Chapitre IV
Bases et dimension d'un espace vectoriel

Objectif : Nous allons voir comment fabriquer des systèmes de coordonnées pour les vecteurs d'un espace vectoriel général.

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-ev, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou un corps commutatif quelconque.

I – Familles libres, génératrices, bases

1. Définitions

Définition de famille libre, liée, indépendance linéaire
- Une famille (une collection) $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E est dite *liée* s'il existe des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls* tels que

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}.$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ sont *linéairement dépendants*.

- Dans le cas contraire, on dit que la famille est *libre*.
Dire qu'une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est libre signifie que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ vérifient $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$, alors on a forcément $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Définition de famille génératrice
On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est *génératrice* de E si $E = Vect(\mathcal{F})$, i.e. tout vecteur $\vec{u}$ de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

Définition de base
Une famille $\mathcal{F}$ de E est une *base* de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E.

2. Bases et coordonnées

Proposition : La famille $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i} \in B$. Autrement dit :

$$\forall \vec{v} \in E, \ \ \exists! \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \text{ tels que } \vec{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ s'appellent *les coordonnées* de $\vec{v}$ dans la base B.

Démonstration :

(⇐) : B est génératrice par hypothèse. B est elle libre ?

Soient $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$.

On a aussi $\vec{0} = 0 \times \overrightarrow{v_1} + 0 \times \overrightarrow{v_2} + \cdots + 0 \times \overrightarrow{v_n}$.

Par unicité de la décomposition de $\vec{0}$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

B est donc libre, et génératrice de E, c'est donc une base de E.

($\Rightarrow$) : Par hypothèse, B est une base de E = génératrice de E et libre.

Soit $\vec{v} \in E$ quelconque.

B génératrice $\Rightarrow \vec{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}$. Cette combinaison est-elle unique ?

Si on a aussi $\vec{v} = \lambda'_1\overrightarrow{v_1} + \lambda'_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda'_n\overrightarrow{v_n}$, alors par soustraction

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\overrightarrow{v_1} + (\lambda_2 - \lambda'_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)\overrightarrow{v_n} = \vec{0}.$$

Comme B est libre, on a $(\lambda_1 - \lambda'_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda'_1$, et ce jusqu'à n.

On a donc unicité de l'écriture de $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

En résumé : B génératrice équivaut à l'existence de la CL, et B libre équivaut à son unicité.

3. Exemples

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ...)

Soient $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0, \dots ,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0, \dots ,0)$, ... , $\overrightarrow{e_n} = (0,0,0, \dots ,1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

$B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots , \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \mathbb{K}^n$

On a vu que $\vec{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} \Rightarrow B$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.

De plus, $\vec{v} = x'_1\overrightarrow{e_1} + x'_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e_n} \Leftrightarrow \vec{v} = (x'_1, x'_2, \dots , x'_n)$

$$\Leftrightarrow x_1 = x'_1,\ \ x_2 = x'_2, \dots,\ \ x_n = x'_n.$$

Finalement, B est génératrice de $\mathbb{K}^n$ et est libre. B est donc une base de $\mathbb{K}^n$.

Définition : La base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots , \overrightarrow{e_n})$ s'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans cette base sont simplement les composantes x_i de $\vec{v}$. **Attention**, cela ne se produit que dans cette base particulière.

-Famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Toute famille libre $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base de $B = Vect(\mathcal{F})$.

Par exemple, deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ forment une base du plan engendré par ces deux vecteurs.

- Base d'un plan de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation

$$\boldsymbol{P = \{\vec{v} = (x, y, z),\ ax + by + cz = 0\}\ \text{avec}\ c \neq 0}.$$

On a $\vec{v} = (x, y, z) \in P \iff z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \iff$

$$\vec{v} = \left(x, y, -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y\right) = x\left(1{,}0, -\frac{a}{c}\right) + y\left(0{,}1, -\frac{b}{c}\right).$$

Les deux vecteurs $\vec{v}_1 = (1{,}0, -\frac{a}{c})$ et $\vec{v}_2 = (0{,}1, -\frac{b}{c})$ engendrent donc P. Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de P, c'est-à-dire une base de P. Les coordonnées de $\vec{v} = (x, y, z) \in P$ dans cette base sont les réels x et y.

Remarque : On voit sur cet exemple élémentaire qu'une base permet de représenter les vecteurs de manière *optimale*, c'est-à-dire en utilisant le minimum de paramètres. Ici, le vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ de $P \subset \mathbb{R}^3$ est déterminé par *deux* coordonnées indépendantes : x et y, et non *trois*. De la même façon, un vecteur $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_{100})$ d'un plan $P = Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subset \mathbb{R}^{100}$ est déterminé par seulement deux scalaires : ses coordonnées dans la base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, et pas 100 !

- Base de $\mathbb{K}[X] = \{P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, n \in \mathbb{N},\ \ a_i \in \mathbb{K}\}$

Par définition, une base de $\mathbb{K}[X]$ est la famille infinie

$$B = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots.)$$

C'est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Cette famille est infinie mais tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est bien une combinaison linéaire *finie* d'éléments de B.

- Base de $\mathbb{K}_n[X] = polynômes\ de\ degré\ \leq n$

Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est donnée par $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. C'est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Notez bien que cette famille possède $\boldsymbol{n+1}$ vecteurs. Un polynôme de degré $\leq n$ est déterminé par $n + 1$ coefficients.

- Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un paramètre (cf. cours)

4. La notion d'espace de dimension finie

Problème : Construire des bases dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

Définition : On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si E admet une famille génératrice finie.

Exemples : On a vu que $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition : $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration : Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille finie de $\mathbb{K}[X]$.
$\mathcal{F}$ peut-elle être génératrice de $\mathbb{K}[X]$?

Soit $d = max\big(deg(P_1), deg(P_2), \ldots, deg(P_n)\big)$: c'est un nombre fini.

Alors $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_d P_d$ est de degré inférieur ou égal à d.

On remarque que $Vect(\mathcal{F}) \subset \mathbb{K}_d[X] \neq \mathbb{K}[X]$. Par exemple, $X^{d+1} \notin Vect(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
$\mathbb{K}[X]$ est donc un espace de dimension infinie.

5. Propriétés clés

Les propriétés suivantes seront utilisées très souvent dans les preuves et les exercices.

Propriété 1 : Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Alors la famille $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ est encore libre si et seulement si $\vec{v} \notin Vect(\mathcal{F})$.

Propriété 2 : Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.
Alors $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si il existe un vecteur $\vec{v} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} \backslash \{\vec{v}\} = \mathcal{F}'$ reste génératrice. Autrement dit, si et seulement si $\exists\ \vec{v} \in \mathcal{F}$ tel que $\vec{v} \in Vect(\mathcal{F} \backslash \{\vec{v}\})$.

Démonstration 1 : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ une famille libre.

(⇐) : Si $\vec{v} \in Vect(\mathcal{F})$, $\vec{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} \iff \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} - \vec{v} = \vec{0}$

C'est une combinaison linéaire de $\mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ qui vaut $\vec{0}$ et non triviale. $(\lambda_{\vec{v}} = -1)$

$\Rightarrow \mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ est liée.

(⇒) : On suppose que $\mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ est liée. On veut montrer que $\vec{v} \in Vect(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ liée $\Leftrightarrow\ \exists\ \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda\vec{v} + \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \vec{0}$

$*$ Si $\lambda = 0$ alors :

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

car $\mathcal{F}$ est libre par hypothèse. Il y a donc une contradiction car $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont supposés non tous nuls.

$*$ Si $\lambda \neq 0$, alors $\vec{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overrightarrow{v_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\overrightarrow{v_2} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\overrightarrow{v_n}$ ce est une CL d'éléments de $\mathcal{F}$.

$\Rightarrow \vec{v} \in Vect(\mathcal{F})$.

Démonstration 2 : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ une famille génératrice de E.

Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \vec{0},$$

ce qui implique qu'il existe un i_0 tel que $\lambda_{\mathrm{i}_0} \neq 0$.

$\Rightarrow\ \overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{\mathrm{i}_0}}\overrightarrow{v_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_{\mathrm{i}_0}}\overrightarrow{v_2} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{\mathrm{i}_0}}\overrightarrow{v_n} = \sum_{i\neq \mathrm{i}_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{\mathrm{i}_0}}\overrightarrow{v_\iota},$

ce qui est en fait un élément de $Vect(\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\})$.

$\forall i \neq \mathrm{i}_0$, on a bien sur $\overrightarrow{v_\iota} \in Vect(\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\})$
$\Rightarrow \forall i, \overrightarrow{v_\iota} \in Vect(\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\})$
$\Rightarrow E = Vect(\mathcal{F}) \subset Vect(\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\}) \subset E$
$\Rightarrow Vect\left(\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\}\right) = E$ est une famille génératrice.

6. Deux méthodes de construction de bases

Théorème d'extraction de base

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de différent de $\{\vec{0}\}$ et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille génératrice. (E étant un espace vectoriel de dimension finie).
Alors on peut *extraire* de $\mathcal{F}$ une sous-famille $B = \left(\overrightarrow{v_{\iota 0}}, \overrightarrow{v_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota p}}\right)$ qui est une base de E.

Démonstration : Algorithme avec la propriété 2 :

$*$ $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
$\rightarrow$ Si oui, c'est fini.
$\rightarrow$ Sinon, il existe $\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}\backslash\{\overrightarrow{v_{\mathrm{i}_0}}\} = \mathcal{F}'$ est encore génératrice. On continue avec $\mathcal{F}'$.

$*$ Comme $E \neq \{\vec{0}\}$, l'algorithme s'arrête sur une famille libre et génératrice de E.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
$G = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille génératrice de E et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ une famille libre.
Alors on peut *compléter* la famille libre $\mathcal{F}$ avec *certains* vecteurs $\overrightarrow{v_{\iota 0}}, \overrightarrow{v_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota p}}$ de G pour obtenir une base $B = \mathcal{F} \cup \left(\overrightarrow{v_{\iota 0}}, \overrightarrow{v_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota p}}\right)$.

Démonstration : Soient $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ une famille libre et $G = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille génératrice de E. Il faut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E. L'algorithme suivant dépend de la propriété 1 :

$*$ A-t-on $\overrightarrow{v_1} \in Vect(\mathcal{F})$?
$\rightarrow$Si oui, on garde $\mathcal{F}$.
$\rightarrow$Sinon, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\overrightarrow{v_1}\}$ $\rightarrow \mathcal{F}'$, libre par la prop. 1 et $\overrightarrow{v_1} \in Vect(\mathcal{F}')$.

$*$ On recommence pour tous les autres vecteurs de G. À la fin, on a une nouvelle famille libre $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \cup$ partie de G avec $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in Vect(\mathcal{F}_n)$

$\Rightarrow E = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}) \subset Vect(\mathcal{F}_n) \subset E.$

Ce qui veut dire que $\mathcal{F}_n$ est libre et génératrice de E, c'est-à-dire est une base de E.

Exemple : Plan vectoriel. Cf. cours.

II – Dimension d'un espace vectoriel

On arrive à la notion la plus importante du cours d'algèbre de cette année !

1. Définitions

Théorème fondamental : dimension et cardinal des bases

Soit E un espace vectoriel $\neq \{\vec{0}\}$ et engendré par n vecteurs.
Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre entier s'appelle la *dimension* de E et se note $\dim E$. On a de plus $\dim E \leq n$ dans ce cas.

Par convention, on pose $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemples :
- On a $\dim \mathbb{K}^n = n$ car la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$, a n éléments.
- Les espaces vectoriels de dimension 1 sont les droites vectorielles. Les espaces vectoriels de dimension 2 sont les plans vectoriels, etc.

Intuitivement, on peut dire que la dimension d'un ev E est le nombre de « paramètres libres » dont dépend un vecteur de E. Les plans vectoriels sont tous de dimension 2, quel que soit l'espace dans lesquels ils sont plongés : $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{R}^{100}$.

Lemme clé

Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs. Alors toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n.

Démonstration du théorème à l'aide du lemme :

Soient $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ et $B' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \dots, \overrightarrow{e'_p})$ deux bases de E.

On a que B est une famille libre de E, engendré par B'

Lemme clé $\Rightarrow n = card(B) \leq p = card(B')$.

On a aussi B' famille libre de E, engendré par B

Lemme clé $\Rightarrow p \leq n$
$\Rightarrow n = p$ et finalement B et B' ont le même nombre d'éléments.

Démonstration du lemme : On procède par récurrence sur n.

Soient $G = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ une famille génératrice de E et $\mathcal{F} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p})$ une famille. On va montrer que $p > n$ implique que $\mathcal{F}$ est liée.

$*$ Cas $n = 1$ et $p \geq 2$

On a $\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{e_1}$ et $\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{e_1}$.

$\rightarrow$ Si $\lambda_1 \neq 0$, on a $\vec{v_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v_1} \rightarrow$ Les vecteurs sont liés.

→ Si $\lambda_1 = 0$, $\overrightarrow{v_1} = \vec{0} = 1 \times \overrightarrow{v_1}$ → La famille est liée.

∗ <u>On suppose l'énoncé vrai pour $n-1$</u>

On regarde le cas E engendré par n vecteurs : $E = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ avec une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n+1}})$. On considère $\mathrm{E}' = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{n-1}})$.

On a donc $E = E' +$ droite engendrée par $\overrightarrow{e_n}$.

Comme $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n+1}} \in E$, on a :

$$(S) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + \lambda_1 \overrightarrow{e_n} \\ \dots \\ \overrightarrow{v_{n+1}} = \overrightarrow{u_{n+1}} + \lambda_{n+1} \overrightarrow{e_n} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_{n+1}} \in \mathrm{E}'.$$

→ Si tous les λ_i sont nuls, alors les $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n+1}} \in \mathrm{E}'$ qui est engendré par $n-1$ vecteurs. Comme $card(\mathcal{F}) > n-1$, la famille est liée par l'hypothèse de récurrence (i.e. toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à $n-1$).

→ Sinon, il existe au moins un λ_i non nul. On suppose que c'est λ_1. On a alors $\overrightarrow{e_n} = \frac{\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{u_1}}{\lambda_1}$. On l'injecte dans les lignes suivantes du système (S). On trouve que

$$\begin{cases} \overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v_2} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_2} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{u_1} \in \mathrm{E}' \\ \dots \\ \overrightarrow{v'_{n+1}} = \overrightarrow{v_{n+1}} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_{n+1}} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \overrightarrow{u_1} \in \mathrm{E}' \end{cases}$$

Les n vecteurs de $\mathcal{F}' = \left(\overrightarrow{v'_2}, \overrightarrow{v'_3}, \dots, \overrightarrow{v'_{n+1}}\right) \subset E'$ sont liés par l'hypothèse de récurrence, car $card(\mathcal{F}') = n > n-1$.

Il existe donc $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{v'_\iota} = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{v_i} - \left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \alpha_i\right) \overrightarrow{v_1}, \text{ avec au moins un } \alpha_i \neq 0.$$

La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n+1}})$ est donc liée.

2. Conséquences importantes

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

i) Toute famille libre $\mathcal{F}$ de E vérifie $card(\mathcal{F}) \leq \dim E$ et $card(\mathcal{F}) = \dim E$ implique que $\mathcal{F}$ est une base de E.

ii) Toute famille génératrice de E a au moins $\dim E$ éléments. Si une famille génératrice de E a exactement $\dim E$ éléments, alors c'est une base de E.

Corollaire utile

Pour vérifier qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est une base, il faut et il suffit que :

$card(\mathcal{F}) = \dim E$ **et** $\mathcal{F}$ soit une famille libre **ou** génératrice de E.

Démonstration i) : Pour le cas $card(\mathcal{F}) \leq \dim E$, on se sert du lemme vu précédemment.

Dans le cas d'égalité: soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille libre à $n = \dim E$ éléments dans E.

Problème : montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice.

Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de E. La famille $\mathcal{F} \cup \{\vec{v}\}$ à $n + 1$ éléments devient liée, vu qu'on a démontré le cas de l'inégalité. On a donc, par la propriété clé 1, $\vec{v} \in Vect(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ est donc génératrice (de tout $\vec{v} \in E$). $\mathcal{F}$ étant génératrice de E et libre, c'est une base de E.

Démonstration ii) : Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.

Cas $card(\mathcal{F}) \geq \dim E$. D'après le théorème d'extraction de base, $\mathcal{F}$ contient une base de E avec $\dim E$ éléments.

Cas d'égalité : $\mathcal{F}$ génératrice avec $\dim E$ éléments. D'après la propriété clé 2, $\mathcal{F}$ est libre, sinon on peut extraire une sous famille qui est une base de E.

Propriété de la croissance de la dimension

Soit E un ev de dim finie et F un sev de E. Alors on a :

i) F de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

ii) Si de plus $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, il n'y a qu'un seul espace de dimension nulle : c'est $\{\vec{0}\}$.

- Il y a une infinité d'espaces de dimension 1 : les droites vectorielles.
- Il y a une infinité d'espaces de dimension 2 : les plans vectoriels.
- Il n'y a qu'un seul espace de dimension 3 : c'est $\mathbb{R}^3$ lui-même.

Démonstration i) :

- Si $F = \{\vec{0}\}$, alors la démonstration est finie.

- Sinon, il existe une famille libre $L = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E. On a automatiquement $p \leq \dim E = n$. On choisit une famille libre de F de cardinal *maximal* ($\leq n$). Montrons que L est une base de F.

Soit $\vec{v} \in F$ quelconque. On considère $L' = L \cup \{\vec{v}\}$.
On a $card(L') > card(L)$ = cardinal max des familles libres de F. Donc L' est liée. Comme L est libre, on a nécessairement $\vec{v} \in Vect(L)$ par la propriété clé 1. L est donc génératrice de F.

Démonstration ii) : Soit B une base de F. Alors B est une famille libre de F avec $card(B) = \dim F = \dim E$.

B est donc une base de $E \Leftrightarrow Vect(B) = E = F$.

3. Rang des systèmes de vecteurs

Définition : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille libre de vecteurs de E. Le *rang* de $\mathcal{F}$ est la dimension de $Vect(\mathcal{F})$.

Attention de ne pas confondre le rang et le cardinal d'une famille ! Le cardinal est simplement le nombre d'éléments de la famille (se voit), alors que le rang est une notion plus abstraite basée sur la dimension.

Proposition :

i) On a toujours $rang(\mathcal{F}) \leq card(\mathcal{F})$.

ii) Cas d'égalité : on a $rang(\mathcal{F}) = card(\mathcal{F})$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.

Démonstration i) : $Vect(\mathcal{F})$ est engendré par n (= cardinal de $\mathcal{F}$) vecteurs.

On peut extraire de $\mathcal{F}$ une base qui est de cardinal $\dim Vect(\mathcal{F}) = rang(\mathcal{F}) \leq card(\mathcal{F})$.

Démonstration ii) : $\mathcal{F}$ est génératrice de Vect($\mathcal{F}$) avec $rang(\mathcal{F}) = card(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ est donc une base de $Vect(\mathcal{F})$ (et est donc libre) d'après un théorème précédent.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$. On considère $\overrightarrow{v_1} = (1,2,1)$; $\overrightarrow{v_2} = (1,4,a)$; $\overrightarrow{v_3} = (-1,0,-2)$.

On pose $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

Problème : Donner le rang de $\mathcal{F}$ en fonction de a. Dire quand $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On peut déjà dire que $rang(\mathcal{F}) \leq 3 = card(\mathcal{F})$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (L1) \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 & (L2) \\ \lambda_1 + a\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & (L3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (L1) \\ 2\boxed{\lambda_2} + 2\lambda_3 = 0 & (L2) - 2(L1) \\ (a-1)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (L3) - (L1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (L1) \\ \boxed{\lambda_2} + \lambda_3 = 0 & (L'2) \\ -a\lambda_3 = 0 & (L'3) - (a-1)(L'2) \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$, la famille est libre et $rg(\mathcal{F}) = 3$, ce qui implique que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car libre et à 3 éléments.

- Si $a = 0$, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on a donc $rg(\mathcal{F}) < 3$.

λ_3 devient un paramètre (inconnue non principale.)

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3 = -2\lambda_3 \end{cases}$$

Exemple de solution : $\lambda_3 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = 2$ c'est à dire $2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$.

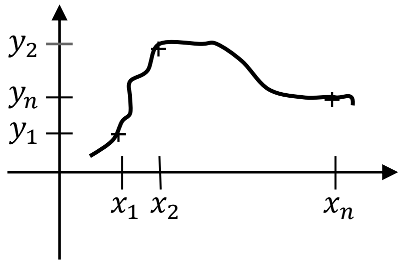
Donc $Vect(F) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = Vect(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$.

On utilise le même système avec $\lambda_3 = 0$ ce qui donne $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est donc libre, et finalement $rg(\mathcal{F}) = 2$.

III – Deux illustrations de l'utilité des notions abstraites d'espace vectoriel, de base et de dimension

1. Le problème d'interpolation de Lagrange

On se donne n points du plan (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) avec les x_i tous distincts. On cherche une fonction f aussi simple et régulière que possible dont le graphe passe par ces points, c'est-à-dire telle que



$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$$

On cherche une fonction interpolatrice sous la forme d'un polynôme P de plus bas degré possible.

Analyse : Le problème est linéaire par rapport à P et $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Si on a $\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \dots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} Q(x_1) = y'_1 \\ \dots \\ Q(x_n) = y'_n \end{cases}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\begin{cases} (\lambda P + Q)(x_1) = \lambda y_1 + y'_1 \\ \dots \\ (\lambda P + Q)(x_n) = \lambda y_n + y'_n \end{cases}$

On regarde $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Prenons la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1,0,0, \dots ,0) \\ \dots \\ \overrightarrow{e_n} = (0,0, \dots ,0,1) \end{cases}$ pour avoir $\vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \dots + y_n\overrightarrow{e_n}$.

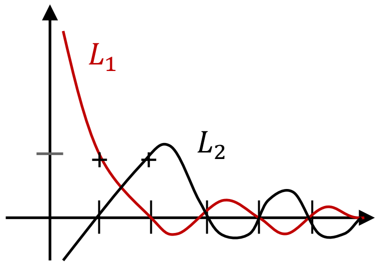
Il suffit de trouver des polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$ tels que :

L_1 soit associée à $\vec{y} = \overrightarrow{e_1} \Leftrightarrow y_1 = 1,\ y_2 = \dots = y_n = 0$,

L_2 soit associée à $\vec{y} = \overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow y_2 = 1,\ y_1 = \dots = y_n = 0$, …,

L_n soit associée à $y = \overrightarrow{e_n} \Leftrightarrow y_n = 1,\ y_1 = y_2 = \dots y_{n-1} = 0$.

Synthèse : On pose



$$\begin{cases} L_1(x) = \frac{(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} = \prod_{i=2}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_1-x_i)} \\ L_2(x) = \prod_{i=1 \mid i\neq 2}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_2-x_i)} \\ \dots \\ L_n(x) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(x-x_i)}{(x_n-x_i)} \end{cases}$$

On a une solution du problème général en posant

$$P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + \dots + y_n L_n.$$

Définition : On appelle le polynôme $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + \dots + y_n L_n$ le *polynôme interpolateur de Lagrange*. On a
$P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. De plus le degré de P est inférieur à $n - 1$.

Théorème 1 : Le polynôme de Lagrange est l'*unique* polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Soit E_{n-1} l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n - 1$:

$$E_{n-1} = \{P,\ \ P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1};\ a_0,\ \ a_1,\ \ a_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 2 : On a $\dim E_{n-1} = n$ et $B_L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ forme une base de E_{n-1}.

Démonstration du TH1 en utilisant le TH2 :

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. Il faut montrer que P est le polynôme de Lagrange.

D'après le TH2, P s'écrit $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$.

On doit donc avoir $P(x_1) = \lambda_1 L_1(x_1) + \lambda_2 L_2(x_1) + \dots + \lambda_n L_n(x_1)$.

Or, $L_1(x_1) = 1$ et $L_2(x_1) = \dots = L_n(x_1) = 0$ donc $P(x_1) = \lambda_1 = y_1$.

On procède de la même manière jusqu'à n. $P(x_n) = \lambda_n = y_n$.

Donc $P = P(x_1)L_1 + P(x_2)L_2 + \dots + P(x_n)L_n = y_1 L_1 + y_2 L_2 + \dots + y_n L_n$.

C'est en effet le polynôme de Lagrange.

Démonstration du TH2 :

- E_{n-1} est un espace vectoriel engendré par les n fonctions monômes définies comme :
$P_0 : x \mapsto 1,\ P_1 : x \mapsto x, \dots ,\ P_{n-1} : x \mapsto x^{n-1}$.

Donc $E_{n-1} = Vect(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) \Rightarrow \dim P_{n-1} \leq n$ avec égalité si $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} =$ fonction nulle.

Alors, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$

$\Rightarrow f(0) = \lambda_0 = 0\,;\; f'(0) = \lambda_1 = 0\,;\; f''(0) = 2\lambda_2 = 0\,;\; f^{(n-1)}(0) = (n-1)!\,\lambda_{n-1} = 0$

Ce qui montre que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ et que la famille est libre.

On a donc $\dim E_{n-1} = n$.

- Reste à voir que $B_L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ forme une base de P_{n-1}.

Comme $card(B_L) = n = \dim E_{n-1}$. Il suffit de vérifier que B_L est libre.

Si $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$, alors en $x = x_1$, on obtient $\lambda_1 = 0$, en x_2, $\lambda_2 = 0$ …, en x_n, $\lambda_n = 0$. Ceci montre que B_L est une famille libre.

B_L est donc une base de E_{n-1}.

2. Étude des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ satisfaisant une relation de récurrence linéaire du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

On se donne u_0, u_1 pour trouver $u_2, u_3, \dots$

On pose $E =$ l'espace des suites solutions. E est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda u_n + v_n) = (w_n) \in E$. Vérifions. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = aw_{n+1} + bw_n.$$

Un exemple célèbre : $a = b = 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_1 = u_0 = 1$.

Il s'agit de la suite de Fibonacci (vers 1200).

Problème : On veut les formules explicites ⇒ déterminer la croissance pour n grand.

Idée : On cherche des suites solution sous la forme $u_n = r^n$ avec $r \in \mathbb{C}$.

$u_n = r^n$ solution si et seulement si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \Leftrightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$.

Si $r \neq 0$, on a $u_n = r^n$solution si et seulement si $r^2 = ar + b$. Il s'agit de **l'équation caractéristique**.

On cherche les solutions de $r^2 - ar - b = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si $\Delta \neq 0$, on a deux racines complexes : $r_1 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}$.

- Si $\Delta = 0$, on a une racine double : $r = \frac{a}{2}$. On montre que $u_n = nr^n$ est aussi solution (à faire en exo).

Théorème

- Si $\Delta \neq 0$, les deux suites $({r_1}^n)$ et $({r_2}^n)$ forment une base de E. Toute suite solution (w_n) s'écrira sous la forme $w_n = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ fixes et vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_0 \\ \lambda_1\, r_1 + \lambda_2\, r_2 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2} \\ \lambda_2 = \dfrac{r_1 u_0 - u_1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

- Si $\Delta = 0$, on a une racine double, et les suites (r^n) et (nr^n) forment une base de E.

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution quelconque. On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n$.

Conditions nécessaires : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_0 \\ \lambda_1\, r_1 + \lambda_2\, r_2 = u_1 \end{cases}$ déterminent λ_1 et λ_2.

Conditions suffisantes : On considère la suite $w_n = u_n - \lambda_1 {r_1}^n$. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution (car E est n espace vectoriel, il est donc stable par la loi +) avec $w_0 = 0$ et $w_1 = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n \;\Rightarrow\; w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n$ avec λ_1 et λ_2 déterminés.

La preuve pour le cas $\Delta = 0$ est semblable ; laissée en exercice.

Exemple de la suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \; avec \; u_1 = u_0 = 1$

$r^2 - r - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

On doit donc avoir $u_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ avec $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$

On trouve $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (c'est un entier !)

$\sqrt{5} \cong 2{,}2$ donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ très vite en oscillant autour 0.

Pour n assez grand, u_n est l'entier le plus proche de $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

On peut donner la croissance de la suite de Fibonacci. On a :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618 = \varphi$.

→ Ce nombre, connu depuis l'Antiquité, s'appelle le « nombre d'or ». Elle représentait alors une « proportion parfaite » (voir Wikipédia pour plus d'information).

IV – Supplémentaire, somme directe

1. Définitions

On s'intéresse à la somme $F+G$ de deux sous espaces vectoriels de E.

$$F+G=\{\vec{v}=\vec{x}+\vec{y};\ \vec{x}\in F,\ \ \vec{y}\in G\}$$

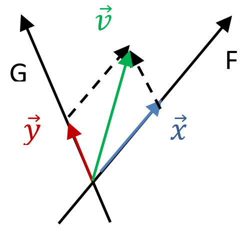
Définitions de somme directe et de supplémentaire

1) On dit que deux sous espaces vectoriels F et G de E sont en *somme directe* si tout vecteur $\vec{v}\in E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}\ \text{ avec }\ \vec{x}\in F \text{ et } \vec{y}\in G.$$

2) Dans ce cas, on dit que G est un *supplémentaire* de F dans E. On le note $E=F\oplus G$.

Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$:



$$\vec{x}=\lambda_1\vec{e_1},\ \vec{y}=\lambda_2\vec{e_2},\ \vec{v}=\vec{x}+\vec{y}$$

F et G deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ avec $F\cap G=\{0\}$.
On a : $\mathbb{R}^2=F\oplus G$.

Proposition : On a $E=F\oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E=F+G \\ F\cap G=\{\vec{0}\}\end{cases}$.

Démonstration :

(⇒) : On suppose $E=F\oplus G \Rightarrow E=F+G$. Soit $\vec{v}\in F\cap G$.

$\vec{v}=\vec{v}(\in F)+\vec{0}(\in G)=\vec{0}(\in F)+\vec{v}(\in G)$. Si $E=F\oplus G$, la décomposition est unique ce qui implique que $\vec{v}=\vec{0}$. Donc $F\cap G=\{\vec{0}\}$.

(⇐) : On suppose que $E=F+G$ et $F\cap G=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{v}\in E$.

Alors il existe forcément $\vec{x}\in F,\ \vec{y}\in G$ tels que $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}$. Avons-nous l'unicité de la décomposition ?

Soient $\vec{x'}\in F,\ \vec{y'}\in G$ tels que $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}=\vec{x'}+\vec{y'} \ \Leftrightarrow\ \vec{x}-\vec{x'}=\vec{y'}-\vec{y}\in F\cap G=\{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow \vec{x}=\vec{x'}\ \ et\ \ \vec{y}=\vec{y'}$.

2. Constructions et critères

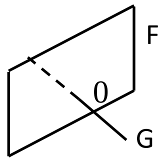
Théorème d'existence de supplémentaire

Tout sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie possède au moins un supplémentaire dans E.

Démonstration :

Soient $B_F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_p})$ une base de F, $B_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

B_F est une famille libre, B_E est une famille génératrice de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $C = (\overrightarrow{e_{\imath 1}}, \overrightarrow{e_{\imath 2}}, \dots, \overrightarrow{e_{\imath k}}) \subset B_E$ telle que $B_F \cup C = B'_E$ soit une base de E.



On pose $G = Vect(C)$. On montre que $E = F \oplus G$.

- Soit $\vec{x} \in E$ quelconque. Comme B'_E est une base de E, on a

$\vec{x} = \lambda_1 \overrightarrow{f_1} + \lambda_2 \overrightarrow{f_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{f_p} + \mu_1 \overrightarrow{e_{\imath 1}} + \mu_2 \overrightarrow{e_{\imath 2}}, \dots, \mu_k \overrightarrow{e_{\imath k}}$, avec :

$\lambda_1 \overrightarrow{f_1} + \lambda_2 \overrightarrow{f_2} + \cdots + \lambda\_p \overrightarrow{f_p} \in F = Vect(B_F)$ et $\mu_1 \overrightarrow{e_{\imath 1}} + \mu_2 \overrightarrow{e_{\imath 2}} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{e_{\imath k}} \in G = Vect(C)$

$\Rightarrow E = F + G.$

- Soit $\vec{y} \in F \cap G$. Alors $\vec{y} = \lambda_1 \overrightarrow{f_1} + \lambda_2 \overrightarrow{f_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{f_p} = \mu_1 \overrightarrow{e_{\imath 1}} + \mu_2 \overrightarrow{e_{\imath 2}} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{e_{\imath k}}$.

On trouve $\lambda_1 \overrightarrow{f_1} + \lambda_2 \overrightarrow{f_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{f_p} - \mu_1 \overrightarrow{e_{\imath 1}} - \mu_2 \overrightarrow{e_{\imath 2}} - \cdots - \mu_k \overrightarrow{e_{\imath k}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$ car B'_E est libre puisque c'est une base de E.

Remarque importante sur la preuve

Cette démonstration montre *comment* fabriquer des supplémentaires : en complétant une base de F à l'aide d'une base de E. En particulier, tout sev F de $\mathbb{R}^n$ possède un supplémentaire G *particulièrement simple* : engendrés par certains vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, i.e. du type $G = Vect(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik})$.

Par exemple, tout plan P de $\mathbb{R}^3$ possède comme supplémentaire un des trois axes de l'espace. On peut prendre l'axe $Oz = Vect(e_3)$ si $e_3 \notin P$, l'axe $Ox = Vect(e_1)$ si $e_1 \notin P$, ou l'axe $Oy = Vect(e_2)$ si $e_2 \notin P$. Bien sûr, le plan ne peut contenir ces trois vecteurs non coplanaires à la fois !

Théorème : critère de somme directe

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Lemme : Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soient $B_F$une base de F, B_G une base de G. Alors on a :

i) $E = F + G \Leftrightarrow B_F \cup B_G$ est génératrice de E,

ii) $F \cap G = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow B_F \cup B_G$ est libre.

Démonstration du théorème à l'aide du lemme : Caractérisation de $E = F \oplus G$.

On a $E = F \oplus G \overset{def}{\Leftrightarrow} E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow B_F \cup B_G$ base de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ B_F \cup B_G \text{ libre ou génératrice} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

Démonstration du lemme :

- 1er point à faire en exercice.

- On suppose $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On veut montrer que $B_F \cup B_G$ est libre.

On a : $B_F = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_p}\right)$ et $B_G = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \dots, \vec{g_q})$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} + \dots + \lambda_p\vec{f_p} + \mu_1\vec{g_1} + \mu_2\vec{g_2} + \dots + \mu_q\vec{g_q} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} + \dots + \lambda_p\vec{f_p} = -\mu_1\vec{g_1} - \mu_2\vec{g_2} - \dots - \mu_q\vec{g_q} = \vec{v} \in F \cap G = \{\vec{0}\}$.

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} + \dots + \lambda_p\vec{f_p} = \vec{0} \\ \mu_1\vec{g_1} + \mu_2\vec{g_2} + \dots + \mu_q\vec{g_q} = \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$ car B_F et B_G sont libres.

Inversement : Si on suppose que $B_F \cup B_G$ est libre, on montre que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Si $\vec{v} \in F \cap G$ alors on l'écrit $\vec{v} = \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} + \dots + \lambda_p\vec{f_p} = -\mu_1\vec{g_1} - \mu_2\vec{g_2} - \dots - \mu_q\vec{g_q}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$ car $B_F \cup B_G$ est libre.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$: une droite D et un plan P sont en somme directe ssi $P \cap D = \{\vec{0}\}$.
- Dans $\mathbb{R}^4$: deux plans P_1 et P_2 sont en somme directe ssi $P_1 \cap P_2 = \{\vec{0}\}$.

Par exemple, si on note $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$P_1 = Vect(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \{z = t = 0\} \text{ et } P_2 = Vect(\vec{e_3}, \vec{e_4}) = \{x = y = 0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. La formule de Grassmann

Pour conclure, on peut calculer la dimension d'une somme générale.

Théorème de Grassmann :
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors on a :

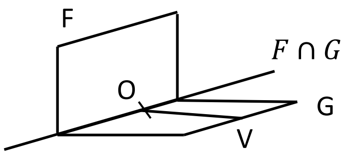
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Illustration : Si $\dim F + \dim G > \dim E$ alors $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$

En effet, $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geq \dim F + \dim G - \dim E > 0$.

Exemples :
- Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ se coupent toujours au moins suivant une droite : facile ☺
- Deux sous-espaces de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ contiennent au moins un plan : moins facile à voir ☹, mais c'est vrai !

Démonstration géométrique :



Soit V un supplémentaire de $F \cap G$ dans G
$\Leftrightarrow G = (F \cap G) \oplus V$.
On montre que $F + G = F \oplus V$.

- Soit $\vec{u} \in F + G$. Alors $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$.

Comme $G = (F \cap G) \oplus V$, on peut décomposer $\vec{g} = \overrightarrow{f'} + \vec{v}$ avec $\overrightarrow{f'} \in F \cap G$ et $\vec{v} \in V$

D'où $\vec{u} = \vec{f} + \overrightarrow{f'} + \vec{v} = \overrightarrow{f''} + \vec{v}$ avec $\overrightarrow{f''} \in F$

$\Rightarrow F + G = F + V$

- Soit $\vec{v} \in F \cap V$. Alors $\vec{v} \in F \cap G$ car $V \subset G$.

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ car $V \in (F \cap G) \cap V = \{\vec{0}\}$.

On a donc $F + G = F \oplus V$

$\Rightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim V$ et $\dim G = \dim(F \cap G) + \dim V$

$\Rightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.