S3 Chimie, Parcours Chimie — Univ. Paris-Sud, Orsay
Math 250 : Matrices et équations différentielles — 16 décembre 2014

Corrigé de l'Examen

Exercice 1 - On a $P(-1) = 0$ donc -1 est une racine évidente de P. Par division euclidienne ou par identification on trouve $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 5)$. Le polynôme $z^2 - 4z + 5$ a pour discriminant -4, donc ses racines sont $\frac{4 \pm 2i}{2}$. Finalement, les racines de P sont donc -1, $2 - i$ et $2 + i$.

Exercice 2 -

1. Le sous-espace propre $E_2(M)$ est l'ensemble des $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tels que $(M - 2I_3)X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire tels que
$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$
En remplaçant L_3 par $L_3 + L_2$ on obtient $y + z = 0$; en ajoutant L_1 à cette nouvelle équation on obtient $0 = 0$, qui disparaît. Restent les deux premières équations ; on peut alors choisir z comme paramètre, et L_1 donne $y = -z$. En reportant dans L_2 on obtient $x = -2y - z = z$ donc $E_2(M)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $z(1, -1, 1)$ avec $z \in \mathbb{C}$: une base de $E_2(M)$ est formée par l'unique vecteur $(1, -1, 1)$.
De même les éléments de $E_3(M)$ sont les X tels que
$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$
Ces trois équations se résument à une seule ; elles signifient que x et y peuvent prendre des valeurs quelconques, et qu'on a $z = -x - y$. Les éléments de $E_3(M)$ sont donc les vecteurs de la forme $(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ avec $x, y \in \mathbb{C}$ quelconques. Une base de $E_3(M)$ est donc formée par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$.
2. On a $\dim E_2(M) = 1$ et $\dim E_3(M) = 2$ d'après la question précédente, puisque la dimension d'un sous-espace propre est le nombre de vecteurs dans une base de ce sous-espace. Donc $\dim E_2(M) + \dim E_3(M)$ est égal à 3, qui est la taille de la matrice : M est donc diagonalisable.

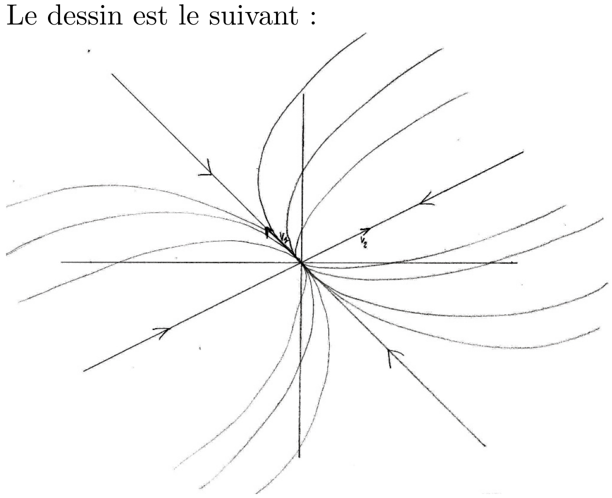
Exercice 3 -

1. Comme λ_1 et λ_2 sont réels et distincts, on a
$$X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. La trajectoire est rectiligne si, et seulement si, c_1 ou c_2 est nul. On exclut le cas où $c_1 = c_2 = 0$ car la trajectoire est alors réduite à un point (l'origine). Si $c_1 = 0$ et $c_2 \neq 0$, on a $X(t) = c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_2 V_2 = \begin{bmatrix} 2c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-3t} \to +\infty$ donc la trajectoire part de l'infini ; elle va vers 0 car $X(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quand $t \to +\infty$.

   Lorsque $c_2 = 0$ et $c_1 \neq 0$, on a $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_1 V_1 = \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-2t} \to +\infty$ donc la trajectoire part de l'infini ; elle va vers 0 car $X(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quand $t \to +\infty$.

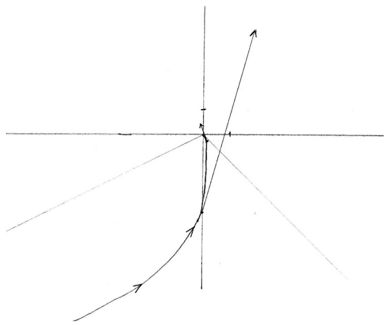
3. Le dessin est le suivant :



4. On a $x(t) = -c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{-3t}$ et $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$ donc $x(0) = -c_1 + 2c_2$ et $y(0) = c_1 + c_2$. La trajectoire cherchée est donc celle donnée par les constantes c_1 et c_2 telles que $-c_1 + 2c_2 = 0$ et $c_1 + c_2 = -3$. La première équation s'écrit $c_1 = 2c_2$; en reportant dans la seconde on trouve $c_2 = -1$, ce qui donne alors $c_1 = -2$.

5. On a $x(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$ et $y(t) = -2e^{-2t} - e^{-3t}$ donc $x'(t) = -4e^{-2t} + 6e^{-3t}$ et $y'(t) = 4e^{-2t} + 3e^{-3t}$ ce qui donne
$$X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad X(1) = \begin{bmatrix} 2e^{-2} - 2e^{-3} \\ -2e^{-2} - e^{-3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,171 \\ -0,320 \end{bmatrix},$$
$$X'(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad X'(1) = \begin{bmatrix} -4e^{-2} + 6e^{-3} \\ 4e^{-2} + 3e^{-3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.243 \\ 0.691 \end{bmatrix}.$$

6. Le dessin est le suivant (l'orientation étant fournie par les vecteurs vitesse) :



7. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-2t} \to +\infty$ et $e^{-3t} \to +\infty$; en outre $X(t) \sim e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$: la trajectoire présente une branche parabolique dans la direction du vecteur $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Il ne s'agit pas d'une asymptote car $X(t) - e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ tend vers l'infini.
Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-2t} \to 0$ et $e^{-3t} \to 0$ donc $X(t) \to (0,0)$: la trajectoire tend vers l'origine. En outre, on a $X(t) \sim e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ donc elle arrive près de l'origine avec une tangente dirigée par le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 - On a par définition :

$$\chi_B(z) = \det \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{2}i - z & 3 + \frac{5}{2}i & -1 + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & -1 - \frac{5}{2}i - z & -\frac{1}{2}i \\ -1 & -1 & 2 - z \end{bmatrix}.$$

En remplaçant C_2 par $C_2 - C_1$ et simultanément C_3 par $C_3 + (2-z)C_1$ on obtient :

$$\chi_B(z) = \det \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{2}i - z & 1 + 2i + z & 3 + \frac{3}{2}i - 4z - \frac{1}{2}iz + z^2 \\ -\frac{1}{2}i & -1 - 2i - z & -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}iz \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne on obtient donc :

$$\chi_B(z) = -\det \begin{bmatrix} 1 + 2i + z & 3 + \frac{3}{2}i - 4z - \frac{1}{2}iz + z^2 \\ -1 - 2i - z & -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}iz \end{bmatrix}.$$

En remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ on a :

$$\chi_B(z) = -\det \begin{bmatrix} 1 + 2i + z & 3 + \frac{3}{2}i - 4z - \frac{1}{2}iz + z^2 \\ 0 & 3 - 4z + z^2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_B(z) = -(3 - 4z + z^2)(1 + 2i + z) = -3 - 6i + (1 + 8i)z + (3 - 2i)z^2 - z^3.$$