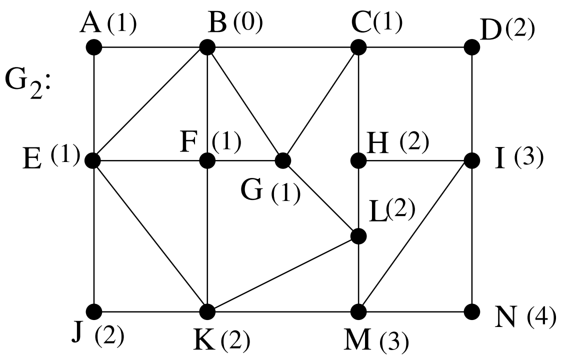
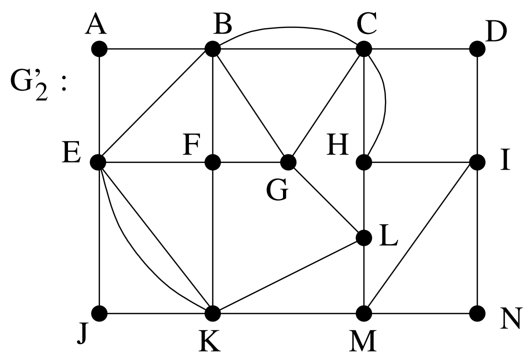
Corrigé de l'examen de maths discrètes du 7 janvier 2011

Exercice 1. On représente la situation par un graphe dont les sommets sont les personnes et il y a une arête entre deux personnes si elles se sont serrées la main. Si la situation de l'énoncé est possible, le graphe correspondant a 10 sommets, dont 5 sommets de degré 3, 2 sommets de degré 5 et 3 sommets de de degré 4, et la somme des degrés est $5 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 4 = 37$. Or le théorème des poignées de mains dit que la somme des degrés d'un graphe est toujours paire. Donc un tel graphe n'existe pas, et la situation décrite par l'énoncé est impossible.

Exercice 2.
a) La question revient à savoir s'il existe un chemin eulérien. Le graphe G_2 a 4 sommets de degré impair (B, E, H et K) donc, par le théorème d'Euler, il n'existe pas de chemin eulérien. Donc le camion-poubelle ne peut pas passer une fois et une seule par chaque rue.

b) Par a), le camion-poubelle ne peut pas partir de B, passer une fois et une seule par chaque rue et revenir en B.
Quand le camion-poubelle passe deux fois par une rue, on double l'arête correspondant à cette rue ; on appelle G_2' le nouveau graphe. Ainsi, le parcours du camion-poubelle doit correspondre à un cycle eulérien (partant de B) dans le graphe G_2'. Remarquons d'abord que G_2 est connexe, comme le montre l'algorithme de distance appliqué en partant de B (ci-dessous à gauche), donc G_2' sera encore connexe. On veut obtenir un graphe G_2' avec un cycle eulérien en doublant le moins d'arêtes possibles. Comme le graphe est connexe, le théorème d'Euler dit qu'il existe un cycle eulérien dans G_2' si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.
Le doublement d'une arête modifie les degrés des deux extrémités (chaque degré est augmenté de 1) et ne change pas les autres degrés. Comme il y a 4 sommets de degré impair, il faut ajouter au moins 2 arêtes. Si on ajoute uniquement 2 arêtes, il faudrait relier 2 à 2 les 4 sommets de degré impair, qui sont B, E, H et K (c'est la seule façon de modifier les degrés de ces 4 sommets). Ceci est impossible car H n'est voisin avec aucun des sommets B, E ou K. Il faut donc ajouter au moins 3 arêtes. Si on double les arêtes EK, BC, et CH, on obtient un graphe G_2' dont tous les sommets sont de degré pair (ci-dessous à droite), donc ce graphe a un cycle eulérien. Conclusion : le camion-poubelle doit parcourir 2 fois au minimum 3 rues.



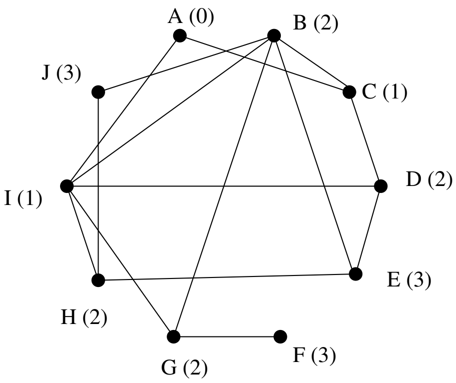


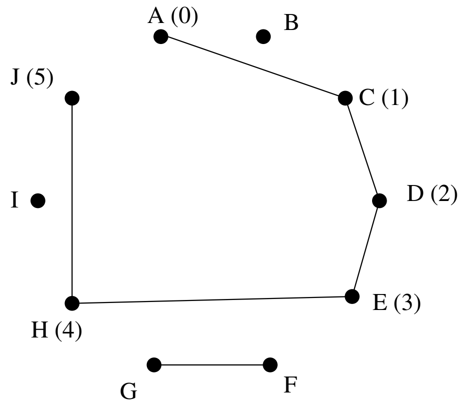
Exercice 3.
a) Le graphe G_3 a $n = 8$ sommets et tous les sommets G_3 sont de degré $4 = n/2$. Par le théorème de Dirac, le graphe G_3 admet un cycle hamiltonien.
Tous les sommets sont de degré pair et l'existence d'un cycle hamiltonien implique que G_3 est connexe. Par le théorème d'Euler, G_3 admet un cycle eulérien.
b) Si on colorie A, B, C, D en rouge et E, F, G, H en vert, on obtient un coloriage de G_3 à 2 couleurs, donc $\gamma(G_3) \leq 2$. De plus, G_3 contient des arêtes (sous-graphes complets à 2 sommets), donc $\gamma(G_3) \geq 2$. On en déduit que le nombre chromatique de G_3 est 2.

Exercice 4.
a) On représente la situation par un graphe dont les sommets sont les 10 aéroports, et il y a une arête entre deux aéroports s'il existe une liaison aérienne entre eux. On peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion si le graphe est connexe. Appliquons l'algorithme de distance en partant du sommet A. On obtient les étiquettes ci-dessous à gauche. On en déduit que le graphe est connexe, donc on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion.

b) Le nombre minimum d'avions qu'il faut prendre pour aller de A à F est la distance entre A et F dans le graphe. L'algorithme de distance en partant de A (ci-dessous à gauche) montre que cette distance est 3. Le seul itinéraire possible est : $AIGF$

c) Les aéroports B et I étant fermés, on supprime toutes les arêtes ayant B ou I comme extrémité. On obtient un nouveau graphe, dessiné ci-dessous à droite. L'algorithme de distance partant de A dans ce graphe montre que F n'est pas dans la composante connexe de A. Donc il n'est plus possible d'aller en avion de A à F.

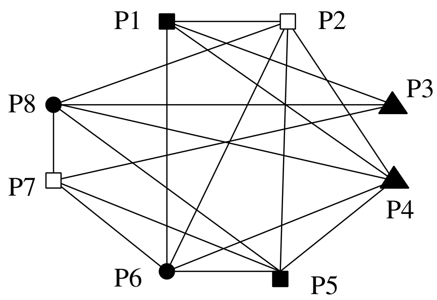




Exercice 5. La liste des degrés des sommets dans G_5 (par ordre croissant) est : 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5. La liste des degrés des sommets dans G_5' est 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5. Ces listes sont différentes, donc G_5 et G_5' ne sont pas isomorphes.

Exercice 6. On représente la situation par un graphe dont les sommets sont les 8 produits chimiques et il y a une arête entre deux produits chimiques s'ils sont incompatibles. On obtient le graphe G_6 ci-dessous. Une répartition possible dans des camions correspond à un coloriage de ce graphe (une couleur correspondant à un camion), le nombre minimal de camions nécessaires pour transporter ces produits est donc égal au nombre chromatique de G_6.
Les sommets P2, P4, P5, P8 forment un sous-graphe complet à 4 sommets, donc $\gamma(G_6) \geq 4$. De plus, le coloriage ci-dessous a 4 couleurs (rond noir, carré noir, carré blanc, triangle noir), donc $\gamma(G_6) \leq 4$. Donc on a $\gamma(G_6) = 4$.

G_6:



Conclusion : il faut au minimum 4 camions pour transporter les produits chimiques, une répartition possible est donnée par le coloriage ci-dessus : camion 1 (rond noir) : produits P6 et P8 ; camion 2 (carré noir) : produits P1 et P5 ; camion 3 (carré blanc) : produits P2 et P7 ; camion 4 (triangle noir) : produits P3 et P4.

Exercice 7.
a) Les mots aab et ababbba sont reconnus par cet automate, les mots aba et ababa ne le sont pas.
b) On remarque que, si on est au sommet final 4, alors on y reste. On voit que si on fait deux "a" consécutifs, on arrive au sommet 4, et de même si on fait deux "b" consécutifs. L'ensemble des mots reconnus par cet automate est l'ensemble des mots contenant "aa" ou "bb".

Exercice 8. Soit G un graphe simple à n sommets. Montrons par l'absurde qu'il existe deux sommets ayant des degrés égaux.
Supposons que tous les sommets aient des degrés différents. Comme G est un graphe simple, les degrés sont inférieurs ou égaux à $n-1$, donc ils appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Cet ensemble a n éléments, et le graphe a n sommets. Donc les degrés des sommets prennent toutes les valeurs de cet ensemble : la liste des degrés de G est $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Soit s le sommet de degré $n-1$ et s' le sommet de degré 0. Comme $d(s) = n-1$ et que G est simple, s est voisin de tous les autres sommets, en particulier s est voisin de s'. Ceci contredit le fait que $d(s') = 0$. Conclusion : les sommets ne peuvent pas avoir des degrés tous différents, donc il existe au moins deux sommet ayant le même degré.