Chapitre VI
Applications linéaires

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps commutatif quelconque.

I – Généralités

1. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev donnés.

Une application $f: \substack{E \to F \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x})}$ est dite *linéaire* si

$$\forall\, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{E},\ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}.\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{y}}).$$

C'est-à-dire que f respecte les opérations disponibles sur E et F.
Une application linéaire transforme un segment de droite en un segment de droite, puisque

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) = tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}).$$

Exemples :

$*$ $f: \substack{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) \mapsto (12x_1+x_2, -x_1, x_1+x_2)}$ est une application linéaire.

$*$ Plus généralement, la donnée de p combinaisons linéaires des n coordonnées de x définit une application linéaire $f: \substack{\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (\dots,\dots,\dots)}$
($\dots$ = expressions de degré 1 dans les x_i et sans terme constant.)

$*$ La translation $f: \substack{\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1}$ n'est *pas* linéaire car $f(0) \neq 0$.

$\to$ Une application linéaire vérifie toujours $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

En effet, $f(\vec{0}) = f(-\vec{0} + \vec{0}) = -f(\vec{0}) + f(\vec{0}) = \vec{0}$.

$*$ $D: \substack{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) \mapsto f'(x)}$ est une application linéaire.

$*$ $I: \substack{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) \mapsto \int_0^x f(t)dt}$ est une application linéaire.

$*$ $u: \substack{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) \mapsto f(x^2)}$ est une application linéaire.

$*$ $v: \substack{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) \mapsto (f(x))^2}$ n'est pas une application linéaire.

En effet, $v(2f) = 4f^2 \neq 2v(f)$ en général.

$*$ On verra que les transformations géométriques : les projections, les symétries, les rotations, sont des applications linéaires.

2. Construction générale d'applications linéaires en dimension finie

Théorème
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec E de dimension finie, et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Alors pour tout choix de n vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ dans F, il existe une *unique* application linéaire $f: E \to F$ telle que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{v_1}, \dots, f(\overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{v_n}$.

Une application linéaire f est donc déterminée par la donnée de l'image d'une base.

Démonstration : Tout $\vec{x}$ de E s'écrit $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

Analyse. Si f est linéaire alors $f(\vec{x}\,) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_n f(\overrightarrow{e_n})$, ce qui peut aussi s'écrire

$$f(\vec{x}) = x_1\overrightarrow{v_1} + \dots + x_n\overrightarrow{v_n}.$$

f est donc déterminée par les données de $f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})$.

Synthèse. On vérifie que la formule proposée est une application linéaire (exercice).

Toutes les applications linéaires (en dimension finie) peuvent donc être définies par une formule de ce type !

3. Opérations générales sur les applications linéaires

Notation. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.

Proposition : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

$\rightarrow$ Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ (exercice).

Restriction à un sous espace vectoriel : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G est un sous espace vectoriel de E, alors $f_{|G}: \substack{G \to F \\ x \mapsto f(x)}$ est une application linéaire.

Composition : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g\ o\ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

En effet,
$$\begin{aligned}(g\ o\ f)(\lambda x + y) &= g\big(f(\lambda x + y)\big) \\ &= g\big(\lambda f(x) + f(y)\big) \\ &= \lambda g\big(f(x)\big) + g\big(f(y)\big) \\ &= \lambda (g\ o\ f)(x) + (g\ o\ f)(y).\end{aligned}$$

Définitions
1) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une bijection, on dit que c'est un *isomorphisme* de E dans F.
2) Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$, on dit que f est un *endomorphisme* de E. $\mathcal{L}(E, E) = End(E)$.
3) Si $f \in End(E)$ est une bijection, on dit que c'est un *automorphisme* de E.

Proposition : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors f^{-1} l'est aussi.

Démonstration : On considère $z = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

On a $f(z) = f\big(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\big)$

$\rightarrow f(z) = \lambda f\big(f^{-1}(x)\big) + f(f^{-1}(y))$,   car f est linéaire,

$\rightarrow f(z) = \lambda x + y \Longrightarrow \mathrm{z} = f^{-1}(\lambda x + y) = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

4. Exemples d'isomorphismes déjà rencontrés

a) Exemple important

Soit E est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}) \subset E$ une famille donnée.
On considère l'application « combinaison linéaire »

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{K}^n \longrightarrow E \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} \end{array}$$

Propriétés
1) f est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre. En effet, on a en général

$$\vec{v} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \vec{v} = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n}$$

Un vecteur $\vec{v}$ possède au plus une telle décomposition ssi $\mathcal{F}$ est libre.

2) f est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

3) f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E, et l'application réciproque

$$f^{-1}(\vec{v}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{les coordonnées de } \vec{v} \text{ dans } \mathcal{F}.$$

On dit alors que E et $\mathbb{K}^n$ sont *isomorphes*.

Définition : Deux espaces vectoriels liés par un isomorphisme sont dits isomorphes.

Corollaire important.
Un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est toujours isomorphe à $\mathbb{K}^n$ avec $n = \dim E$.

En particulier, les droites réelles sont toutes isomorphes à $\mathbb{R}$, les plans réels sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$, etc.

Attention, cela ne signifie pas qu'il n'existe qu'une seule droite vectorielle, mais que toutes les droites « se ressemblent » !

b) Retour sur le problème d'interpolation de Lagrange

Soient P_{n-1} l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à $n-1$,
$x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels distincts donnés et $y_1, y_2, \dots, y_n$ des réels quelconques.

On a vu le résultat suivant :
Théorème d'interpolation de Lagrange :

Il existe un unique polynôme $P \in P_{n-1}$ tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Soit $L: \underset{P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))}{P_{n-1} \to \mathbb{R}^n}$. L est une application linéaire par rapport à P.

Théorème de Lagrange $\Leftrightarrow$ L est un isomorphisme. On a en particulier $n = \dim P_{n-1}$.

c) Suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ satisfaisant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ($a, b \in \mathbb{C}$)

Pour $a, b \in \mathbb{C}$ donnés, on note

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}.$$

C'est un $\mathbb{C}$-ev et $f: \underset{(u_n)_{n\geq 2} \mapsto (u_0, u_1)}{S \to \mathbb{C}^2}$ est un isomorphisme.

$\Leftrightarrow$ il existe une unique suite $(u_n) \in S$ de condition initiale $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ donnée.

S est un plan (complexe) de l'espace de toutes les suites complexes. On a calculé f^{-1} avec des formules explicites, c'est-à-dire que la formule de récurrence a été résolue en fonction de la condition initiale. On a également donné une base de S :
si $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$, les suites $({r_1}^n)$ et $({r_2}^n)$ forment une base de S, avec r_1 et r_2 racines de $r^2 - ar - b = 0$.

5. Noyau et image d'une application linéaire

Définitions : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note :
i) $\operatorname{Im} f = \{f(\vec{x}) = \vec{y},\ \vec{x} \in E\} \subset F$. C'est l'*image* de f,
ii) $\ker f = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \subset E$. C'est le *noyau* de f.

Ces espaces sont fondamentaux dans l'étude des propriétés de l'application f.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
i) $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E.
ii) $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F.
iii) f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$.
iv) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration i) et **Démonstration ii)** à faire en exercice.

Démonstration iv) : Ce point est vrai pour toute application, linéaire ou non.

Démonstration iii) :
($\Rightarrow$) : Soit $\vec{x} \in \ker f$. On a $f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F} = f(\vec{0})$. Par injectivité, on a $\vec{x} = \vec{0}$. En effet, $\overrightarrow{0_F}$ n'a qu'un seul antécédent et c'est $\vec{0}$ car f est une application linéaire.

($\Leftarrow$) : On suppose que $\ker f = \{\vec{0}\}$. Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in E$.

On a $f(\overrightarrow{x_1}) = f(\overrightarrow{x_2}) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{x_1}) - f(\overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} \in \ker f$

$\Rightarrow \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$ et f est injective.

Remarque : Ce critère d'injectivité par le noyau est élémentaire mais *très utile*. En effet, si $\dim E = n$, le problème $f(\overrightarrow{x_1}) = f(\overrightarrow{x_2})$ a $2n$ inconnues alors que $f(\vec{x}) = \vec{0}$ n'en a que n. Notez que c'est la *linéarité* de f qui permet cette réduction.

6. Espace des solutions d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $\vec{y}$ un vecteur donné de F. Les notions de noyau et d'image permettent de décrire l'espace des solution S_y de l'équation linéaire :

$$(E_y) : \ f(\vec{x}) = \vec{y}$$

Proposition

1) L'équation (E_y) possède au moins une solution $\vec{x}$ si et seulement si $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$.

2) Si $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$ et si $\vec{x}_0$ est une *solution particulière* de (E_y), alors toute autre solution est de la forme $\vec{x} = \overrightarrow{x_0} + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in \ker f$.

On l'exprime en disant qu'une solution de l'équation linéaire avec second membre (E_y) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la *solution générale* de l'équation *homogène* (ou « sans second membre ») (E_0) : $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Autrement dit, l'espace des solution S_y est *l'espace affine* passant par la solution particulière $\overrightarrow{x_0}$ et de direction le noyau de f, ce que l'on écrit :

$$S_y = \overrightarrow{x_0} + \ker f$$

Démonstration

1) C'est une propriété générale, valable pour toute application linéaire ou non, par définition de l'image.

2) Si $\vec{x}_0$ est une *solution particulière* de (E_y), alors on a $f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{y}$, d'où

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = f(\overrightarrow{x_0}) \Leftrightarrow f(\vec{x}) - f(\overrightarrow{x_0}) = f(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} - \overrightarrow{x_0} = \vec{u} \in \ker f \ \Leftrightarrow \ \vec{x} = \overrightarrow{x_0} + \vec{u} \ \text{ avec } \ \vec{u} \in \ker f.$$

Remarque : Si on choisit des bases de E et F, l'équation (E_y) devient un système linéaire dans les coordonnées de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Alors l'image de f apparait comme équations de compatibilité d'un système échelonné équivalent, tandis que le noyau est paramétré par les inconnues non principales.

II – Résultats fondamentaux

On se place dans le cas où l'espace de départ E est de dimension finie, et $f: E \to F$ est une application linéaire. $\ker f \subset E$ est donc un sous espace vectoriel de E de dimension finie.

1. Définition et premières propriétés du rang d'une application

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Alors $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\big)$ = le sous espace vectoriel de F engendré par l'image d'une base de E.

En particulier, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de E.

Définition du rang d'une application linéaire.
On note $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = rg\big(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\big)$.

Démonstration :
On a $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si
$\exists\, \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$ avec $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$.
Par linéarité de f, on a $f(\vec{x}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}) = \vec{y}$

$$\Leftrightarrow \vec{y} \in Vect\big(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\big).$$

Bornes élémentaires sur le rang :
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a $rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration.
$*$ D'après la proposition ci-dessus,
$rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = rg\big(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\big) \leq n = \dim E$.
$*$ et comme $\operatorname{Im} f \subset F$, on a aussi $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim F$.

Illustration : L'image par une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension n est toujours un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n.

Exemples :
i) L'image par f d'une droite est une droite ou un point.
ii) L'image par f d'un plan est un plan, une droite ou un point.
iii) Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire surjective alors $p \leq n$.

Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. On note $f(B) = (f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))$ l'image de la base B.
i) f injective $\Leftrightarrow f(B)$ est libre.
ii) f surjective $\Leftrightarrow f(B)$ est génératrice de F.
iii) f bijective $\Leftrightarrow f(B)$ est une base de F.

Démonstration i) :
On a vu que f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$.
On suppose donc que $\ker f = \{\vec{0}\}$. La famille $f(B)$ est-elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 f(\vec{e_1}) + \dots + \lambda_n f(\vec{e_n}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} \in \ker f = \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ car } B \text{ est libre par hypothèse.}$$

Inversement : On suppose $f(B)$ est libre et $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} \in \ker f$. Alors

$$f(\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n}) = \vec{0} = \ \lambda_1 f(\vec{e_1}) + \dots + \lambda_n f(\vec{e_n})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ si } f(B) \text{ est libre.}$$

Ceci donne $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Démonstration ii) :
On a vu que f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F = Vect\big(f(B)\big)$
$\Leftrightarrow \ f(B)$ est génératrice de F.

2. Conséquences utiles

La notion de dimension permet d'obtenir facilement des critères très pratiques d'injectivité, de surjectivité et d'isomorphisme.

Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E.
i) Si f est injective, alors $\dim E \leq \dim F$.
ii) Si f est surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.
iii) Si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$.
iv) f est un isomorphisme si et seulement si

$\dim E = \dim F$ **et** (f injective **ou** surjective).

Démonstration i) : f injective $\Leftrightarrow f(B)$ libre dans $F \Rightarrow card\big(f(B)\big) = \dim E \leq \dim F$

Démonstration ii) : f surjective $\Leftrightarrow f(B)$ génératrice de $F \Rightarrow card\big(f(B)\big) = \dim E \geq \dim F$

Démonstration iii) : On se sert de i) et ii).

Démonstration iv) :
f isomorphisme $\Leftrightarrow f(B)$ base de F
$\Leftrightarrow \ card\big(f(B)\big) = \dim E = \dim F$ avec f libre ou génératrice
$\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ et f surjective ou injective

Exemple : Soit P_n l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

Soit l'application linéaire $f: {}^{P_n \to P_n}_{P \mapsto \lambda P + P'}$, avec $\lambda \neq 0$ fixé.

Problème : On veut montrer que f est un isomorphisme. En particulier, pour tout $Q \in P_n$ donné, l'équation différentielle $\lambda P + P' = Q$ a une unique solution.

La dimension de l'espace de départ est égale à celle de l'espace d'arrivée. Il suffit donc de vérifier que f est injective, c'est-à-dire que $\ker f = \{\vec{0}\}$.

On considère $P \in P_n$ tel que $f(P) = 0 = \lambda P + P'$.

$P = Ce^{-\lambda x}$ est une solution mais pas un polynôme. Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ alors le degré de λP est égal au degré de P si $\lambda \neq 0$, et le degré de P' est inférieur au degré de $P - 1$.

$\Rightarrow \deg(\lambda P + P') = \deg P \;\; si\; P \neq 0$

$\Rightarrow \lambda P + P' \neq 0 \; si \; P \neq 0 \Rightarrow f$ est injective, et finalement bijective.

3. Le théorème du rang

Le résultat suivant est le plus important de ce chapitre. Il lie *quantitativement* la dimension de l'image à celle du noyau et de l'espace de départ pour une application linéaire quelconque.

Théorème du rang

Soit $f: E \to F$ une application linéaire avec E de dimension finie. Alors on a

$$rg(f) = \dim E - \dim(\ker f).$$

En particulier, f injective $\Rightarrow rg(f) = \dim E \leq \dim F$,
f surjective $\Rightarrow \; rg(f) = \dim F = \dim E - \dim(\ker f) \Rightarrow \dim E \geq \dim F$,
f bijective $\Rightarrow rg(f) = \dim E = \dim F$.

Démonstration 1 : méthode par système linéaire.

- Soit $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E. On sait en utilisant la technique du pivot que
$rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = rg\big(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n})\big)$
$\quad =$ nombre d'inconnues principales du système (S)
$\quad$ défini par $x_1 f(\vec{e_1}) + \cdots + x_n f(\vec{e_n}) = \vec{0}$.

- D'autre part,

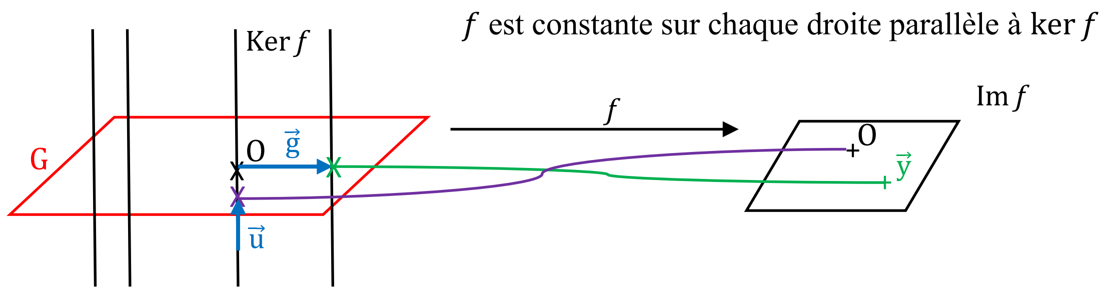
$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} \in \ker f \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} = x_1 f(\vec{e_1}) + \cdots + x_n f(\vec{e_n})$$

$\Rightarrow \ker f = Sol(S)$ et $\dim(\ker f) =$ nombre d'inconnues non principales de (S).

On a donc $\dim E =$ nombre d'inconnues principales + non principales de (S)

$\Leftrightarrow \dim E = rg(f) + \dim(\ker f)$.

Démonstration 2 : méthode géométrique.



Soit G le supplémentaire de $\ker f$ dans l'espace vectoriel de départ E.

On a $E = G \oplus \ker f$. On restreint f à G.

On montre que $f_{|G} : \begin{smallmatrix} G \to \operatorname{Im} f \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{smallmatrix}$ est un isomorphisme.

* $f_{|G}$ est-elle injective ? Soit $\vec{x} \in G$ tel que $f_{|G}(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{x})$

$\Leftrightarrow \vec{x} \in \ker f \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ et $f_{|G}$ est injective.

* $f_{|G}$ est-elle surjective ? Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{y}$

On décompose $\vec{x} = \vec{g} + \vec{u}$ avec $\vec{g} \in G$ et $\vec{u} \in \ker f$.

On a donc $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{g}) + f(\vec{u}) = f(\vec{g}) = f_{|G}(\vec{g})$

$\Rightarrow f_{|G}$ est donc un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow \dim G = \dim(\operatorname{Im} f) = rg(f)$ avec $E = G \oplus \ker f$

$\Rightarrow \dim E = \dim G + \dim(\ker f) = rg(f) + \dim(\ker f)$.

Attention : Dans le cas des endomorphismes, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels de E avec $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$ (théorème du rang), *mais on a pas en général*

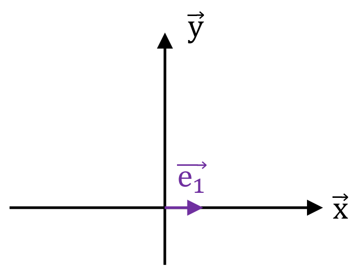
$$\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\} \quad \text{ni} \quad E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f.$$

En effet, le théorème du rang ne donne pas *les positions respectives* de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Par exemple : $f : \begin{smallmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\vec{x},\vec{y}) \mapsto (\vec{y},\vec{0}) \end{smallmatrix}$.

On a $\ker f = \{(\vec{x},\vec{0}), \vec{x} \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}\,\overrightarrow{e_1}$

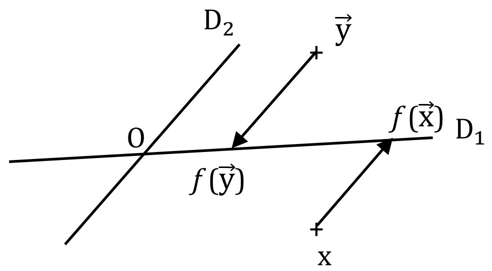
et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\,\overrightarrow{e_1} = \ker f$, d'où $f \circ f = \vec{0}$.



Remarque i) : f est semblable à la dérivation des fonctions affines.

Remarque ii) : Il existe aussi des cas où $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exemple : Projections sur D_1 le long de D_2 :



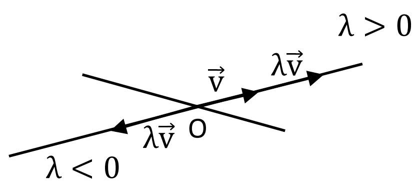
$\begin{cases} \operatorname{Im} P = D_1 \\ \ker P = D_2 \end{cases}$ et $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$.

III – Quelques familles classiques d'applications linéaires

1. Exemples génériques dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soient E un espace vectoriel quelconque, $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire donné.

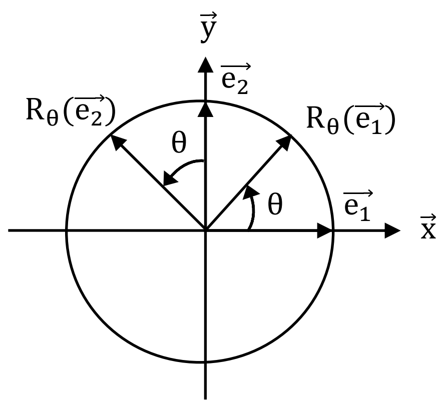
i) Homothétie de rapport λ



$h_\lambda : \begin{matrix} E \to E \\ \vec{v} \mapsto \lambda\vec{v} \end{matrix}$ est l'application linéaire « homothétie de rapport λ ».

Si $\lambda \neq 0$, h_λ est un isomorphisme avec $(h_\lambda)^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$

ii) Rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$



$R_\theta(\vec{e_1}) = (\cos\theta\,, \sin\theta) = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$

$R_\theta(\vec{e_2}) = (-\sin\theta\,, \cos\theta) = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées $\vec{v} = (x, y) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

$R_\theta(\vec{v}) = xR_\theta(\vec{e_1}) + yR_\theta(\vec{e_2})$

$\quad = x(\cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}) + y(-\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2})$

$\to R_\theta(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{e_1} + (x\sin\theta + \ y\cos\theta)\vec{e_2}$

$\to R_\theta(x, y) = (x(\cos\theta) - y(\sin\theta), x(\sin\theta) + y(\cos\theta))$

On peut donc décrire l'application linéaire « rotation d'angle θ » avec la formule :

$R_\theta : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} \mapsto R_\theta(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{e_1} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{e_2} \end{matrix}$

Autre méthode : Se servir du fait que $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

$\vec{v} = (x, y) \leftrightarrow z = x + iy$

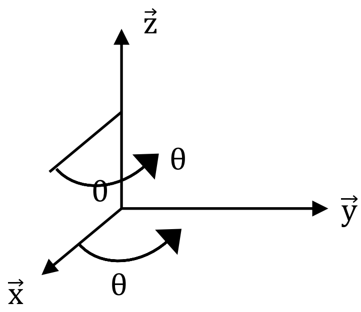
$R_\theta(\vec{v}) \leftrightarrow e^{i\theta}z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$

Remarque : Rotation dans $\mathbb{R}^2$ = Homothétie de rapport $e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}$.

iii) Rotation d'angle θ et d'axe Oz dans $\mathbb{R}^3$

$$R_\theta^{Oz}(\vec{e_1}) = (\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0) = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$$

$R_\theta^{Oz}(\overrightarrow{e_2}) = (-\sin\theta\,, \cos\theta\,, 0) = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$



$R_\theta^{Oz}(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3}$

$\rightarrow R_\theta^{Oz}(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\overrightarrow{e_1} + (x\sin\theta + \ y\cos\theta)\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$

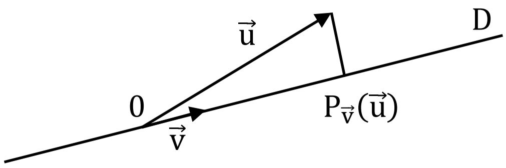
$\rightarrow R_\theta^{Oz}(x, y) = (x(\cos\theta) - y(\sin\theta), x(\sin\theta) + y(\cos\theta), z)$

On peut donc décrire l'application linéaire « rotation d'angle θ et d'axe Oz » avec la formule :

$$R_\theta^{Oz}: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \ \mapsto\ R_\theta(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\overrightarrow{e_1} + (x\sin\theta + \ y\cos\theta)\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \end{array}$$

iv) Projections orthogonales

Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $D = \mathbb{R}\vec{v}$ = droite engendrée par $\vec{v}$.



$P_{\vec{v}}: \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{u} \mapsto \langle \vec{u}|\vec{v}\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \end{array}$ est *la projection orthogonale sur* D.

$P_{\vec{v}}$ est une application linéaire telle que :

$P_{\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{v}$ et $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{0}$ si $\vec{u} \perp D$.

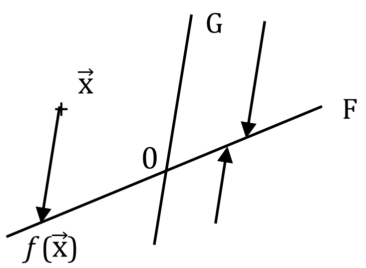
Il s'agit de la projection sur la droite D le long du plan $P \perp D$.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (a, b, c)$ non nul et $\vec{u} = (x, y, z)$

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c).$$

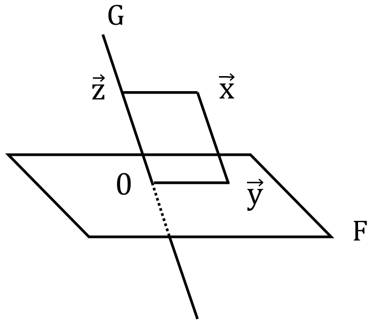
Par exemple $P_{\overrightarrow{e_1}}(x, y, z) = (x, 0,0)$ pour $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$.

2. Les projections générales



Soit E un espace vectoriel général.
Si $E = F \oplus G$ alors tout $\vec{x} \in E$ se décompose en

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$.



Définition : La projection de E sur F le long de G est l'application $p: \begin{array}{c} E \rightarrow E \\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \mapsto p(\vec{x}) = \vec{y} \end{array}$.

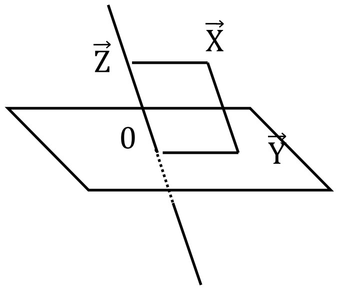
Cas particulier : Projection orthogonale si $G = F^\perp$

Propriétés

i) p est une application linéaire,
ii) $\text{Im}\, p = F = \{\vec{x} \in E \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$,
iii) $\ker p = G$,
iv) $p \ o\ p = p$.

Exemples dans $\mathbb{R}^3$: Projection sur un plan P de $\mathbb{R}^3$ le long d'une droite D.

$P = \{\vec{v} = (x, y, z) \mid ax + by + cz = l(\vec{v}) = 0\}$ avec $a, b\ ou\ c \neq 0$.



$D = \mathbb{R}\vec{V}$ où $\vec{V} = (x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$

Soit $l(\vec{X}) = ax + by + cz$. $l: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est linéaire.

$P = \ker l$ et $\dim P = \dim \mathbb{R}^3 - rg(l)$ avec $\text{Im}\, l \neq \{\vec{0}\}$ car $l \neq 0$.

$\to \text{Im}\, l = \mathbb{R}$ et donc $\dim P = 2$.

On veut décomposer $\vec{X}$ sous la forme $\vec{X} = \vec{Y} + \vec{Z}$ avec $\vec{Y} \in P$ et $\vec{Z} \in D$.

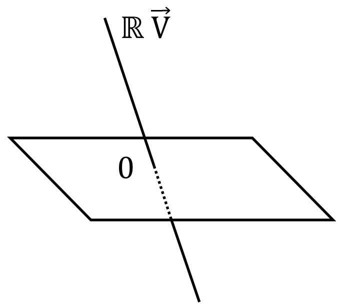
Par définition, la projection de $\vec{X}$ sur P est le vecteur $\vec{Y}$. On sait que $\vec{Z} \in D = \mathbb{R}\vec{V}$.
$\to\ \vec{Z} = \lambda\vec{V}$

On a $l(\vec{X}) = l(\vec{Y}) + l(\vec{Z}) = l(\vec{Z}) = \lambda l(\vec{V}) \quad \Rightarrow\ \lambda = \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{V})}$ avec $l(\vec{V}) \neq \vec{0}$ car $\vec{V} \in P$.

Finalement, la projection de $\vec{X}$ sur P est l'application $\pi: \vec{X} \to \vec{X} - \vec{Z} = \vec{X} - \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{Y})}\vec{V}$

Formule explicite : $\pi(\vec{X}) = \vec{X} - \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{V})}\vec{\text{V}}$.

Exemple : Calcul d'ombre



$P = \{\vec{v} = (x, y, z) \mid z = 0\} = \{sol\}$

$\vec{V} = (1,1,1) =$ Direction du Soleil

$l(\vec{X}) = ax + by + cz = z$ et $l(\vec{V}) = 1$

$\pi(\vec{X}) = \pi(x, y, z) = (x, y, z) - z\vec{V}$

Soit $\pi(\vec{X}) = (x - z, y - z, 0)$

Théorème de la caractérisation des projections.
Soit E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E.
Alors p est une projection si et seulement si $p\ o\ p = p$ auquel cas p est la projection sur $\text{Im}\, p$ le long de $\ker p$.

Démonstration :

(⇒) : Par définition d'une projection, on a pour $E = F \oplus G$

$p:\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \to p(\vec{x}) = \vec{y} \in F.$

En particulier, on a $p(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{z} \in G$,
et de plus $p(\vec{y}) = \vec{y}$ pour $\vec{y} \in F \Leftrightarrow \operatorname{Im} p = F$.

Enfin, $(p\ o\ p)(\vec{x}) = p(\vec{y}) = \vec{y}$. Ce qui montre que $p\ o\ p = p$.

(⇐) : On suppose que $p\ o\ p = p$.
On pose $F = \ker(Id - p) = \{\vec{x} \in E \mid (Id - p)(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$: c'est l'ensemble des *vecteurs invariants* de p.

F est un sous espace vectoriel de E car c'est un noyau. On pose aussi $G = \ker p$.

- On montre d'abord que $E = F \oplus G$.

Analyse : Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, alors $p(\vec{x}) = p(\vec{y}) + p(\vec{z}) = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y}$.

$\Rightarrow\ \vec{y} = p(\vec{x})$ et $\vec{z} = \vec{x} - p(\vec{x})$ sont les seuls choix possibles.

On a bien $\vec{x} = p(\vec{x}) + \left(\vec{x} - p(\vec{x})\right)$.

Synthèse : On vérifie que $p(\vec{x}) \in F$ et que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in G$.

$*\ p(\vec{x}) \in F \Leftrightarrow p\left(p(\vec{x})\right) = p(\vec{x})$. Or $(p\ o\ p)(\vec{x}) = p(\vec{x})$, donc OK par hypothèse.

$*\ \left(\vec{x} - p(\vec{x})\right) \in G \Leftrightarrow p\left(\vec{x} - p(\vec{x})\right) = \vec{0} \Leftrightarrow p(\vec{x}) - (p\ o\ p)(\vec{x}) = \vec{0}$, OK par hypothèse.

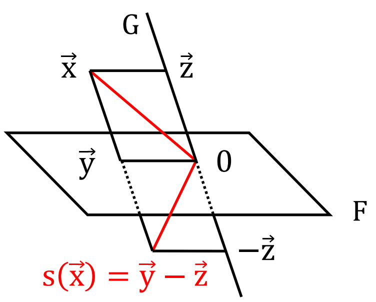
Conclusion : On a bien $E = F \oplus G$.

- On vérifie maintenant que p est la projection de F le long de G :

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F = \{\vec{y} \in E \mid p(\vec{y}) = \vec{y}\}$ et $\vec{z} \in G = \ker p$

Donc $p(\vec{x}) = p(\vec{y}) + p(\vec{z}) = p(\vec{y})$.

3. Les symétries



$E = F \oplus G$. La symétrie à F parallèlement à G est l'application $s: \begin{smallmatrix} E \to E \\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \mapsto s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z} \end{smallmatrix}$

Proposition : On a $s\ o\ s = Id_E$, avec $s \in End(E)$.
s est une bijection avec $s^{-1} = s$.
$F = \{\vec{x} \in E \mid s(\vec{x}) = \vec{x}\} = \ker(Id - s)$
$G = \{\vec{x} \in E \mid s(\vec{x}) = -\vec{x}\} = \ker(Id + s)$

Exemples : . $E = \mathbb{R}^3$, $F =$ plan P, $G =$ droite orthogonale à P.

$\rightarrow s$ est une symétrie orthogonale, dite « symétrie miroir ».

$P = \{(x, y, 0),\ \ x, y$ quelconques$\}$; $D = \{(0,0,z),\ \ z$ quelconque$\}$.

Si $\vec{v} = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0,0,z)$, alors $s(\vec{v}) = (x, y, 0) - (0,0,z) = (x, y, -z)$.

Cas plus général dans $\mathbb{R}^3$

$P = \ker l = \{\vec{X} = (x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$ et $D = \mathbb{R}\vec{v}$ avec $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$

On a vu que $\vec{X}$ se décompose sous la forme $\vec{X} = \left(\vec{X} - \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{v})}\vec{v}\right) + \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{v})}\vec{v}$,
avec $\vec{X} - \frac{l(\vec{X})}{l(\vec{v})}\vec{v} = \vec{Y} \in P$ et $\frac{l(\vec{X})}{l(\vec{v})}\vec{v} = \vec{Z} \in D$. On a donc en général :

$$s(\vec{X}) = \vec{Y} - \vec{Z} = \vec{X} - 2\frac{l(\vec{X})}{l(\vec{v})}\vec{v} \rightarrow \text{ Symétrie par rapport à } P \text{ le long de } D.$$

Théorème de la caractérisation des symétries.
Soit E un espace vectoriel et s un endomorphisme de E.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s\ o\ s = Id_E$ auquel cas s est la symétrie par rapport à $F = \{\vec{x} \in E \mid s(\vec{x}) = \vec{x}\}$ le long de $G = \{\vec{x} \in E \mid s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$.

Démonstration :
($\Rightarrow$) : $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z} \Rightarrow s(s(\vec{x})) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$

$\Rightarrow s\ o\ s = Id_E$.

($\Leftarrow$) : On suppose que $s\ o\ s = Id_E$. On veut montrer que $E = F \oplus G$.

Analyse : Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, alors $s(\vec{x}) = s(\vec{y}) + s(\vec{z}) = \vec{y} - \vec{z}$.

$\Rightarrow \vec{y} = \frac{\vec{x}+s(\vec{x})}{2}$ et $\vec{z} = \frac{\vec{x}-s(\vec{x})}{2}$ sont les seuls choix possibles.

On a bien $\vec{x} = \frac{\vec{x}+s(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x}-s(\vec{x})}{2}$.

Synthèse : On vérifie que $\frac{\vec{x}+s(\vec{x})}{2} \in F$ et que $\frac{\vec{x}-s(\vec{x})}{2} \in G$.

. $s(\vec{y}) = \frac{s(\vec{x})+s(s(\vec{x}))}{2} = \frac{\vec{x}+s(\vec{x})}{2} = \vec{y}$ car $s\ o\ s = Id_E$.

. $s(\vec{z}) = \frac{s(\vec{x})-s(s(\vec{x}))}{2} = \frac{s(\vec{x})-\vec{x}}{2} = -\vec{z}$.

Conclusion : On a bien $E = F \oplus G$.

D'autre part, si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, alors $s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.

$\rightarrow s$ est le symétrique par rapport à F le long de G.

Un exemple abstrait, les fonctions paires et impaires.

$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $f \in E$.

On pose $s(f): {}_{x \mapsto f(-x)}^{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$. On a $(s\ o\ s)(f) = f$. $\to s$ est une symétrie de E.

D'après l'énoncé précédent, on a $E = F \oplus G$:

$F = \{f \in E \mid s(f) = f\} = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ = Fonctions paires.

$G = \{f \in E \mid s(f) = -f\} = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$ = Fonctions impaires.

Toute fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire de manière unique : en pratique, on a $f = \frac{f+s(f)}{2} + \frac{f-s(f)}{2}$, c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Exemple : $e^x = \cosh x + \sinh x$; $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

4. Formes linéaires

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $l: E \to \mathbb{K}$. On note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. E' est l'espace dual de E.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E, alors tout $\vec{x}$ de E s'écrit $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

$\to l(\vec{x}) = x_1 l(\overrightarrow{e_1}) + x_2 l(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n l(\overrightarrow{e_n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(\overrightarrow{e_i})$

l est donc déterminée par la donnée des n nombres $l(\overrightarrow{e_1}), l(\overrightarrow{e_2}), \dots, l(\overrightarrow{e_n})$.

Proposition : $l: {}_{l \mapsto (l(\overrightarrow{e_1}), l(\overrightarrow{e_2}), \dots, l(\overrightarrow{e_n}))}^{E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n}$ est un isomorphisme et $\dim E' = \dim E = n$.

Une base de E' est donnée par les n applications coordonnées

$$e_1^*: {}_{\vec{x} \mapsto x_1}^{E \to \mathbb{K}}, e_2^*: {}_{\vec{x} \mapsto x_2}^{E \to \mathbb{K}}, \dots, e_n^*: {}_{\vec{x} \mapsto x_n}^{E \to \mathbb{K}}.$$

Cette base $B' = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ de E' est appelée la *base duale* de B. Pour tout $l \in E'$, on a

$$l = l(e_1)e_1^* + l(e_2)e_2^* + \cdots + l(e_n)e_n^*$$

Noyau d'une forme linéaire

Si $l \in E'$ est une forme linéaire, alors $l = 0 \Leftrightarrow \ker l = E$ et $l \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} l = \mathbb{K}$ et $rg(l) = 1$.

$\to H = \ker l$ est un espace de dimension $n - 1$ soit $\dim H = \dim E - 1$ (Théorème du rang).

L'espace H est appelé un *hyperplan* de E.

Exemples :
- Une droite est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$, un plan de $\mathbb{R}^3$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, etc…

- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ donné. L'application « valeur en x », $l_x: \substack{E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x)}$ est une forme linéaire.

- $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'intégrale $I: \substack{E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(x)dx}$

- Si $E =$ fonction polynomiales de degré inférieur ou égal à n
$= \{P \mid P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\}$
$= \mathbb{R}_n[X]$

Alors $\dim E = n + 1$ donc $\dim E' = n + 1$.

On considère $n + 1$ points donnés $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $[a, b]$ avec $b > a$, deux à deux différents.

Il y a donc $n + 1$ formes linéaires $l_{x_1}, l_{x_2}, \dots, l_{x_n}$.

Proposition : $(l_{x_1}, l_{x_2}, \dots, l_{x_n})$ est une base de E'.

Démonstration : On a $card(l_{x_1}, l_{x_2}, \dots, l_{x_n}) = \dim E' = n + 1$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre.

Si $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_{x_i} = 0$, alors pour tout $P \in E$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P(x_i) = 0$.

$\to \ \exists\, P \mid P(x_1) = 1, P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 0$.

On retrouve le polynôme de Lagrange $\to \lambda_i = 0$.

Conséquence : formule d'intégration

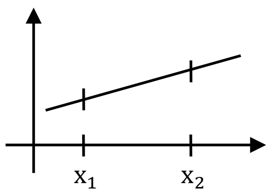
La forme linéaire $I(P) = \int_a^b P(x)dx$ est une combinaison linéaire fixe des l_{x_i}.

Il existe des nombres fixes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que pour tout P de degré inférieur ou égal à n, on ait :

$$I(P) = \int_a^b P(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P(x_i)$$

En testant avec $P = P_i = \text{i}^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange, on trouve : $\lambda_i = I(P_i)$.

Exemple : Si $n = 1$, la formule utilise deux points :



Prenons $x_1 = a$ et $x_2 = b$,

$$\int_a^b P(x)dx = (b - a)\left(\frac{P(a) + P(b)}{2}\right)$$

C'est la formule des trapèzes !

Cette formule est exacte pour les fonctions affines par morceaux, et approchée pour les fonctions quelconques. Voir cours d'analyse pour estimation de l'erreur faite.

- Dans le cas $n = 2$, avec trois points $x_1 = a, x_2 = b$ et $x_3 = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right)$$

Cette formule est exacte sur tous les polynômes de degré ≤ 2, et beaucoup plus précise que la précédente pour une fonction régulière quelconque.

Cette technique d'intégration approchée s'appelle la *méthode de Simpson* : voir http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Simpson. Elle est très utilisée pour estimer les intégrales, par exemple dans les calculatrices.