Université Paris-Saclay 2022-2023
M1 M.F., Orsay Arithmétique

T.D. 2 : Fonctions arithmétiques

Les exercices soulignés sont ceux qui seront corrigés en TD ; ils sont à chercher en priorité.

Notations. μ : la fonction de Möbius, φ : l'indicatrice d'Euler, d : la fonction « nombre de diviseurs », σ : la fonction « somme des diviseurs », $\mathbf{1}$: la fonction constante égale à 1.

Exercice 1 Donner une expression simple pour chacune des sommes suivantes :

$$a(n) = \sum_{m|n} \mu(m)d(n/m)\,, \qquad b(n) = \sum_{m|n} \mu(m)d(m)\,, \qquad c(n) = \sum_{m|n} \mu^2(m)\varphi(m)\,.$$

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}\,.$$

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction multiplicative strictement croissante. Montrer que si $f(2) = 2$ alors $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 4 Pour tout $n \geq 1$, notons $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n, comptés avec multiplicité ; autrement dit, on a $\Omega(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}) = e_1 + \ldots + e_k$ lorsque $p_1, \ldots, p_k$ sont premiers. On pose alors $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.

1. Montrer que λ est complètement multiplicative.
2. Calculer $(\lambda * \mathbf{1})(n)$ en distinguant selon que n est un carré parfait ou non.
3. Déterminer l'inverse de λ pour la convolution.

Exercice 5 (*Somme de Ramanujan*) Soient r et n des entiers avec $r \geq 1$. On appelle *somme de Ramanujan* la somme

$$c_r(n) = \sum_{\substack{k \,(\mathrm{mod}\, r) \\ k \wedge r = 1}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{r}\right).$$

Montrer que $c_r(n) = \sum_{d | n \wedge r} d\mu(r/d)$. En déduire la valeur de la somme des racines primitives r-ièmes de 1.

Exercice 6 Pour $\ell \geq 0$, on note $\sigma_\ell(n) = \sum_{d|n} d^\ell$.

1. Montrer que la formule ci-dessus définit une fonction multiplicative σ_ℓ.
2. Soit $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ la factorisation de n en produit de facteurs premiers. Montrer que
$$\sigma_\ell(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\ell(k_i+1)} - 1}{p_i^\ell - 1}.$$
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$:
$$\sum_{k|n} d(k)^3 = \left(\sum_{k|n} d(k) \right)^2.$$

Exercice 7 On dit qu'un entier n est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (i.e. si $\sigma(n) = 2n$).

1. Montrer qu'un nombre *pair* n est parfait si et seulement si $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ pour un entier k tel que $2^k - 1$ est premier.
2. Montrer que la somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait vaut 2.

Exercice 8 Soit p un nombre premier et $n \geq 1$ un entier. On note
$$I(p,n) = \{f \in \mathbf{F}_p[X] \colon f \text{ irréductible unitaire de degré } n\}.$$

1. Montrer que dans $\mathbf{F}_p[X]$, on a la factorisation
$$X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{f \in I(p,d)} f.$$
2. En déduire
$$\#I(p,n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{\frac{n}{d}}.$$
3. On note $P_n := \#I(p,n)/\#F(p,n)$ où $F(p,n)$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbf{F}_p[X]$ unitaires de degré n. Montrer l'encadrement
$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{p^{n/2}}\right) \leq P_n \leq \frac{1}{n},$$
et en déduire que $1/(2n) \leq P_n \leq 1/n$ dès que $p^n \geq 16$.

Exercice 9 Résoudre l'équation $\varphi(\sigma(2^n)) = 2^n$ en l'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 Pour $n \geq 1$, démontrer les formules :
$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

<u>**Exercice 11**</u> Soit $N \geq 1$ un entier.

1. Montrer que
$$\sum_{n \leq N} \mu(n) \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = 1 \,.$$

2. Déduire :
$$\left| \sum_{n \leq N} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1 \,.$$

Exercice 12 *(Une preuve du postulat de Bertrand)* Soit $n \geq 2$ un entier. Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe un nombre premier dans l'intervalle $]n, 2n]$. Cette preuve est due à Paul Erdös ; les idées reposent sur l'approche originale de Chebychev.

1. Soit p un nombre premier. On étudie dans cette question la valuation p-adique de $\binom{2n}{n}$. On rappelle que $v_p(m!) = \sum_{k \geq 1} \lfloor m/p^k \rfloor$ pour tout $m \geq 1$.
   (a) Montrer que la valuation p-adique du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est :
   $$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) . \qquad (1)$$
   (b) Quelles valeurs la somme (1) peut-elle prendre lorsque $p > \sqrt{2n}$?
   (c) Si $p \leq \sqrt{2n}$, majorer la somme (1).
   (d) Si $n \geq 3$, montrer qu'aucun nombre premier de l'intervalle $]2n/3, n]$ ne divise $\binom{2n}{n}$.
   (e) Si $p \in [n+1, 2n[$ est premier, quelle est la valuation p-adique de $\binom{2n}{n}$?
   (f) Montrer que $\binom{2n}{n}$ est pair.
2. Montrer que
$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}.$$
3. En procédant par récurrence, démontrer que pour tout réel $x \geq 1$ on a
$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \,.$$
4. Montrer que si l'intervalle $]n, 2n]$ ne contient pas de nombre premier alors :
$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{\frac{\log(2n)}{\log p}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \,.$$
5. En déduire que $2^{\frac{2n}{3}} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$, et conclure dans le cas où $n \geq 500$. En utilisant la suite finie de nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631)$, déduire que le postulat de Bertrand est vrai.

Exercice 13 *(Approximation de fonctions sommatoires)* Soient f, f_0 et g des fonctions arithmétiques. Pour $x \geq 1$, on note $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ la fonction sommatoire de f, et F_0 la fonction sommatoire de f_0.

1. Supposons que $f = f_0 * g$. Justifier l'égalité
$$F(x) = \sum_{d \leq x} g(d) F_0\left(\frac{x}{d}\right).$$
2. On veut appliquer la question précédente pour trouver une approximation de la fonction sommatoire de φ.
   (a) En utilisant le fait que $\varphi = \mathrm{Id} * \mu$, montrer qu'on a, uniformément en $x \geq 2$,
   $$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} x^2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x \log x).$$
   (b) Calculer $\sum_{d \geq 1} \mu(d) d^{-2}$.
   (c) En déduire une approximation de la fonction sommatoire de φ au voisinage de l'infini.
   (d) Appliquer le résultat de la question précédente au calcul de la probabilité que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux. Plus précisément, étant donné N très grand, ces deux entiers sont choisis de façon équiprobable et indépendante parmi $1, 2, \ldots, N$.
3. En faisant le choix $f_0 = \mathbf{1}$, appliquer la méthode de la question 1 pour déterminer une approximation à l'infini de la fonction sommatoire de $f = \mu^2$.