FEUILLE D'EXERCICES No 4

1) Formuler l'énoncé suivant en termes de graphe : "Dans un groupe de n personnes ($n \geq 2$), il existe au moins 2 personnes ayant le même nombre d'amis dans ce groupe". Démontrer cette propriété.

2) Mr et Mme Simpson assistent à une réunion. Il y a 3 autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. On suppose que a) personne ne serre sa propre main ; b) les époux ne se serrent pas la main ; c) deux personnes se serrent la main au plus 1 fois. Homer constate que les 7 autres ont échangé des poignées de main en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains, Marge et son mari Homer ont-ils échangé avec les autres membres ?

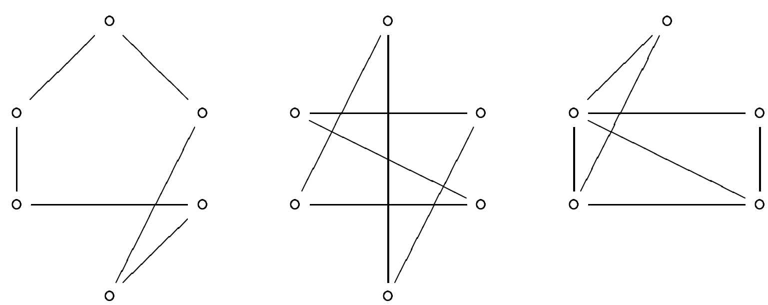
3) Peut-on construire un graphe simple ayant :
a) 4 sommets et 7 arêtes ? b) 5 sommets et 11 arêtes ? c) 10 sommets et 46 arêtes ?

4) Dessiner les graphes ayant 3, 4, 5, 6 sommets dont tous les sommets sont de degré 2.

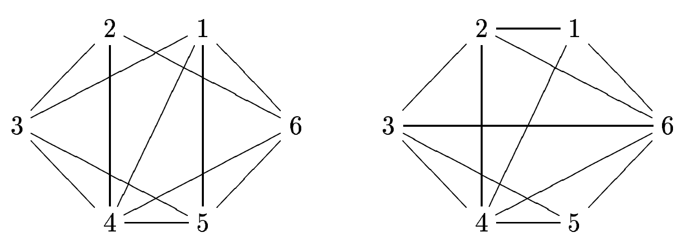
5) Dessiner les graphes suivants :
a) Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
b) Les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
c) Graphe associé à la situation : trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

6) Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions. Tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement. Deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun. Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

7) Décider si les dessins suivants représentent les mêmes graphes :



8) Les 2 graphes représentés sont-ils isomorphes ?



9) Montrer que dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.

10) Montrer que le nombre total de gens qui ont habité la Terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

11) Dans un groupe de 20 enfants, est-il possible que 7 d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, 9 d'entre eux en aient exactement 4, et 4 d'entre eux exactement 5 ?

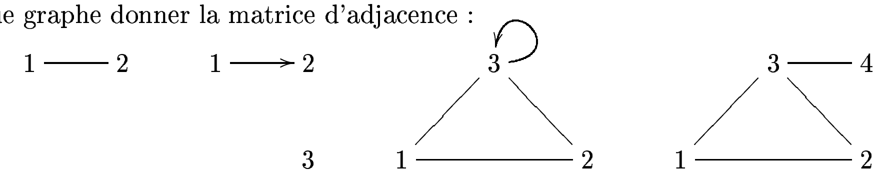
12) Soit (X, A) un graphe orienté, on rappelle que $d^+(x)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant x comme extrémité initiale et $d^-(x)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant x comme extrémité finale.
a) Montrer que $\sum_{x\in X} d^+(x) = \sum_{x\in X} d^-(x)$.
b) Un tournoi de football intercommunal réunit 7 équipes. Chaque équipe rencontre toutes les autres équipes, soit à domicile, soit dans le stade de la commune adverse. Le stade de la commune A étant innondé, l'équipe A ne jouera aucun match à domicile. On voudrait que les autres équipes jouent exactement la moitié des matchs à domicile. Est-ce possible ?

13) Une personne souhaiterait inviter six amis que nous désignons par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Malheureusement, certains de ces six amis ont des relations difficiles :

1 a des relations difficiles avec 2
2 a des relations difficiles avec 1, 5, 6
3 a des relations difficiles avec 5
4 a des relations difficiles avec 5
5 a des relations difficiles avec 2, 3, 4, 6
6 a des relations difficiles avec 2, 5

a) Représenter cette situation par un graphe dans lequel 2 personnes pouvant être invitées en même temps sont reliées par une arête.
b) Ce graphe est-il complet ? Chercher un sous-graphe complet ayant le plus grand nombre de sommets.
c) Combien de personnes au maximum peuvent-elles être invitées sans risque d'avoir une ambiance difficile ? Lesquelles ?

14) Pour chaque graphe donner la matrice d'adjacence :



15) Construire un graphe admettant pour matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16) Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ?

17) Un graphe simple à $2p$ sommets est tel que chacun de ses sommets est de degré au moins p. Montrer que ce graphe est connexe. A-t-on le même résultat pour un graphe simple à n sommets tel que chacun de ses sommets soit de degré $\geq \frac{n-1}{2}$?

18) Problème des seaux : On a 3 seaux A, B, C de contenance respectives 5, 3 et 2 litres. Au départ A est plein et les autres sont vides. On autorise l'opération qui consiste à transvaser le seau X dans le seau Y jusqu'à ce que X soit vide ou Y soit plein. Peut-on arriver de cette façon à ce qu'un des seaux contienne 1 litre ? Peut-on obtenir 2 litres dans le seau A, 2 litres dans le seau B et 1 litre dans le seau C ? Tracer le graphe orienté dont les sommets sont les triplets (a, b, c) vérifiant $a + b + c = 5$, avec une flèche quand on peut passer d'une configuration à une autre.

19) Les graphes des exercices 7, 8, 14 sont-ils connexes ? Trouver la composante connexe de chacun des sommets dans les graphes suivants :