1} \oplus \mathbb{K}\delta_i$$

2. Montrer que s est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.

3. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est adaptée à un drapeau complet $\underline{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ si chaque F_i est engendré par une partie de $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ qui est adaptée à $\underline{V}$ et à $\underline{W}$.

4. Notons Δ l'ensemble des couples de drapeaux complets. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur Δ ?

5. Déduire des questions précédentes une démonstration de la décomposition $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = BWB$ de Bruhat.

Exercice 3 Soit G un groupe simple de cardinal 168. On veut montrer que G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, où $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On fixe un 7-sylow P de G, et on note N son normalisateur dans G (c'est-à-dire l'ensemble des éléments g de G tels que $gPg^{-1} = P$). On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des 7-sylows de G.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}$? Et celui de N ?

2. Montrer que P agit de façon libre et transitive sur $\mathcal{S} \setminus \{P\}$. On rappelle qu'un groupe agit librement sur un ensemble X si le stabilisateur de tout point de X est trivial.

3. En plongeant G dans $\mathfrak{S}_8$, montrer que l'ordre de tout élément de G est inférieur ou égal à 15. En déduire que N n'est pas cyclique, puis qu'il admet sept 3-sylows.

Soit Q un 7-sylow de G, distinct de P. On note N' le normalisateur de Q dans G, et on pose $M = N \cap N'$. On note H le normalisateur de M dans G.

4. En comptant les classes de N modulo P, montrer que M a trois éléments.

5. Démontrer que G admet vingt-huit 3-sylows.

6. Quel est le cardinal de H ? Montrer que H n'est pas cyclique (pour cela, on pourra considérer les conjugués de H et compter les éléments d'ordre 3, 6, 7 dans G).

Soit π un générateur de P. On note $\tilde{\pi}$ la permutation de $\mathcal{S}$ associée à π. On construit une bijection Ψ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7) = \mathbb{F}_7 \cup \{\infty\}$ dans $\mathcal{S}$ en posant $\Psi(\infty) = P$ et $\Psi(k) = \tilde{\pi}^k(Q)$ pour $k \in \mathbb{F}_7$. On s'autorise ainsi à identifier $\mathcal{S}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$. On choisit un générateur μ de M et on se donne un élément τ de $H \setminus M$.

7. Montrer qu'il existe un entier n tel que $\mu\pi\mu^{-1}$ soit égal à π^n. En calculant $\mu^k\pi\mu^{-k}$ pour k entier, montrer que n vaut 2 ou 4. En déduire que, quitte à remplacer μ par un autre générateur de M, on peut supposer que μ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$ par $x \mapsto 2x$.

8. Montrer qu'on a $\tau\mu\tau^{-1} = \mu^{-1}$. En déduire que τ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$ par $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{F}_7^*$ n'est pas un carré (pour cela, on pourra montrer que τ agit sans point fixe).

9. Après avoir comparé $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, montrer que π, μ et τ engendrent G, et que G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

10. Montrer que $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

Exercice 4 Soit p un nombre premier impair. Quels sont les groupes d'ordre p^3, à isomorphisme près ? On pourra admettre que les seuls, à isomorphisme près, qui soient abéliens sont $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$. Pour traiter le cas des groupes non abéliens, on pourra utiliser certains résultats démontrés dans d'autres exercices.

Exercice 5* Quels sont, à isomorphisme près, les groupes de cardinal 8 ? On admettra que les seuls qui soient abéliens sont $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Exercice 6* Soit G un groupe fini, d'ordre n.

1. Soit H un sous-groupe de G, d'ordre k, tel que $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$ pour tout $g \in G$ qui n'appartient pas à H. Quel est le nombre d'éléments de G qui n'appartiennent à aucun conjugué de H ?

2. On suppose que tout sous-groupe de G, sauf peut-être G lui-même, est abélien, et que G n'est pas cyclique. Montrer que G possède un sous-groupe distingué N non trivial.

3. On suppose que n est premier à $\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que G est cyclique. Existe-t-il un entier n, non premier à $\varphi(n)$, pour lequel tout groupe d'ordre n soit cyclique ?