Théorème.
Soit G un graphe simple et r le degré maximal des sommets. Alors $\gamma(G) \leq r+1$.

Preuve.
Soit n le nombre de sommets de G et $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ l'ensemble des sommets. Pour tout k entre 1 et n, on note $S_k = \{s_1, \ldots, s_k\}$ l'ensemble des k premiers sommets. Montrons par récurrence sur k que S_k peut être colorié avec au plus $r+1$ couleurs.

- $S_1 = \{s_1\}$ a un seul sommet, il peut donc être colorié avec au plus $r+1$ couleurs puisqu'une seule couleur suffit. C'est la propriété au rang $k=1$.
- Supposons que S_k est colorié avec au plus $r+1$ couleurs. On obtient S_{k+1} en ajoutant le sommet s_{k+1} à l'ensemble S_k. Comme $d(s_{k+1}) \leq r$ par définition de r, le sommet s_{k+1} est adjacent à au plus r sommets de S_k. Par conséquent, parmi les $r+1$ couleurs, il existe au moins une couleur non utilisée pour colorier les sommets de S_k adjacents à s_{k+1}. En donnant cette couleur à s_{k+1}, on obtient un coloriage de S_{k+1} avec au plus $r+1$ couleurs. C'est la propriété au rang $k+1$.
- Conclusion de la récurrence : pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, S_k peut être colorié avec au plus $r+1$ couleurs.

En particulier, pour $k=n$ on a obtenu un coloriage de $S = S_n$, ce qui prouve le théorème.