E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

# T.D. numéro 18

Algèbre

**Exercice 1** *Les bagues de Suleima* (d'après R. Mneimné) Le fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve de son amour, de lui offrir *chaque mois une bague en or différente* incrustée d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a 10 pierres précieuses, régulièrement réparties, et se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte. Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?

**Exercice 2** Notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des bijections $\sigma$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ dont le support (i.e. l'ensemble des $n$ tels $\sigma(n) \neq n$) est fini. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{S}$ et un sous-groupe $H$ d'indice 2.

**Exercice 3** On veut colorier les côtés d'un octogone régulier : quatre en blanc et quatre en noir. Combien y a-t-il de façons de le faire ? (les coloriages déduits les uns des autres par symétries ou rotations ne sont comptés qu'une fois)

**Exercice 4** On note $H$ le groupe engendré par les générateurs $I$, $J$, $K$ et $\varepsilon$ et les relations suivantes (dans lesquelles on note 1 l'élément neutre de $H$) :

$$I^2 = J^2 = K^2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon^2 = 1 \qquad IJ = K \qquad JK = I$$

1. Montrer que $\varepsilon$ commute à $I$, à $J$ et à $K$, et qu'on a les relations suivantes :

$$IK = \varepsilon J \qquad JI = \varepsilon K \qquad KI = J \qquad KJ = \varepsilon I$$

2. En déduire que $H$ est un groupe fini, de cardinal 8.

On note en général $-1$ l'élément $\varepsilon$, et $-I$, $-J$, $-K$ les produits $\varepsilon I$, $\varepsilon J$, $\varepsilon K$ (respectivement). On admet que les conventions habituelles (par exemple les règles $(-x)(-y) = xy$ et $-(-x) = x$) sont encore valables (il s'agit d'une simple vérification, à partir des relations des questions 1. et 2.).

3. Donner la liste des sous-groupes de $H$, et se convaincre qu'ils sont tous distingués.
4. Quel est le centre de $H$ ?
5. Montrer que $H$ ne peut pas se décomposer en produit semi-direct.
6. Considérons les matrices carrées suivantes, de taille 2, à coefficients dans $\mathbb{C}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

A l'aide de ces deux matrices, construire un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ isomorphe à $H$.

*Le groupe $H$ s'appelle le groupe quaternionique. La multiplication sur $H$ s'étend, par bilinéarité, à l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré sur $\mathbb{R}$ par 1, $I$, $J$ et $K$. Cela munit $\mathbb{H}$ d'une structure d'anneau non commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible (on parle aussi de corps non commutatif). L'absence de commutativité est cruciale : par exemple, le polynôme de degré deux $X^2 + 1$ admet les six racines $\pm I$, $\pm J$ et $\pm K$, ce qui n'arrive jamais dans un corps commutatif.*

**Exercice 5*** Soient $n$ un entier supérieur ou égal à deux, et $H$ un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'ordre de $H$ est inférieur ou égal à $3^{\frac{n}{3}}$. Pour quelles valeurs de $n$ peut-il y avoir égalité ?

**Exercice 6*** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à deux. On se donne $n-2$ transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_{n-2}$ dans $\mathfrak{S}_n$, et on note $H$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qu'elles engendrent. Montrer que $H$ n'agit pas transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$.

*Cet exercice montre en particulier que $\mathfrak{S}_n$ ne peut pas être engendré par $n-2$ transpositions. Si on s'autorise à utiliser $n-1$ transpositions, on peut engendrer $\mathfrak{S}_n$ en considérant (1 2), (1 3), …, (1 n).*

**Exercice 7*** Soient $G$ un groupe, $k$ un entier strictement positif et $Z$ un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$. On appelle produit en couronne de $G$ avec $Z$, et on note $G \int Z$, le produit semi-direct $G^k \rtimes Z$ où $Z$ agit sur $G^k$ par permutation des facteurs.

1. Supposons que $G$ agit fidèlement sur un ensemble $S$. Montrer que $G \int Z$ agit fidèlement sur $S \times \{1, \ldots, k\}$, en explicitant l'action.

Soit $p$ un nombre premier. On note $Z_p$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ engendré par la permutation cyclique $(1\ 2 \ldots p)$. On désigne par $Z_p^{\int r}$ la puissance $r$-ième de $Z_p$ pour le produit en couronne, définie par $Z_p^{\int 0} = \{1\}$ (le groupe trivial) et $Z_p^{\int r+1} = Z_p^{\int r} \int Z_p$ pour $r \geq 0$.

2. Pour $r \geq 1$, plonger $Z_p^{\int r}$ dans $\mathfrak{S}_{p^r}$ et calculer son ordre.
3. Soit $n$ un entier strictement positif. Montrer que les $p$-sylows de $\mathfrak{S}_n$ sont isomorphes à des produits (cartésiens) de puissances (pour le produit en couronne) de $Z_p$, qu'on explicitera en fonction de $n$.