Chapitre I
Applications, généralités

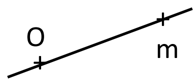
I – Définitions

1. Application

Définition : Une application f est la donnée :
- d'un ensemble de départ X,
- d'un ensemble d'arrivée Y,
- d'une définition ou d'une formule associant à chaque élément $x \in X$ un unique élément $y = f(x) \in Y$.

Exemples : * $f_1: \substack{\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2}$, $f_2: \substack{\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2}$, $f_3: \substack{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto x^2}$, $f_4: \substack{\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto x^2}$ sont 4 applications différentes !

* $f: \substack{X=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to Y=\{\text{droites de } \mathbb{R}^2\} \\ m\mapsto \text{droite d passant par } O \text{ et } m}$



2. Image et antécédent

Définition : Si $f : X \to Y$ est une application, alors :
- Pour $x \in X$, on appelle image de x par f l'élément $y = f(x) \in Y$.
- Si A est une partie de X, on note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ l'image de A par f. Si $A = X$, $f(X)$ s'appelle l'image de f.
- Si $y \in Y$ est donné, alors on dit que $x \in X$ est un *antécédent* de y par f si $f(x) = y$.

Attention : La notation $f: X \to Y$ ne signifie pas que tout $y \in Y$ s'écrit $f(x)$, mais seulement que $f(x) \in Y$.

Exemple : Pour $f: \substack{X=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to Y=\{\text{droites de } \mathbb{R}^2\} \\ m\mapsto \text{droite d passant par } O \text{ et } m}$, on a $f(X) = \{\text{droites passant par } (0,0)\}$.

Si D passe par 0, il existe une infinité d'antécédents de D : tous les points de D différents de 0.

II – Propriétés générales

1. Définition

Définition : Soit $f: X \to Y$ une application.
- On dit que f est *injective* si tout $y \in Y$ possède *au plus* un antécédent
- On dit que f est *surjective* si tout $y \in Y$ possède *au moins* un antécédent.
- On dit que f est *bijective* si tout $y \in Y$ possède *exactement* un antécédent .

On note alors $x = f^{-1}(y)$ cet élément, et l'application $f^{-1}: Y \to X$ ainsi définie est appelée l'*application réciproque* de f.

2. En pratique

Si $f: X \to Y$ est donnée.
$*$ Pour savoir si f est injective, on suppose $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
$*$ Pour savoir si f est surjective, on se donne $y \in Y$ et on cherche une solution $x \in X$ de l'équation $f(x) = y$.
$*$ Pour savoir si f est bijective, on montre que $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in X$.

Retour sur les exemples précédents : $*$ On considère l'application $f_1: {}^{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}_{x \mapsto x^2}$.
On a $f_1(1) = f_1(-1) = 1$ et f_1 n'est donc pas injective.
Comme $y = -1$ n'a pas d'antécédent, f_1 n'est pas surjective.

$*$ On considère l'application $f_2: {}^{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}}_{x \mapsto x^2}$.
$x^2 = x'^2$ avec $x, x' \geq 0$ implique que $x = x'$. f_2 est donc injective.
$y = -1$ n'a pas d'antécédent. f_2 n'est donc pas surjective.

$*$ On voit de même que l'application $f_3: {}^{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+}_{x \mapsto x^2}$ n'est pas injective mais elle est surjective.

$*$ L'application $f_4: {}^{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+}_{x \mapsto x^2}$ est injective et surjective, elle est donc bijective.

III – Opérations générales sur les applications

1. Restriction

Définition : On suppose $f: X \to Y$ et $A \subset X$ donnés. On appelle *restriction* de f à A l'application $f_{|A}: A \to Y$ définie par $f_{|A}(x) = f(y)$ pour $x \in A$.

Exemple : Les applications vues précédemment $f_2 = f_{1|\mathbb{R}^+}$ et $f_4 = f_{3|\mathbb{R}^+}$.

2. Prolongement

Définition : On suppose $f: A \to Y$ et $A \subset X$ donnés. On appelle prolongement de f à X une application $g: X \to Y$ telle que $g_{|A} = f$, c'est-à-dire satisfaisant $g(x) = f(x)$ si $x \in A$

Exemple : On considère l'application $f: {}^{\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}}_{x \mapsto \frac{\sin x}{x}}$. Un prolongement g de f à $\mathbb{R}$ est la donnée de $g(0)$. En analyse, il existe un unique prolongement de f continu sur tout $\mathbb{R}$: il est défini par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$.

3. Composition

Définition : Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$. La *composée* de g par f est l'application notée $g\ o\ f: X \to Z$ et définie par $(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Remarque : Si $f: X \to X$ et $g: X \to X$, alors $g\ o\ f$ et $f\ o\ g$ existent et sont en général différentes.

Exemple : Soient X l'ensemble des fonctions polynomiales et $P \in X$ un polynôme.
On considère les applications :

$$f: \substack{X \to X \\ P \mapsto P' (\text{polynôme dérivé})} \text{ et } g: \substack{X \to X \\ P \mapsto P(0) (\text{polynôme constant})}.$$

On a $(g\ o\ f)(P) = g(f(P)) = g(P') = P'(0)$ et $(f\ o\ g)(P) = f(g(P)) = (P(0))' = 0$.

Propriété : La composition est associative .
Soient $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ et $h: Z \to U$.
Alors on a : $h\ o\ (g\ o\ f) = (h\ o\ g)\ o\ f$ donnée par $x \mapsto h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$.

4. Inversion et composition

Définition : Soit X un ensemble quelconque. On note $Id_X: \substack{X \to X \\ x \mapsto x}$ l'application *identité de* X.

Propriété : Si $f: X \to Y$ est une bijection, alors l'application réciproque $f^{-1}: Y \to X$ satisfait :

$$f^{-1}\ o\ f = Id_X \text{ et } f\ o\ f^{-1} = Id_Y .$$

Théorème : Si $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont des bijections, alors $g\ o\ f: X \to Z$ est bijective et

$$(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}\ o\ g^{-1}.$$

Démonstration : Soient $g\ o\ f: X \to Z$, $z \in Z$ donnés. On cherche à résoudre $(g\ o\ f)(x) = z$.

$$\begin{aligned} &(g\ o\ f)(x) = z \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = z \\ &\Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}\big(g^{-1}(z)\big) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g\ o\ f$ est une bijection de X dans Z et $(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}\ o\ g^{-1}$.

IV – Un exemple d'application

1. Étude d'une application

Étude de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (s = x_1 + x_2,\ p = x_1 x_2)$.

Problème : $*$ f est-elle injective ? Surjective ?
$*$ Calculer $f(\mathbb{R}^2)$.
$*$ Trouver des restrictions bijectives.

Soient s et p donnés. On étudie l'équation $f(x_1, x_2) = (s, p) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$

Analyse : On doit avoir $x_2 = s - x_1$ et donc $x_1(s - x_1) = p$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = s - x_1 \\ x_1(s - x_1) = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = s - x_1 \\ {x_1}^2 - s x_1 + p = 0 = Q(x_1) \end{cases}.$$

On se retrouve donc avec un polynôme Q défini par $Q(x) = x^2 - sx + p$. On doit avoir x_1 racine de Q.

Condition nécessaire et suffisante d'existence de racine : $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$.

Synthèse : Si $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$ alors Q a des racines. On note x_1 une de ses racines et on pose $x_2 = s - x_1$. On a trouvé une solution de $f(x_1, x_2) = (s, p)$

Cela montre que f n'est pas surjective, et que l'image de f est le domaine

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid 4p \leq s^2\}$$

$*$ On a en fait la symétrie $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$. En effet, x_1 et x_2 jouent les mêmes rôles.
$\Rightarrow$ Elles sont toutes les deux des racines de Q.

$\Rightarrow$ f n'est pas injective. Par contre, f est injective en restriction au demi-plan

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2\}.$$

On a sur A, $x_1 = \frac{-s-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{-s+\sqrt{\Delta}}{2}$ et

$$f_{|A}{}^{-1}(s, p) = \left(\frac{-s-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-s+\sqrt{\Delta}}{2}\right) \text{ pour } (s, p) \in f(\mathbb{R}^2).$$

Cette application $f_{|A}: A \to f(\mathbb{R}^2)$ est une bijection. Il n'existe pas de domaine plus grand que

A sur laquelle f reste injective.

2. En conclusion

Il n'y a pas de méthode « miracle » qui permette de savoir si une application générale est injective, surjective ou bijective. Nous verrons par contre que des outils efficaces existent lorsque l'application est *linéaire*.