Feuille de TD n° 1 : Espaces de probabilité. Variables aléatoires.

Exercice 1. On jette trois dés. Calculer la probabilité d'obtenir : au moins un six ; exactement un six ; au moins deux faces identiques ; au moins deux faces identiques et la somme des points paire.

Exercice 2. On range au hasard n livres sur une étagère. Quelle est la probabilité pour que k livres donnés soient l'un à côté de l'autre ?

Exercice 3. On lance un dé à 6 faces. On note X le résultat. On lance alors un dé à X faces. Soit Y le résultat obtenu.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et de Y.

Exercice 4. **Formule du crible.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$
2. Si on suppose de plus que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ ne dépend que de k, montrer que
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$
3. Applications :
   (a) n messieurs laissent leurs n cannes au vestiaire de leur club. Quelle est la probabilité qu'aucun d'eux, en repartant, ne reprenne sa propre canne ? Quelle est la loi du nombre X_n de bonnes cannes reprises ? Montrer que $P(X_n = k) \to e^{-1}/k!$ quand $n \to \infty$.
   (b) n messieurs laissent leurs n cannes et leurs n chapeaux au vestiaire. Quelle est la probabilité pour qu'ils se trompent tous de canne ou de chapeau ?
   (c) On répartit m boules dans n boîtes (avec $m \geq n$). Quelle est la probabilité pour que toutes les boîtes soient occupées ?

Exercice 5. Le nombre X d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Un œuf arrive à éclosion avec probabilité p. Montrer que le nombre Y de bébés tortues issus d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Exercice 6. Le nombre X d'enfants par famille suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (*i.e.* $P(X = n) = q^{n-1}p$ pour $n \geq 1$, avec $q = 1 - p$). Toutes les répartitions filles-garçons sont équiprobables. Quelle est la loi du nombre Y de filles par famille ? On pourra utiliser le fait que $(1 - x)^{-r-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} x^n$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f. Déterminer la fonction de répartition de X^2, puis sa densité.
2. En considérant le cas particulier où X suit une loi normale standard, déterminer la densité de la loi du χ^2 à un degré de liberté.

Exercice 8. Pour tout réel $s > 1$, posons $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, notons $E_p = \{X \text{ est multiple de } p\}$. Montrer que les évènements E_p, pour $p \in \mathcal{P}$, sont indépendants. En déduire une interprétation probabiliste de la formule d'Euler
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

2. Un entier est dit sans facteur carré s'il n'est divisible par aucun carré parfait excepté 1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \text{ est sans facteur carré}) = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{pgcd}(X,Y) = n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

Exercice 9. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ admet une densité si $\mathrm{Card}(A \cap \{0,\dots,n\})/n$ admet une limite quand $n \to \infty$. Montrer que la collection des parties de $\mathbb{N}$ qui admettent une densité n'est pas une tribu.

Feuille de TD n° 2 : Jeu de pile ou face. Indépendance.

Exercice 1. On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur n, on note $X_1, \ldots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose

$$\forall k \in \{1 \ldots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k\,.$$

On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,x), c'est-à-dire tels que $S_n = x$.

1. Calculer $N_{n,x}$ pour tout x entier et n entier strictement positif.
2. Soit $a > 0, b > 0$. Quel est le nombre de chemins $(S_1, \ldots, S_n)$ tels que $S_1 > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = a$?
3. Soit $b > a > 0$. Quel est le nombre de chemins $(S_1, \ldots, S_n)$ tels que $S_1 < b, \ldots, S_{n-1} < b, S_n = a$?

Exercice 2. On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur n, on note $X_1, \ldots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose

$$\forall k \in \{1 \ldots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k\,.$$

1. Soient k, r deux entiers tels que $k \leq r$. Montrer que
$$\mathbb{P}\big(S_n = k,\, \max\{S_1, \ldots, S_n\} \geq r\big) = p_{n,2r-k} = \mathbb{P}(S_n = 2r - k).$$
2. En déduire, pour $r \geq 0$, la probabilité
$$\mathbb{P}\big(\max\{S_1, \ldots, S_n\} = r\big)\,.$$
3. On dit que la marche passe pour la première fois en r au temps n si
$$S_1 < r, \ldots, S_{n-1} < r, \quad S_n = r\,.$$
Calculer la probabilité de cet événement.

Exercice 3. On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $n > 0$, on note $X_1, \ldots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose $S_0 = 0$ et

$$\forall k \in \{1 \ldots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

En inversant l'ordre des $+1$ et -1 qui forment la marche aléatoire, on forme une nouvelle marche aléatoire. Elle s'appelle marche aléatoire duale et est définie par $S_k^* = X_1^* + \cdots + X_k^*$, pour $k = 1, \ldots, n$, où

$$X_1^* = X_n \qquad X_2^* = X_{n-1} \qquad \ldots \qquad X_n^* = X_1.$$

1. Exprimer S_k^* en fonction des S_j.
2. Exprimer l'évènement $\{\forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \quad S_n > S_j\}$ en fonction des S_k^*. En déduire la probabilité pour que S_n soit strictement positif et que la marche atteigne le niveau S_n pour la première fois au temps n.
3. Soit $r > 0$. Exprimer l'évènement $\{S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}, S_n = r\}$ en fonction des S_k^*. En déduire sa probabilité.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère A et B deux éléments de $\mathcal{A}$, et $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω.

1. Calculer $\mathbb{P}(B|A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A|B)$.
2. Connaissant $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C_i)$ et $\mathbb{P}(C_i)$, calculer $\mathbb{P}(B|A)$.
3. Soit p_i la probabilité pour qu'un couple ait exactement i enfants, calculer la probabilité pour qu'un couple ait un enfant unique sachant qu'il n'a pas de fille.

Exercice 5. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de $\mathcal{F}$ la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme. Trouver $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ tels que $\forall A_1 \in \mathcal{G}_1$ et $\forall A_2 \in \mathcal{G}_2$, A_1 et A_2 sont indépendants et tels que $\sigma(\mathcal{G}_1)$ et $\sigma(\mathcal{G}_2)$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre α. On pose $M = \sup(X, Y)$ et $m = \inf(X, Y)$. Déterminer la loi jointe de $(m, M - m)$. En déduire que m et $M - m$ sont indépendantes.

Exercice 7. Soit X une v.a. réelle de loi symétrique (X et $-X$ ont même loi). Soit ε une v.a. indépendante de X telle que $P(\varepsilon = 1) = p = 1 - P(\varepsilon = -1)$, pour p dans $]0, 1[$.

1. Donner la loi de εX.
2. A quelle condition sur p, la covariance entre X et εX est-elle nulle ?
3. Soit $Y = \mathbb{1}_{X>0} - \mathbb{1}_{X<0}$. Donner la loi de Y, de XY. Calculer la covariance entre $|X|$ et Y. Ces deux v.a. sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. On appelle loi gamma $\gamma_{a,b}$ la loi de densité $\mathbb{1}_{x>0} \frac{1}{\gamma(a)} b^a x^{a-1} \exp(-bx)$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'une densité de probabilité (on rappelle que $\gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t)dt$).
2. Pour toute variable aléatoire Z, on définit la transformée de Laplace R_Z de Z par $R_Z(z) = \mathbb{E}[e^{-zZ}]$. Montrer que R_Z est correctement définie sur le domaine
$$E_Z = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbb{E}[e^{-Re(z)x}] < \infty\}.$$
3. Montrer que $R_{X+Y} = R_X R_Y$ quand X et Y sont indépendantes.
4. Soit X de loi $\gamma_{a,b}$. Calculer la transformée de Laplace R_X de X. En déduire la moyenne et la variance de X.
5. Soit Y une v.a. de loi $\gamma_{c,b}$ indépendante de X. Donner la loi de $X + Y$.
6. Soit $(X_k)_{k>0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Donner la loi de $X_1 + \cdots + X_k$.
7. Soit $(X_k)_{k>0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Sachant que $\gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, montrer que X_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$. En déduire que $X_1^2 + \cdots + X_k^2$ suit une loi $\gamma_{k/2,1/2}$.

Feuille de TD n^o 3 : La loi faible des grands nombres. Suites infinies de variables aléatoires.

Exercice 1. Polynômes de Bernstein. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le polynôme de Bernstein de degré n associé à f est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x)/n)]$, où $S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et x.
2. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Chebyshev, que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 2. Géométrie en grande dimension. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires distribuées de façon indépendante et uniforme sur $[-1,1]$.

1. Désignons par $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ la convergence en probabilité. Montrer que
$$\frac{1}{n}\left(X_1^2 + \ldots + X_n^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{3},$$
2. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner une interprétation géométrique de l'ensemble
$$A_{n,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} < \|x\| < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} \right\},$$
3. Désignons par $\mathcal{L}^n$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathcal{L}^n\left(A_{n,\varepsilon} \cap [-1,1]^n\right) \sim 2^n \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty.$$
Pourquoi peut-on affirmer qu'en grande dimension, un cube est presque entièrement rempli par le voisinage d'une sphère ?

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à la loi faible des grands nombres si

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à la loi faible des grands nombres dans les cas suivants :

1. La suite $(\mathrm{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et pour tout $i < j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.
2. La suite $(\mathrm{Var}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et pour tout $n \geq 2$, la variable X_n dépend de X_{n-1} et X_{n+1} mais est indépendante des autres X_k.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles positives. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ pour tout n. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X_∞ et si $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$, montrer alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X_∞ dans L^1.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire positive, avec $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{P}(X \neq 1) > 0$.

1. Montrer que $q = \mathbb{E}[\sqrt{X}] < 1$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées comme X. Montrer que
$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} X_i = 0.$$
Indication : On pourra considérer la série $\sum_n \sqrt{X_1 \cdots X_n}$ et appliquer le théorème de Beppo-Levi.

Exercice 6. Loi faible des grands nombres pour les tableaux triangulaires. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui diverge vers l'infini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une collection $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et notons $\overline{X}_{n,k} = X_{n,k}\,\mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|\le b_n\}}$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_{n,k}|>b_n)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big[\overline{X}_{n,k}^2\big]=0. \tag{1}$$

1. En posant $S_n = X_{n,1}+\ldots+X_{n,n}$ et $a_n = \mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}]+\ldots+\mathbb{E}[\overline{X}_{n,n}]$, montrer que
$$\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(|X_1|>x)=\mathrm{o}(1/x)$ quand $x\to\infty$. Posons $S_n = X_1+\ldots+X_n$ et $\mu_n = \mathbb{E}[X_1\,\mathbb{1}_{\{|X_1|\le n\}}]$. À l'aide de la question précédente, on voudrait montrer que
$$\frac{S_n}{n}-\mu_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$
   (a) Montrer que la première condition figurant dans (1) est vérifiée pour $X_{n,k}=X_k$ et $b_n=n$. Dès lors, on pose comme précédemment $\overline{X}_{n,k}=X_{n,k}\,\mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|\le b_n\}}=X_k\,\mathbb{1}_{\{|X_k|\le n\}}$.

   (b) Pour tout $p>0$ et toute variable aléatoire $Y\ge 0$, montrer que $\mathbb{E}[Y^p]=\int_0^\infty py^{p-1}\mathbb{P}(Y>y)\mathrm{d}y$.

   (c) En déduire que
$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}^2]\le\frac{1}{n}\int_0^n g(y)\mathrm{d}y \qquad \text{avec} \qquad g(y)=2y\mathbb{P}(|X_1|>y).$$
   (d) Montrer que pour tout réel $A>0$ et tout entier $n\ge A$,
$$\frac{1}{n}\int_0^n g(y)\mathrm{d}y\le\frac{A}{n}\sup_{[0,\infty[}g+\frac{n-A}{n}\sup_{[A,\infty[}g,$$
   et en déduire que la seconde condition figurant dans (1) est vérifiée. Conclure.
3. *Application* : Loi faible des grands nombres, cas L^1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[|X_1|]<\infty$. Posons $S_n=X_1+\ldots+X_n$ et $\mu=\mathbb{E}[X_1]$. Montrer que $S_n/n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu$ quand $n\to\infty$.

Exercice 7. Paradoxe de Saint-Petersbourg. Un joueur se rend au casino et, après avoir payé un droit d'entrée de y euros, joue au jeu suivant. Le croupier tire à pile ou face un certain nombre de fois avec une pièce de monnaie équilibrée. Si c'est au j-ième lancer que face apparaît pour la première fois, il donne 2^j euros au joueur.

1. On note X le gain du joueur à l'issue d'une partie. Donner la loi de X et montrer que $\mathbb{E}[X]=\infty$.

Comme l'espérance de gain du joueur est infinie, le jeu lui est favorable "en moyenne", quelle que soit la valeur y de la mise d'entrée. Cependant, la probabilité de gagner une somme importante à ce jeu est faible. Ainsi, toute personne saine d'esprit refusera de jouer à ce jeu si la valeur y est trop grande, car elle jugera trop élevé le risque de perdre une somme importante. Ce paradoxe a été énoncé par Nicolas Bernoulli, puis repris par son cousin Daniel Bernoulli, et illustre le principe économique de l'aversion au risque.

Le but de la suite de l'exercice est de déterminer à quelle valeur la mise d'entrée y devrait être fixée pour que le joueur ait raisonnablement envie de jouer n fois.

2. Montrer que, pour tout entier $n\ge 1$, le gain du joueur au bout de n parties peut s'écrire $S_n=X_1+\ldots+X_n$, où $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k=2^j)=2^{-j}$ pour tous entiers $j,k\in\mathbb{N}^*$.
3. Pour tout entier $n\ge 1$, posons $m_n=\log_2 n+u_n$, où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui diverge vers l'infini et qui est choisie de façon à ce que m_n soit entier quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la condition (1) de l'exercice 6 est vérifiée pour $X_{n,k}=X_k$ et $b_n=2^{m_n}$.
4. Calculer la valeur de $a_n=\mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}]+\ldots+\mathbb{E}[\overline{X}_{n,n}]$, où $\overline{X}_{n,k}=X_k\,\mathbb{1}_{\{|X_k|\le b_n\}}$ pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$.
5. En choisissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de façon appropriée et en utilisant l'exercice 6, montrer que
$$\frac{S_n}{n\log_2 n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}1.$$

On observe qu'avec une probabilité assez grande, le gain S_n du joueur est proche de $n\log_2 n$. Ainsi, pour que le jeu soit équitable au bout de n parties, le droit d'entrée y devrait être fixé à $\log_2 n$ euros par partie.

Feuille de TD n^o 4 : Loi du tout ou rien. Lois des grands nombres

Exercice 1.

1. Soit B et C deux ensembles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$. Déterminer limsup A_n et liminf A_n.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. Montrer que $\mathbb{1}_{\text{limsup } A_n} = \text{limsup } \mathbb{1}_{A_n}$.

Exercice 2. Soit X_i, une suite de variables aléatoires indépendantes. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que les événements suivants ont pour probabilité 0 ou 1 :

$$\{\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\} \qquad \{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\}.$$

Exercice 3. Événements échangeables et loi du 0-1 de Hewitt-Savage. Notons S l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$ de support fini, c'est-à-dire les bijections σ de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\sigma(n) = n$ pour tout n suffisamment grand. À une telle permutation $\sigma \in S$, on peut naturellement associer l'application $f_\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $f_\sigma((x_n)_{n\geq 1}) = (x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Considérons maintenant une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles. On rappelle que tout événement A qui appartient à la tribu engendrée par ces variables peut s'écrire sous la forme $A = \{(X_n)_{n\geq 1} \in B\}$, où B appartient à la tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (engendrée par les cylindres). On dit qu'un tel événement A est échangeable si pour toute permutation $\sigma \in S$, on a $f_\sigma^{-1}(B) = B$, c'est-à-dire que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) \in B.$$

1. Montrer que tout événement appartenant à la tribu asymptotique est échangeable.
2. Montrer qu'un événement peut être échangeable sans nécessairement être asymptotique.
3. On suppose que les variables X_n sont indépendantes et identiquement distribuées. Montrer que tout événement échangeable A vérifie $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. C'est la loi du 0-1 de Hewitt-Savage.
4. En déduire que la loi du 0-1 de Hewitt-Savage généralise celle de Kolmogorov.

Exercice 4. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit

$$A = \{\limsup S_n = +\infty\} \qquad \text{et} \qquad B = \{\liminf S_n = -\infty\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.
3. Supposons que $\mathbb{P}(A) = 0$.
   (a) Montrer que la suite $(S_n)_n$ est bornée p.s.
   (b) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\sup_n |S_n| < k] = 1$.
   (c) Calculer la loi de S_n.
   (d) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout n et tout k,
   $$\mathbb{P}[|S_n| < k] \leq \frac{Ck}{\sqrt{n}}.$$
   (e) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.
4. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0$ infiniment souvent$)$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi la loi de X.

1. Soit $a > 0$. Montrer que X est intégrable ssi $\sum_{n>0} \mathbb{P}(|X| \geq an) < \infty$.
2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors (X_n/n) converge p.s. vers 0.

3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$, alors, pour tout a positif, $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq an\}) = 1$.
4. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Déduire de la question précédente que si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$, alors $\limsup_n |S_n/n| = +\infty$ p.s.

Exercice 6. Soit $(T_k)_{k\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \geq 2$, T_k suit la loi exponentielle de paramètre $\ln(k)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T_k \geq 1)$, ainsi que $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, que

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k = 1.$$

Exercice 7. Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que $\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(X_0 > a) \sim a^{-1} \exp(-a^2/2)$ quand $a \to +\infty$.
2. Donner la loi de $S_n/\sqrt{n}$.
3. En déduire que si (a_n) est une suite de réels positifs telle que $a_n/\sqrt{n}$ tende vers $+\infty$ alors S_n/a_n converge vers 0 en probabilité. Peut-on conclure pour la convergence p.s. ? Montrer cependant que si $a_n = \sqrt{n} \log n$, alors S_n/a_n converge p.s. vers 0.
4. Montrer que $\limsup_n (2 \log n)^{-1/2} X_n = 1$ p.s. et $\limsup_n (2 \log n)^{-1/2} |X_n| = 1$ p.s.

Feuille de TD n^o 5 : Séries de variables aléatoires indépendantes. Convergence en loi.

Exercice 1. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables indépendantes.

1. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Rappeler pourquoi la série $\sum_n X_n$ converge presque sûrement.
2. On suppose que $\mathbb{P}(X_n = n^{-\alpha}) = \mathbb{P}(X_n = -n^{-\alpha}) = 1/2$. Montrer que la série $\sum_n X_n$ converge p.s. si et seulement si $\alpha > 1/2$ et converge absolument p.s. si et seulement si $\alpha > 1$.
3. On suppose que les X_n sont centrées et de variance un. Montrer que pout tout $t \in \mathbb{R}$, on a convergence p.s. de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\sin(n\pi t)}{n}.$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et, un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé au préalable, $a_n = n^{1/2}(\ln n)^{1/2+\varepsilon}$. Montrer que la série $\sum_n X_n/a_n$ converge presque sûrement. En déduire que
$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = 0.$$

Exercice 3. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables gaussiennes indépendantes de moyenne μ_n et de variance σ_n^2.

1. Montrer que $\sum_n X_n^2$ converge dans L^1 si et seulement si $\sum_n (\mu_n^2 + \sigma_n^2) < \infty$.
2. On suppose $\mu_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors que si $\sum_n \sigma_n^2 = \infty$, on a p.s. $\sum_n X_n^2 = \infty$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Cauchy, et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls convergeant vers zéro. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n X_n^3$ converge p.s. si et seulement si $\sum_n |\varepsilon_n|^{1/3}$ converge.

Exercice 5. Attente d'un événement rare. Soit X_p une variable géométrique de paramètre p. Montrer que, quand p tend vers zéro, pX_p converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 6. Problème des anniversaires. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, où N est un entier naturel non nul. Notons
$$T_N = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = X_m \text{ pour un } m < n\}.$$
Calculer $\mathbb{P}(T_N > n)$ pour tout entier $n \geq 1$ et interpréter cette probabilité quand $N = 365$. Montrer que, quand N tend vers l'infini, $T_N/\sqrt{N}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. En déduire une approximation de $\mathbb{P}(T_{365} > 22)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 7. Théorème de Glivenko-Cantelli.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F continue. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note $X_{(k)}^n$ les statistiques d'ordre de $X_1, \ldots, X_n$, c'est-à-dire le réarrangement de $X_1, \ldots, X_n$ par ordre croissant. On définit $F_n(x)$ par
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)}^n \\ k/n & \text{si } X_{(k)}^n \leq x < X_{(k+1)}^n \text{ pour un } k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n)}^n. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi ce réarrangement est unique avec probabilité un, et donc que les statistiques d'ordre sont définies de manière unique.
2. Montrer que les $F_n(x)$ sont des variables aléatoires.

On considère ensuite la mesure de probabilité aléatoire
$$\Gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j}.$$

3. Montrer que F_n est la fonction de répartition de Γ_n.

L'objectif de la fin de l'exercice est de montrer qu'avec probabilité un, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \qquad \text{où} \qquad V_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

On commence par supposer que $F(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

4. Quelle est la loi suivie par les variables X_n ? En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, avec probabilité un, $F_n(x)$ tend vers x quand $n \to \infty$.
5. Montrer que presque sûrement, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers F.
6. Conclure, à l'aide du théorème de Dini, pour le cas où $F(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On ne fait plus d'hypothèse sur la fonction F (autre que le fait qu'elle est continue). On pose $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ pour tout $u \in [0, 1]$.

7. Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?
8. En déduire que V_n a même loi que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^{\text{unif}}(F(x)) - F(x)|,$$
où F_n^{unif} désigne la fonction F_n dans le cas où les variables X_n sont uniformes sur $[0, 1]$, puis conclure.

Exercice 8. Convergence des maxima. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition F et soit $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis la loi limite de :

1. $M_n/n^{1/\alpha}$, quand $F(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$ avec $\alpha > 0$;
2. $n^{1/\beta} M_n$, quand $F(x) = (1 - |x|^{\beta})\mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 0\}}$ avec $\beta > 0$;
3. $M_n - \ln n$, quand $F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$.

Feuille de TD n^o 6 : Théorème central limite. Loi de Poisson.

Exercice 1.

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Trouver une relation entre la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite et sa dérivée. En déduire sa valeur.
3. En déduire les moments de la loi normale centrée réduite.

Exercice 2.

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi exponentielle symétrique, de densité $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.
2. Si X_i sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de fonction caractéristique ϕ, quelle est la fonction caractéristique de $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$?
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy. Étudier la convergence en loi de $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Calculer les fonctions caractéristiques de X, Y et $X+Y$. En déduire la loi de $X+Y$.

Exercice 4. Si f est une fonction caractéristique, montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$ en est également une.

Exercice 5.

1. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire Y. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une constante a. Pour toute variable aléatoire Z, on note φ_Z la fonction caractéristique de Z.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que, pour tout entier n et tout réel v,
   $$|e^{iA_n v} - e^{iav}| \leq |v|\varepsilon + 2\,\mathbb{1}_{\{|A_n - a| > \varepsilon\}}.$$
   (b) Montrer que pour tous réels u et v,
   $$|\varphi_{(Y_n,A_n)}(u,v) - \varphi_Y(u)e^{iav}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   (c) En déduire le lemme de Slutsky, c'est-à-dire : $(Y_n, A_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y, a)$.
2. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $0 < \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.
   (a) Étudier la convergence de $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$.
   (b) Montrer que
   $$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 6. Dans une forêt, les champignons non comestibles sont quatre fois plus nombreux que les champignons comestibles. On note F la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite, et F^{-1} sa réciproque.

1. On cueille au hasard 100 champignons. Quelle est la probabilité de trouver un nombre de champignons comestibles compris entre 15 et 25 ? Calculer une valeur approchée de cette valeur sachant que $F(1.25) = 0.894$.
2. Parmi les champignons comestibles, un dixième sont des cèpes. Quelle est la probabilité que sur les 100 champignons cueillis, au moins trois soient des cèpes ? On donne $e^{-2} = 0.135$.
3. Déterminer le nombre minimal de champignons n qu'il faut cueillir pour, avec une probabilite de se tromper inférieure a 0.05, le nombre de champignons comestibles soit compris entre $0.15n$ et $0.25n$? On donne $F^{-1}(0.975) = 1.96$.

Exercice 7.

1. On fixe $x > 0$. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre x. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
2. Pour tout réel u, on note $[u]$ la partie entière de u. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que la suite
$$e^{-nx} \sum_{0\leq k\leq [ny]} \frac{(nx)^k}{k!}$$
converge vers 1 si $y > x$ et vers 0 si $y < x$.
3. En utilisant le théorème central limite, montrer que la suite de la question précédente converge vers $1/2$ si $y = x$.
4. Soit X une variable aléatoire strictement positive. On note L sa transformée de Laplace : $L(t) = \mathbb{E}[\exp(-tX)]$. Deduire des questions précédentes que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq k\leq [ny]} \frac{(-n)^k}{k!} L^{(k)}(n) = \mathbb{P}(X < y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = y)$$

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose
$$Y = \min\{n \geq 1, \quad X_1 \ldots X_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}.$$

1. Quelle est la loi de $-\ln(X_1)$?
2. Montrer que la densité de $\sum_{i=1}^n(-\ln(X_i))$ est $x \mapsto \mathbb{1}_{x>0}e^{-x}x^{n-1}/(n-1)!$.
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
4. Expliquer en quoi ce résultat permet de simuler par ordinateur une variable aléatoire de loi de Poisson.

Feuille de TD n° 7 : Convergence en loi et compacité. Le théorème limite central vectoriel.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que $\mathbb{P}(X\in\mathbb{Z})=1$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi si et seulement si il existe une suite $(p_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dans $[0,1]$ dont la somme des termes vaut un telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=j)=p_j$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\mathbb{P}(X_n=n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

Exercice 2. Extrait du partiel 2007. Soit $U_n=(X_n,Y_n)$, $n\geq 1$, des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ tels que les suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi. Notons $\mathbb{P}_{U_n}$ (resp. $\mathbb{P}_{X_n}$, $\mathbb{P}_{Y_n}$) la loi de U_n (resp. X_n, Y_n).

1. Montrer que la suite $(\mathbb{P}_{U_n})_{n\geq 1}$ est tendue. (Indication : considérer d'abord $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\geq 1}$ et $(\mathbb{P}_{Y_n})_{n\geq 1}$.)
2. On suppose désormais que les fonctions caractéristiques de U_n convergent simplement dans $\mathbb{R}^2$ pour $n\to\infty$. Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.

Exercice 3. Soit g une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $|g(x)|\to\infty$ quand $|x|\to\infty$. Soit $\mathcal{P}$ une famille de mesures de probabilités vérifiant $\sup\limits_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\int_{\mathbb{R}}|g|d\mathbb{P}<\infty$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est tendue, et donc relativement compacte pour la convergence étroite.
2. On suppose g continue. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{P}$ qui converge vers μ. Prouver que $\int_{\mathbb{R}}|g|d\mu<\infty$.
3. Soit f une fonction continue telle que $f=\mathrm{o}(g)$ à l'infini. Montrer que $\int_{\mathbb{R}}fd\mathbb{P}_n$ tend vers $\int_{\mathbb{R}}fd\mu$.

Exercice 4. Soit $m\in\mathbb{R}^d$ et Σ une matrice carrée de taille d et de rang p. Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m,\Sigma)$. Montrer qu'il existe une matrice A de taille $d\times p$ et de rang p telle que $AY+m$ ait même loi que X, où Y est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,I_p)$. Calculer la densité de X lorsqu'elle existe.

Exercice 5. Soit X un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Trouver un endomorphisme U de $\mathbb{R}^3$ tel que les composantes de $Y=UX$ soient indépendantes. Donner la loi de Y.

Exercice 6. Extrait du partiel 2007. Soit X et Y deux vecteurs gaussiens indépendants centrés et de même loi dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que $Z=X-Y$ et $Z'=X+Y$ sont gaussiens, indépendants et de même loi.

Exercice 7. Pour cet exercice, il est commode d'identifier $\mathbb{R}^k$ aux matrices-colonnes de taille k. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi portée par $\{1,2,\ldots,k\}$. Notons $N_{n,i}=\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j=i\}}$ et $p_i=\mathbb{P}(X_1=i)$ pour tout $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, puis $N_n=(N_{n,1},\ldots,N_{n,k})$.

1. Donner la loi de N_n.
2. On note $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence en loi. Montrer que

$$\begin{pmatrix}\frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}}\\ \vdots\\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}}\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_k-X^tX),$$

   où I_k est la matrice identité de taille k et X est un vecteur-colonne que l'on déterminera. Montrer que $\Gamma=\mathrm{I}_k-X^tX$ est la matrice d'un projecteur orthogonal, dont on précisera l'image et le noyau.

3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q de taille k telle que $QX=e$, avec $e={}^t(0,\ldots,0,1)$, puis que

$$Q\begin{pmatrix}\frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}}\\ \vdots\\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}}\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_k-e^te).$$

4. On considère
$$T_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_{n,i} - np_i)^2}{np_i}.$$
Montrer que T_n converge en loi vers $\chi^2(k-1)$. Indication : On pourra s'intéresser au carré de la norme euclidienne du vecteur
$$Q \begin{pmatrix} \frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est très utilisé en statistiques : il permet d'établir le *test du* χ^2 qui est mis en oeuvre pour savoir si un échantillon i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ suit une loi donnée à l'avance. Son usage est très répandu en biologie.

Exercice 8. Un vecteur $m \in \mathbb{R}^d$ et une matrice carrée Γ de taille d étant donnés, notons $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\sqrt{n}(X_n - m)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ dérivable au point m, $\sqrt{n}(f(X_n) - f(m))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, J_f(m)\Gamma^t J_f(m))$ où $J_f(m)$ est la matrice jacobienne de f au point m.

Feuille de TD n° 8 : Espérance conditionnelle

Exercice 1. On dit que deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z $\mathcal{G}$-mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$
et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,
$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, \sigma(X))] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y deux éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tels que

$$\mathbb{E}[X|Y] = Y \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y|X] = X$$

Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 3. Soit $p \geq 1$ et soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} < +\infty$ et $\|Y\|_p < +\infty$.

1. Montrer que $\|X + Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}[Y|X]\|_p$.
2. En déduire que, si X et Y sont indépendantes, alors $\|X + Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}(Y)\|_p$.

Exercice 4.

1. Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. On suppose que les tribus $\sigma(\sigma(Y), \mathcal{B}_1)$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes. Montrer que
$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}_1]$$
2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables et i.i.d. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.
5. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \ldots]$.

Exercice 5. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k|X_1 + X_2 = n)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

Exercice 6. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dont la loi admet une densité $p(x, y)$ strictement positive par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Exprimer $\mathbb{E}[h(X, Y)|Y]$ pour toute fonction borélienne positive h sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
2. On se place dans le cas $n = m = 1$. On suppose que la loi de Y est la loi Gamma de paramètres $(2, \lambda)$, dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ est $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$, et que la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$ c'est-à-dire que pour toute fonction h borélienne positive, $\mathbb{E}[h(X)|Y] = Y^{-1}\int_0^Y h(x)dx$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 7. Soient M et X deux variables aléatoires réelles. On suppose que M est de loi gaussienne et que, pour tout t réel $E(e^{itX}|M) = \exp(itM - (\sigma^2 t^2/2))$.

1. Montrer que (X, M) est un vecteur gaussien.
2. Montrer que $X - M$ est indépendant de M.
3. Calculer $\mathbb{E}[X|M]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[M|X]$.

Feuille de TD n° 9 : Martingales : Définitions et arrêt. Théorèmes de convergence pour les martingales.

Exercice 1. Une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

Soit $r > 0$ et $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que, si f est harmonique, $(f(X_n))_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2. Deux transformations de martingales. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.
2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible et borné. On pose $(H \cdot X)_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1 \qquad (H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + \ldots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

   Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est aussi une martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale).

Exercice 3. Loi du logarithme itéré. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que presque sûrement on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

On pose $h(x) = (2x \log\log x)^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq \mathrm{e}$.

1. Pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\theta c}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta S_n}\right] \qquad \text{puis que} \qquad \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2n}}.$$

2. Soit $K > 1$. Majorer la quantité

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$$

   et montrer que $\limsup_{n\to\infty} S_n/h(n) \leq K$ presque sûrement. Conclure.

Exercice 4. Inégalité maximale pour les sur-martingales positives. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale positive sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si T est un temps d'arrêt, alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une sur-martingale. (*Indication :* poser $H_n = \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$ et étudier le processus $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$.)
2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Exercice 5. Théorème de Rademacher. L'objectif de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite presque sûre et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que
$$\text{p.s.} \qquad Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 6. L'urne de Polya. À l'instant 1, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé. Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = Y_n/(N_0 + n - 1)$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
2. *Cas* $a = b = 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. En déduire la loi de U.
3. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$,
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0-1)(n+N_0)\dots(n+N_0+k-2)}.$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U. *Remarque :* La loi de U est la loi $\beta(a,b)$, de densité $B(a,b)^{-1}u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 7. Quelques exemples.

1. *Un exemple de martingale qui converge presque sûrement mais n'est pas bornée dans* L^1. On considère une famille $(Y_n, \varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, la loi de Y_n est
$$\frac{1}{2}\left(\delta_{a_n} + \delta_{-a_n}\right),$$
où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs fixée, et la loi de ε_n est
$$\frac{1}{n^2}\delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0.$$
On définit, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \varepsilon_1, \dots, Y_n, \varepsilon_n)$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle converge presque sûrement. Montrer qu'on peut choisir $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que cette martingale ne soit pas bornée dans L^1.
2. *Un exemple de martingale qui tend presque sûrement vers* $+\infty$. On considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que
$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
On pose $M_n = \xi_2 + \dots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

Feuille de TD n^o 10 : Chaînes de Markov : définition, classification des états

Exercice 1. Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté 1/2. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système au jour n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer la matrice de transition P.
2. Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors tous les jours, on a encore une probabilité 3/5 d'être dans l'état 1.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

Exercice 2. Soit ξ_n le résultat du $n$ième jet d'un dé. On pose pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P, ainsi que P^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3. Soit S un ensemble dénombrable. On note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de S dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in S}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f \;=\; f(X_0) \qquad \text{et} \qquad M_n^f \;=\; f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A(f)(X_i) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Pour $x, y \in E$, on note $T_y = \inf\{n > 0, X_n = y\}$ et $\rho(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$. Montrer les relations suivantes :

1. $P^n(x,y) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_x(T_y = m) P^{n-m}(y,y)$ pour $n \geq 1$.
2. Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.
3. $\mathbb{P}_x(T_y = n+1) = \sum_{z\neq y} P(x,z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$ pour $n \geq 1$.
4. $\rho_{xy} = P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)\rho_{zy}$.

Exercice 5. Soit $p \in]0,1[$ et X_i des variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1).$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $M_n = \max\{S_0, \ldots, S_n\}$.

1. $(M_n)_{n\geq 0}$ est-elle une chaîne de Markov ?
2. On définit maintenant $Y_n = M_n - S_n$ pour tout $n \geq 0$. Etablir une relation entre Y_{n+1} et Y_n. En déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition Q.
3. La chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ?
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ admet une mesure réversible λ (avec $\lambda(0) = 1$) et déterminer λ. On rappelle qu'une mesure μ sur $\mathbb{N}$ est réversible pour la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ de transition Q si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mu(x)Q(x,y) \;=\; \mu(y)Q(y,x)\,.$$

Exercice 6. Soit Q la matrice de transition sur $S = \{0, \ldots, N\}$ définie par

$$Q(i,j) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S de fonction de transition Q.

1. Classifier les états de $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que pour tout $k \in S$, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$ et que la limite

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$$

existe $\mathbb{P}_k$ p.s.. Déterminer la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$.

Exercice 7. On étudie une file d'attente à un guichet où le temps de service d'un client est constant et pris comme unité de temps. On note ξ_n le nombre de clients arrivant pendant la n-ième période de temps. On suppose que les variables ξ_n, pour $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées de loi μ et que $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Un client arrivant dans cette période ne peut être servi avant l'instant $n+1$, même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendante de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer, en utilisant la loi forte des grands nombres, que si $\mathbb{E}(\xi_1) > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(\xi_1) < 1$, l'état 0 est récurrent.

Exercice 8. On considère la matrice de Markov suivante :

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

L'espace d'état est $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et les $*$ sont des coefficients non nuls. Trouver les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence.

Feuille de TD nº 11 : Chaînes de Markov : convergence. Processus de Galton-Watson

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la chaîne est irréductible et trouver la probabilité invariante.

Exercice 2. Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. Montrer que X admet une mesure réversible ζ (avec $\zeta(0) = 1$) et déterminer ζ. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une mesure de probabilité invariante.
3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Exercice 3. Modèle d'Ehrenfest de diffusion des gaz. Un ensemble de m boules, numérotées $1, \dots, m$, est réparti dans deux boîtes. L'état X_n du système est spécifié par le nombre de boules dans la première boîte, si bien que l'espace d'états est $E = \{0, 1, \dots, m\}$. A chaque étape on tire un numéro entre 1 et m (selon la loi uniforme et indépendamment des tirages précédents) et on change de boîte la boule portant ce numéro.

1. Trouver la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ? Apériodique ?
3. Déterminer la mesure de probabilité invariante. Commenter ce résultat.

Exercice 4. Propriété de Markov forte et théorème ergodique. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. Soit T un temps d'arrêt et f une fonction mesurable positive. Montrer la propriété de Markov forte :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} f(X_T, X_{T+1}, ...)|\mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[f(X_0, X_1, ...)].$$

On suppose maintenant que la chaîne est récurrente irréductible, et on note μ sa probabilité invariante. Soit f une fonction mesurable positive telle que $\int_E f d\mu < \infty$, et x un point de E. On définit les instants du n-ième retour en x par récurrence : $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{k > T_n \,:\, X_k = x\}$. On note $N_x(n)$ le nombre de retours en x effectués par la chaîne avant l'instant n. On pose aussi pour tout $k \geq 0$,

$$Z_k(f) = \sum_{n=T_k}^{T_{k+1}-1} f(X_n).$$

2. Montrer que les T_n sont des temps d'arrêt finis p.s.
3. En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que les $Z_k(f)$ sont des variables indépendantes et de même loi. Calculer $\mathbb{E}_x(Z_0(f))$ en fonction de $\int_E f d\mu$.
4. Montrer que $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\frac{1}{N_x(n)} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu(x)} \int_E f d\mu.$$

5. En déduire le théorème ergodique :

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s.} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu.$$

6. *Application* : On reprend l'énoncé de l'exercice 1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} X_k$ et $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} X_k^2$.

Exercice 5. On note X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. On suppose que, pendant l'intervalle de temps $[n, n+1[$, chacune des X_n particules a une probabilité $p = 1-q$, $0 < p < 1$ de quitter V et que, pendant ce même intervalle, un nombre aléatoire de particules suivant une loi de Poisson de paramètre λ entre dans V. On suppose que les différents phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{itX_1}|X_0 = x)$.
   (b) On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ, notée μ_θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ? Montrer que, pour une valeur de θ convenable, μ_θ est une probabilité invariante.
2. Montrer que la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

$$Q(x,y) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x\wedge y}\binom{x}{k} q^k (1-q)^{x-k}\frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

   En déduire que cette chaîne est irréductible et donc récurrente positive.
3. Quelle est la limite de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ lorsque n tend vers l'infini ? Et de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, irreductible récurrente positive, de matrice de transition Q et de probabilité invariante π. Pour toute fonction h définie sur E, on pose $< h, \pi >= \sum_{x\in E} h(x)\pi(x)$. Soit f une fonction bornée sur E telle que $< f, \pi >= 0$. On suppose qu'il existe une fonction bornée g vérifiant $(I-Q)g = f$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(X_k)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$.

1. Quelle est la limite de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n)$ pour $n \to \infty$?
2. Montrer qu'on a la décomposition $S_n = M_n + Z_n$ où

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, \quad U_k = g(X_k) - Qg(X_{k-1}), \quad Z_n = g(X_0) - Qg(X_n).$$

3. Montrer que $\mathbb{E}(U_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$ où $\mathcal{F}$ est la filtration canonique du processus $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} U_k^2)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(g(X_{k+1})Qg(X_k)) = \mathbb{E}((Qg)^2(X_k))$. En déduire que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(X_{k+1})Qg(X_k)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < (Qg)^2, \pi > .$$

5. On pose $\Sigma^2 =< g^2 - (Qg)^2, \pi >$. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(M_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.
6. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.

Exercice 7. Processus de Galton-Watson. Soit $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite sur $\mathbb{N}$ telle que $0 < p_0 < 1$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. Le processus de Galton-Watson modélise la situation suivante : au temps 0, on a une particule qui au temps 1 va se subdiviser aléatoirement en k particules, $k \geq 0$, avec une probabilité p_k. Et ainsi de suite pour chacune des particules créées, chacune se subdivisant indépendamment des autres. On note Z_n le nombre de particules au temps n. On pose $f(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, $m = \sum_{k\geq 0} kp_k$ et $T_0 = \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\}$.

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, une sous-martingale ou une sur-martingale suivant les valeurs de m. Que peut-on dire de $W_n = Z_n/m^n$?
2. On suppose $m < 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers 0.
3. On suppose $m = 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers une variable aléatoire Z_∞ finie presque sûrement. Classifier les états de la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $Z_\infty = 0$ p.s.
4. On suppose $m > 1$ et on note q l'unique solution de $f(s) = s$ dans $]0, 1[$. Montrer que $Y_n = q^{Z_n}$ est une martingale. Montrer que $q = \mathbb{P}(T_0 < \infty)$.

Feuille de TD n° 12 : Le processus de Poisson. Le mouvement brownien.

Exercice 1. Superposition et amincissement.

1. Soient $(N(t))_{t\geq 0}$ et $(N'(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ et λ'. Déterminer la loi du processus $(N(t)+N'(t))_{t\geq 0}$.
2. Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, et $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ indépendant de ces variables. Déterminer la loi du processus $(N'(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \qquad N'(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n.$$

Exercice 2. Processus de Poisson composé. Soient $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi μ et indépendantes de $(N(t))_{t\geq 0}$. On dit que le processus $(Z(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \qquad Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \zeta_n$$

est un processus de Poisson composé d'intensité λ et de loi de gain μ.

1. Montrer que les accroissements de $(Z(t))_{t\geq 0}$ sont indépendants et stationnaires, c'est-à-dire que :
   – pour tous $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$, les variables aléatoires $Z(t_2) - Z(t_1), \ldots, Z(t_k) - Z(t_{k-1})$ sont indépendantes ;
   – pour tous $0 \leq s < t$, la loi de la variable aléatoire $Z(t) - Z(s)$ ne dépend que de $t - s$.
2. Quelle est la loi de $Z(t)$, à t fixé ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $(Z(t))_{t\geq 0}$ soit un processus de Poisson.

Exercice 3. Considérons un processus de Poisson $N = (N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ et notons $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses instants d'arrivée, qui sont définis par

$$\forall n \geq 1 \qquad T_n = \inf\{t \geq 0 \mid N(t) = n\}.$$

Considérons alors le processus $E = (E(t))_{t\geq 0}$ défini par $E(t) = T_{N(t)+1} - t$ pour tout réel $t \geq 0$. De plus, pour tous réels $t \geq 0$ et $x \geq 0$, posons $\varphi(t,x) = \mathbb{P}(E(t) > x)$.

1. Que représente le processus E ?
2. Soient $t, x \in [0, \infty[$. Montrer que

$$\mathbb{P}(E(t) > x \mid T_1) = \mathbb{1}_{\{T_1 > t+x\}} + \varphi(t - T_1, x)\,\mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}}.$$

3. En déduire que

$$\varphi(t,x) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t \varphi(t-u,x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u.$$

4. Déterminer $\varphi(t,x)$ en résolvant cette équation intégrale.
5. Quelle est la loi de $E(t)$? Commenter.

Exercice 4. Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \mapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a,b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.

Exercice 5. Invariance par isométrie du mouvement brownien. Considérons des mouvements browniens indépendants $(B_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^{(d)})_{t\geq 0}$ et notons $B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ pour tout $t \geq 0$. On dit que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien en dimension d. Soit ψ une isométrie de $\mathbb{R}^d$ telle que $\psi(0) = 0$. Montrer que $(\psi(B_t))_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien en dimension d.

Exercice 6. L'ensemble des zéros du mouvement brownien. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \Omega \times \mathbb{R}^+ & \to & \{0,1\} \\ & & (\omega, t) & \mapsto & \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} \end{array}$$
est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. *Indication :* on pourra considérer les ensembles de la forme $E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, B_t(\omega) \neq 0\}$, pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathcal{F}$.
2. Soit $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. $\mathcal{Z}$ est fermé, non borné et de mesure de Lebesgue nulle.
3. *Question subsidiaire :* Montrer que p.s. $\mathcal{Z}$ est sans point isolé. *Indication :* on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \mid B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$.

Feuille de TD n° 13 : Révisions.

Problème 1 (première session 2010). Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 1$ et on dispose $n+1$ points numérotés de 0 à n sur un cercle (les points 0 et n sont situés côte à côte). Une particule saute d'un point à un autre de la façon suivante. À chaque étape et quel que soit le point où se trouve la particule, elle a une probabilité 1/2 de se déplacer vers chacun des deux points adjacents.

1. Soit E un espace fini et soit P une matrice de transition sur E, qui est bistochastique, i.e., elle vérifie

$$\forall y \in E \qquad \sum_{x \in E} P(x,y) = 1.$$

Montrer que P admet une mesure de probabilité invariante, que l'on précisera.

2. Posons $X_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, soit X_k le numéro du point occupé par la particule après le k-ième saut. Montrer que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
3. Quelle est la matrice de transition P de la chaîne $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$?
4. Cette matrice est-elle récurrente ?
5. Cette matrice est-elle périodique ?
6. Lorsque la chaîne est apériodique, quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_k = j)$ quand k tend vers l'infini ?
7. Soit Q la matrice extraite de P définie par $Q = (P_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n-1\}}$. Montrer que l'inverse de la matrice $I - Q$ (où I est la matrice identité) est la matrice M donnée par

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n-1\} \qquad M_{i,j} = \frac{2}{n} \min\{i,j\}(n - \max\{i,j\}).$$

8. Pour tout k différent de 0 ou n, on note $A_{k,n}$ la probabilité pour que partant du point k, le point n soit atteint avant le point 0. On définit les vecteurs suivants :

$$A = (A_{k,n})_{k \in \{1,\ldots,n-1\}} \qquad R = (P_{k,n})_{k \in \{1,\ldots,n-1\}}.$$

Montrer que l'on a la relation $(I - Q)A = R$.

9. En déduire la valeur de $A_{k,n}$ pour $k \in \{1,\ldots,n-1\}$.
10. Quelle est la probabilité pour qu'à son premier retour en 0, la particule ait fait un tour complet du cercle ? (c'est-à-dire qu'elle revienne par le point n si elle est partie par le point 1, ou vice versa). *Indication* : Considérer un état fictif, et se ramener à une chaîne à $n+2$ états.
11. Deux joueurs Paul et Pierre effectuent une suite de parties de pile ou face équilibrées. Après chaque partie, le perdant donne un euro au vainqueur. Le jeu cesse lorsque l'un des joueurs est ruiné. La fortune initiale de Paul est a, celle de Pierre est b. Quelle est la probabilité pour que Paul ruine Pierre ?

Problème 2 (première session 2009). On considère la probabilité de transition Q sur $\mathbb{Z}$ définie par :
- si $x \geq 1$, $Q(x,x-1) = 1/2$ et $Q(x,x+1) = Q(x,x+2) = 1/4$;
- si $x \geq 1$ et si $y - x \notin \{-1,1,2\}$, alors $Q(x,y) = 0$;
- $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$;
- si $x \leq -1$, alors $Q(x,y) = Q(-x,-y)$ pour $y \in \mathbb{Z}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition Q. Notons $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne de Markov partant de $X_0 = x$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance sous $\mathbb{P}_x$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}_x(\forall n \geq 1 \ |X_{n+1} - X_n| \geq 1) = 1.$$

2. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de X_n

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\varepsilon |X_{n+1}|) \mid \mathcal{F}_n].$$

3. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\exp(\alpha n - \varepsilon |X_n|))_{n \geq 0}$$

soit une $\mathbb{P}_x$-surmartingale pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\exp(\alpha n - \varepsilon |X_n|)$ converge p.s. sous la loi $\mathbb{P}_x$.
5. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{P}_x \left(\liminf_{n\to\infty} |X_n| = +\infty \right) = 1.$$
6. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{P}_x \left(\left\{ \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \right\} \cup \left\{ \lim_{n\to\infty} X_n = +\infty \right\} \right) = 1.$$
7. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on pose
$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad Q(f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1)].$$
Déterminer les réels β tels que la fonction $f(x) = \exp(\beta x)$ vérifie
$$\forall x \geq 1 \qquad Q(f)(x) = f(x).$$
8. Soit $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par
$$w(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \exp(-\alpha_0 x) + \mathbb{1}_{\{x<0\}}(2 - \exp(\alpha_0 x)).$$
Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que l'on ait $Q(w)(x) = w(x)$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.
9. Calculer $\mathbb{P}_x(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty)$.
10. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \leq a\}$. Soit $x > a$. Montrer que $(w(X_{n\wedge T}))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$.
11. En déduire $\mathbb{P}_x(T < \infty)$.
12. On dit qu'une fonction s est Q-excessive si $Q(s) \leq s$. Donner la valeur de
$$\inf\{s(x), s \text{ fonction } Q\text{-excessive et positive avec } s(a) = 1\}.$$