S3 Chimie, Parcours Chimie — Univ. Paris-Sud, Orsay
Math 250 : Matrices et équations différentielles — 23 octobre 2014

Corrigé du Partiel

Exercice 1 - On a $AX = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \\ 2\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Exercice 2 - Notons δ le déterminant cherché. En remplaçant L_3 par $L_3 - 2L_1$ on obtient

$$\delta = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on en déduit :

$$\delta = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

La règle de Sarrus permet alors de conclure :

$$\delta = 8 - 3 + 15 + 4 - 18 - 5 = 1.$$

Exercice 3 - Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (3+i)^2 - 12i = 8 - 6i$. Notons $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ, avec $x, y \in \mathbb{R}$. La relation $\delta^2 = \Delta$ fournit, en considérant la partie réelle, la partie imaginaire et le module, les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

En additionnant la première et la troisième il vient $x^2 = 9$ d'où $x = \pm 3$; en les soustrayant on obtient $y^2 = 1$ d'où $y = \pm 1$. Comme $2xy = -6$, les signes de x et y sont opposés. On peut choisir (par exemple) $x = 3$ et $y = -1$, ce qui donne $\delta = 3 - i$. Les racines du polynôme $z^2 + (3+i)z + 3i$ sont alors données par la formule $\frac{1}{2}(-(3+i) \pm (3-i))$; on trouve $-i$ et -3.

Exercice 4 - En remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ et L_3 par $L_3 - 2L_1$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 4y + 2z = 6 \\ -7y + 3z = -4 \end{cases}$$

On peut diviser L_2 par 2 :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ -7y + 3z = -4 \end{cases}$$

La méthode la plus astucieuse est peut-être, à ce stade, de considérer comme pivot l'inconnue z de L_2 et de remplacer L_3 par $L_3 - 3L_2$. On peut aussi s'en tenir à l'ordre alphabétique et remplacer L_3 par $L_3 + \frac{7}{2}L_2$ ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ \frac{13}{2}z = \frac{13}{2} \end{array}\right.$$

La dernière équation donne $z = 1$; en remplaçant dans la deuxième il vient $y = 1$, et enfin la première donne $x = 1 - 2y + z = 0$.

Exercice 5 -

(a) Le polynôme caractéristique $\chi_A(z)$ est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 3-z & -2 \\ 5 & -3-z \end{bmatrix}$, qui est $(3-z)(-3-z) + 10 = z^2 + 1$. Les valeurs propres de A sont ses racines : i et $-i$.

(b) Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre i est l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} (3-i)x - 2y = 0 \\ 5x + (-3-i)y = 0 \end{array}\right.$$

Ces deux équations sont proportionnelles, car la seconde est égale à la première multipliée par $\frac{3+i}{2}$. Les solutions sont donc les couples $(x, y) = (x, \frac{3-i}{2}x)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une base du sous-espace propre formée par l'unique vecteur $(1, \frac{3-i}{2})$. On peut aussi écrire les solutions sous la forme $(\frac{3+i}{5}y, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une autre base du sous-espace propre : le vecteur $(\frac{3+i}{5}, 1)$.

Pour le sous-espace propre associé à la valeur propre $-i$, une base est formée par $(1, \frac{3+i}{2})$; en effet, tous les coefficients de A sont réels donc il suffit de prendre le conjugué de la base obtenue pour i.

(c) La matrice A est diagonalisable, car on a deux sous-espaces propres de dimension 1 pour une matrice de taille 2. On peut en fait répondre à cette question sans utiliser la question (b), car le polynôme caractéristique de A a 2 racines distinctes.

Exercice 6 -

(a) En remplaçant L_1 par $L_1 + 2L_2$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} (a+6)x = b \\ 3x + y = 0 \end{array}\right.$$

Si $a \neq -6$, on en déduit $x = \frac{b}{a+6}$ puis $y = \frac{-3b}{a+6}$. Il y a donc une et une seule solution dans ce cas.

Si $a = -6$, la première équation est $0 = b$. Si $b \neq 0$, il n'y a aucune solution. Si $b = 0$, cette équation est toujours vérifiée, et les solutions sont les couples (x, y) de la forme $(x, -3x)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque ; on peut aussi écrire ces couples sous la forme $(\frac{-y}{3}, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque. Il y a donc une infinité de solutions dans ce cas.

On peut calculer le déterminant la matrice du système de départ : il vaut $a + 6$, ce qui est cohérent avec la distinction faite entre les cas $a = -6$ et $a \neq -6$.

(b) Si $a \neq -6$, la seule solution est $(x, y) = (0, 0)$ donc la base de solutions est vide. Si $a = -6$, une base de solutions est formée par le vecteur $(1, -3)$. Une autre base est formée par le vecteur $(\frac{-1}{3}, 1)$.