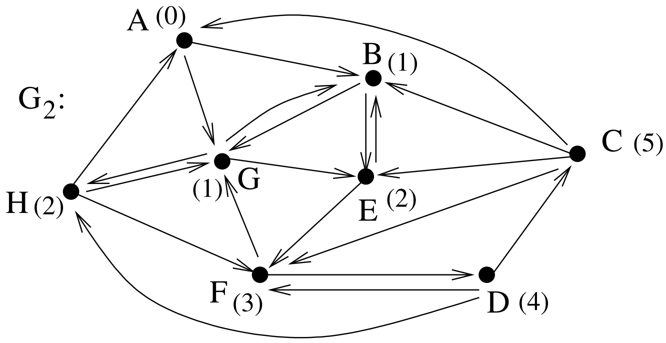
Corrigé de l'interrogation de théorie des graphes

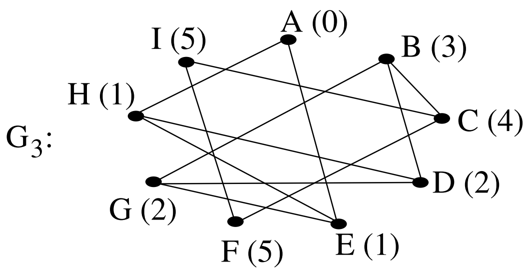
Exercice 1. On constate que les listes de degrés dans G et G' sont les mêmes. En nous aidant des degrés (qui doivent être égaux dans les 2 cas), appelons :
– dans G : $s_1 = E$, $s_2 = B$, $s_3 = C$, $s_4 = D$, $s_5 = F$,
– dans G' : $s_1 = A'$, $s_2 = E'$, $s_3 = D'$, $s_4 = F'$, $s_5 = C'$.
On a alors que $s_i s_j$ est une arête dans G si et seulement si $s_i s_j$ est une arête dans G'. Conclusion : G et G' sont isomorphes.

Exercice 2. Si on applique l'algorithme de distance en partant de A, on obtient le résultat ci-dessous.

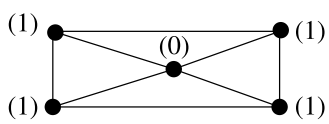


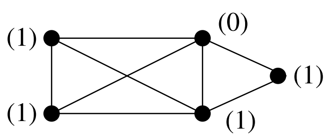
On en déduit que le distance de A vers C est 5. Recherche des chemins minimaux :
$C(5) \leftarrow D(4) \leftarrow F(3) \leftarrow H(2) \leftarrow G(1) \leftarrow A(0)$
$C(5) \leftarrow D(4) \leftarrow F(3) \leftarrow E(2) \leftarrow G(1) \leftarrow A(0)$
$C(5) \leftarrow D(4) \leftarrow F(3) \leftarrow E(2) \leftarrow B(1) \leftarrow A(0)$
Il y a 3 chemins de plus courte longueur de A vers C : AGHFDC, AGEFDC et ABEFDC,.

Exercice 3. Si on applique l'algorithme de distance/connexité en partant de A, on obtient le résultat ci-dessous. On en déduit que $G3$ est connexe, et que la composante connexe de A est G_3 tout entier.



Exercice 4. Voici deux graphes simples ayant chacun 5 sommets et 8 arêtes. Ils ne sont pas isomorphes car ils n'ont pas la même liste de degrés (la liste des degrés des sommets est 3, 3, 3, 3, 4 pour celui de gauche et 2, 3, 3, 4, 4 pour celui de droite). Ils sont connexes comme le montre l'algorithme de distance/connexité (appliqué au sommet étiqueté (0) dans chacun des graphes).

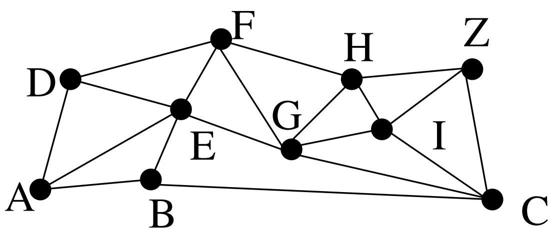




Exercice 5. S'il existe un sommet de degré $n-1$ dans un graphe simple à n sommets, ce sommet est voisin de tous les autres, donc les autres sommets ont un degré supérieur ou égal à 1. Il ne peut donc pas y avoir à la fois un sommet de degré $n-1$ et un sommet de degré 0.
Soit G un graphe simple à n sommets, et notons $d_1, \ldots, d_n$ les degrés des sommets. S'il n'y a pas de sommet de degré 0, les entiers $d_1, \ldots, d_n$ appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. On a donc n entiers dans un ensemble de $n-1$ éléments, par conséquent $d_1, \ldots, d_n$ ne peuvent pas être tous différents. De même, s'il n'y a pas de sommet de degré $n-1$, les n entiers $d_1, \ldots, d_n$ appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-2\}$, qui a $n-1$ éléments, par conséquent $d_1, \ldots, d_n$ ne peuvent pas être tous différents. Conclusion : il y a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 6. Tous les sommets de K_n (graphe complet à n sommets) sont de degré $n-1$, et K_n est connexe (tous les sommets sont voisins). Selon le théorème d'Euler, K_n a un cycle eulérien si et seulement si $n-1$ est pair, autrement dit si et seulement si n est impair.

Exercice 7. On modélise la situation par le graphe dont les sommets sont les pays et il y a une arête entre deux pays s'ils ont une frontière commune. On obtient le graphe ci-dessous. La question revient à savoir s'il existe un chemin eulérien (chemin passant une fois et une seule par chaque arête) entre A et Z. Or ce graphe a 6 sommets de degré impair (A, B, D, E, G, Z) donc, par le théorème d'Euler, il n'existe pas de chemin eulérien. Conclusion : il n'existe pas d'itinéraire répondant à la volonté du voleur.



Exercice 8. On modélise la situation par le graphe dont les sommets sont les régions et il y a une arête entre deux régions si elles ont une frontière commune. On obtient le graphe ci-dessous. La question revient à savoir s'il existe un chemin hamiltonien (chemin passant une fois et une seule par chaque sommet). Le graphe a 8 sommets, et les sommets sont de degré 4 ou 5 donc, par le théorème de Dirac, il existe un cycle hamiltonien. Conclusion : il existe un circuit répondant au souhait du guide (on peut en donner un – bien que l'exercice ne le demande pas – par exemple ACBDEFGH est un chemin hamiltonien, et ACBDEFGHA est un cycle hamiltonien).