S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 13 novembre 2015

Corrigé du Partiel

Exercice 1 - La négation est :

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \Big((a = c) \text{ ou } (a^2 + b \geq c)\Big).$$

Exercice 2 -

(*a*) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{N}$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Supposons que $x \geq 2y+1$. Alors on a $x+3 \geq 2y+4 \geq 2y \geq y$ car $y \geq 0$.

(*b*) FAUSSE. Posons $x = 0$ et $y = 3$. Alors $x \geq 2y + 1$ est fausse et $x + 3 \geq y$ est vraie, donc la phrase logique $(x \geq 2y + 1) \Leftrightarrow (x + 3 \geq y)$ est fausse.

(*c*) VRAIE. Posons $x = 1$ et $y = 0$. Alors les phrases logiques $x \geq 2y + 1$ et $x + 3 \geq y$ sont vraies, donc la phrase logique $(x \geq 2y + 1) \Leftrightarrow (x + 3 \geq y)$ est vraie.

Exercice 3 - Soient $x, x' \in]2, +\infty[$. Supposons $x < x'$. Alors on a $4x < 4x'$ donc $4x - 1 < 4x' - 1$. En outre $4x - 1$ et $4x' - 1$ sont strictement positifs car $x, x' \in]2, +\infty[$. Donc on a $\frac{1}{4x-1} > \frac{1}{4x'-1}$ ce qui donne $f(x) > f(x')$.

Exercice 4 - On a $0 \leq 1$ et $g(0) = 1 < g(1) = 2$. Donc g n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 - Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \frac{1}{2\varepsilon}$ (ou alors $N = [\frac{1}{2\varepsilon}] + 1$ si on veut que N soit entier). Soit $n \geq N$. Alors on a

$$|u_n - (-3)| = \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2N+1} \leq \frac{1}{2N} \leq \varepsilon.$$

Exercice 6 - Il existe des réels M et M' tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$. Posons $M'' = M + M'$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|w_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M + M' = M''.$$

Exercice 7 - Raisonnons par l'absurde, en supposant $\ell > \alpha$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(\ell - \alpha)$; on a alors $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui signifie $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Or $\ell - \varepsilon = \ell - \frac{1}{2}(\ell - \alpha) = \alpha + \frac{1}{2}(\ell - \alpha) > \alpha$, donc on en déduit $u_N > \alpha$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq \alpha$.