E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

T.D. numéro 17

Algèbre

Exercice 1 Pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\rho(P)$ le nombre de racines complexes de P, comptées sans multiplicités. Par convention, on pose $\rho(0) = +\infty$.

1. ** Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes premiers entre eux, non tous constants, tels que $P + Q = R$. Montrer qu'on a $\rho(PQR) \geq 1 + \max(\deg(P), \deg(Q), \deg(R))$. Cette majoration est-elle optimale ?

2. Démontrer le théorème de Fermat pour les polynômes : pour $n \geq 3$, si trois polynômes $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux, vérifient $P^n + Q^n = R^n$ alors ils sont tous les trois constants.

3. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes premiers entre eux, non constants, tels que $P^3 - Q^2 \neq 0$. Montrer qu'on a $\deg(P^3 - Q^2) \geq \frac{1}{2}\deg(P) + 1$.

On considère maintenant un analogue dans $\mathbb{Z}$ du résultat de la question 1. On appelle radical d'un entier non nul n, et on note $\mathrm{rad}(n)$, le produit des facteurs premiers de n (sans multiplicité). La conjecture *abc* est l'énoncé suivant : "Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que pour tout triplet (a, b, c) d'entiers non nuls, premiers entre eux, tels que $a + b = c$, on ait $\mathrm{rad}(abc) \geq c_\varepsilon (\max(|a|, |b|, |c|))^{1-\varepsilon}$".

4. Montrer que la conjecture *abc* implique les résultats suivants sur l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ dans $\mathbb{Z}$:

   (a) Pour n assez grand, l'équation de Fermat pour l'exposant n n'a pas de solution non triviale.

   (b) Pour chaque entier $n \geq 4$, l'équation de Fermat pour l'exposant n n'a qu'un nombre fini de solutions $(x, y, z) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3$.

Le résultat de la question 1. est dû, indépendamment, à Stothers (en 1981) et à Mason (en 1984). La conjecture abc a été proposée à la même époque par Masser et Oesterlé. Le résultat de la question 3. est dû à Davenport, et son analogue dans $\mathbb{Z}$ est un problème ouvert, la conjecture de Hall.