S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 10 juillet 2015

Corrigé de l'examen (2ème Session)

Exercice 1 -

(a) F (b) V (c) F (d) V (e) V (f) F

Exercice 2 -

(a) $[-1,3]$ (b) $[-2,0]$

Exercice 3 -

(a) Fausse. Démontrons le contraire, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x < y^2 - 1.$$

Soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = x + 2$. Alors on a $y \in \mathbb{N}$ donc $y^2 \geq y > x + 1$, ce qui donne $y^2 - 1 > x$.

(b) Vraie. Posons $y = 0$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors on a $x \geq 0$ et $y^2 - 1 = -1$, donc $x \geq y^2 - 1$.

Exercice 4 -

(a) Par produit en croix, on obtient

$$y = \frac{-x+2}{x+3} \iff yx + 3y = -x + 2 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{-3y+2}{y+1} \iff xy + x = -3y + 2.$$

L'équivalence cherchée en découle immédiatement.

(b) Montrons d'abord que g est bien définie. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ la formule $\frac{-x+2}{x+3}$ a un sens (car le dénominateur ne s'annule pas puisque $x \neq -3$) ; il s'agit bien d'un élément de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ puisque la relation $\frac{-x+2}{x+3} = -1$ conduirait par produit en croix à $-x + 2 = -x - 3$ ce qui est absurde.

Montrons maintenant que g est bijective. Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. D'après la question précédente, y admet un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, à savoir $\frac{-3y+2}{y+1}$. Donc g est bijective.

(c) Par définition, $g^{-1}(-6)$ est l'unique élément $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ tel que $\frac{-x+2}{x+3} = -6$. D'après la question (a), on a donc $g^{-1}(-6) = \frac{20}{-5} = -4$.

Exercice 5 - Quand n prend les valeurs 1 et 2, le nombre $\frac{(-1)^n}{n}$ vaut respectivement -1 et $\frac{1}{2}$; on a donc $-1 \in E$ et $\frac{1}{2} \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si n est pair alors $(-1)^n = 1$ donc on a $0 \leq \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$; ici la dernière inégalité vient du fait que tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ pair vérifie $n \geq 2$. D'autre part, si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ donc on a $-1 \leq \frac{-1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \leq 0$; ici la première inégalité provient du fait que $n \geq 1$, donc $\frac{1}{n} \leq 1$. Quelle que soit la parité de n, on obtient donc $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$. Ceci termine la preuve du fait que E admet un plus petit élément -1 et un plus grand élément $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 -

(a) Soit $y \in f([-3,2])$. Il existe $x \in [-3,2]$ tel que $y = f(x)$. On a $-3 \leq x \leq 2$ donc $0 \leq x^2 \leq 9$ (on peut détailler cette implication en distinguant selon le signe de x, ou en constatant que la valeur absolue de x est comprise entre 0 et 3). On en déduit que $y = x^2 - 2$ appartient à l'intervalle $[-2,7]$. Réciproquement, si $y \in [-2,7]$ alors $y+2 \in [0,9]$ donc $x = -\sqrt{y+2}$ existe et appartient à l'intervalle $[-3,0]$ (donc à plus forte raison à l'intervalle $[-3,2]$). On a bien $f(x) = (-\sqrt{y+2})^2 - 2 = y$. Finalement on a donc démontré que $f([-3,2]) = [-2,7]$.

(b) Soit $x \in f^{-1}([-1,2])$. On a $-1 \leq x^2 - 2 \leq 2$ donc $1 \leq x^2 \leq 4$. En prenant la racine carrée (entre nombres positifs) on en déduit $1 \leq |x| \leq 2$. On distingue alors deux cas : si $x \geq 0$ alors on a $1 \leq x \leq 2$ donc $x \in [1,2]$; dans le cas contraire on a $|x| = -x$ donc $1 \leq -x \leq 2$ ce qui donne $-2 \leq x \leq -1$ puis $x \in [-2,-1]$. On a donc démontré que $f^{-1}([-1,2]) \subset [-2,-1] \cup [1,2]$. Démontrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$: on a $x \in [-2,-1]$ ou $x \in [1,2]$. On peut donc distinguer deux cas. Tout d'abord, si $x \in [-2,-1]$ alors $-2 \leq x \leq -1$ donc $1 \leq -x \leq 2$ puis $1 \leq (-x)^2 = x^2 \leq 4$ (en élevant les inégalités au carré entre nombres positifs) d'où $f(x) \in [-1,2]$ et finalement $x \in f^{-1}([-1,2])$. Dans le second cas, on a $x \in [1,2]$ donc $1 \leq x^2 \leq 4$ et, de même, $x \in f^{-1}([-1,2])$.