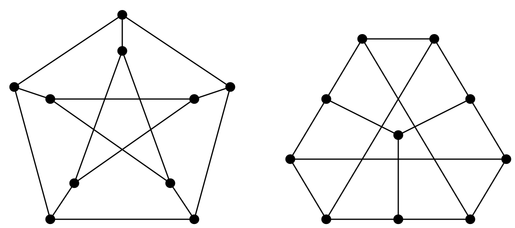
Feuille d'exercices n^o 5 (Graphes)

Novembre 2005

Exercice 1. Soit $n \geq 3$ un entier. Calculer le diamètre du graphe C_n représenté par un polygone à n côtés (appelé “graphe cyclique”), et le diamètre du graphe complet à n sommets K_n.

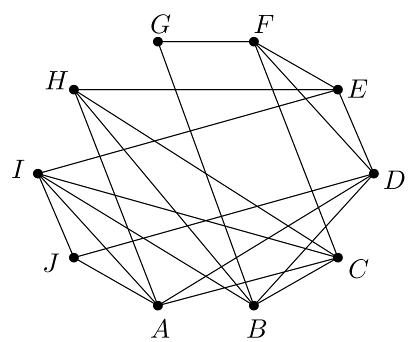
Exercice 2. Calculer le diamètre du graphe formé par les sommets et les arêtes d'un cube.

Exercice 3. Calculer le diamètre de chacun des graphes suivants (on pourra éventuellement montrer d'abord qu'ils sont isomorphes).



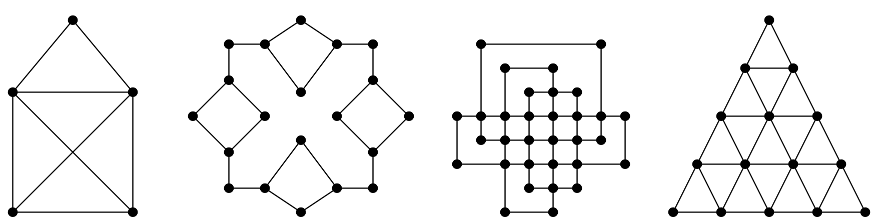
Exercice 4. Soit G un graphe à 20 sommets $s_1, s_2, \ldots, s_{20}$. On suppose que s_i est relié à s_j si et seulement si $i \neq j$ et $|i-j|$ est multiple de 4 ou de 5. Le graphe G est-il connexe ? Si oui, calculer son diamètre (on pourra commencer par calculer les distances entre s_{20} et les autres sommets).

Exercice 5. Dans le graphe ci-dessous, trouver tous les plus courts chemins entre A et G.

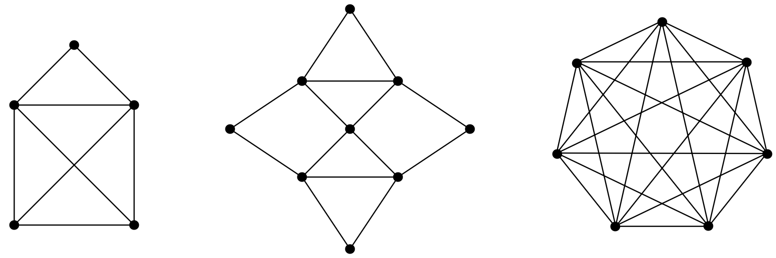


Exercice 6. Dans une ville située au confluent de deux rivières, il y a n ponts. Représenter la situation par un graphe G à 3 sommets et n arêtes, et montrer que G admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

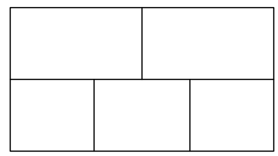
Exercice 7. Les graphes suivants admettent-ils un cycle eulérien ? Si oui, en trouver un.



Exercice 8. Les graphes suivants admettent-ils une chaîne eulérienne ? Si oui, en trouver une.



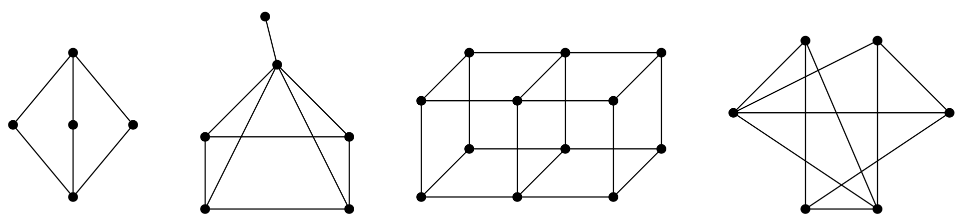
Exercice 9. On a représenté ci-dessous cinq communes avec leurs frontières. Y a-t-il une excursion qui traverse chaque frontière exactement une fois en revenant au point de départ ? Et sans revenir au point de départ ?



Exercice 10. Soit $G = (S, A)$ un graphe tel que S est l'ensemble des parties à 4 éléments de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ et $X, Y \in S$ sont reliés par une arête (de A) si et seulement si $\mathrm{Card}(X \cap Y) = 2$.
a) Soient X et Z deux éléments distincts de S. En discutant selon le cardinal de $X \cap Z$, montrer qu'il existe Y tel que XY et YZ soient des arêtes de G.
b) En déduire que G est connexe, de diamètre 2.
c) Montrer que G admet un cycle eulérien.

Exercice 11. Sept personnes dînant autour d'une table ronde se demandent combien de dîners elles peuvent organiser sans que jamais deux convives ne soient côte à côte plus d'une soirée. Donner la réponse après avoir modélisé le problème en termes de cycles hamiltoniens.

Exercice 12. Dans chacun des graphes suivants, déterminer s'il existe un cycle hamiltonien. (Si le théorème de Dirac s'applique, il est superflu de donner le cycle !)



Exercice 13. Comment trouver un digicode inconnu en frappant un nombre minimum de touches ? Cet exercice donne une solution dans le cas d'un clavier à deux touches (0 et 1). On va construire un graphe orienté dont les chaînes représentent les suites de 0 et de 1, chaque arête correspondant à la frappe d'une touche.
a) Construire un graphe orienté $G = (S, A)$ où $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, dans lequel il y a une arête orientée de (x, y) vers (x', y') si et seulement si $x' = y$. L'arête de (x, y) à (y, y') sera appelée xyy'.
Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une suite de 0 et de 1, vérifier que les sommets $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ définissent une chaîne orientée dans G et préciser les arêtes de cette chaîne. Inversement, vérifier que toute chaîne orientée correspond à une suite de 0 et de 1. Si la chaîne est de longueur n, quelle est la longueur de la suite ?
b) Trouver dans G un cycle eulérien.
c) On cherche une suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 3 caractères (par exemple $000, 111, 101$, etc) apparaît exactement une fois. Que doit vérifier la chaîne orientée associée à cette suite ? En déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété, et préciser sa longueur.
d) Par une méthode analogue, trouver une suite de 0 et de 1, de longueur minimale, dans laquelle chaque suite de 4 caractères apparaît exactement une fois (on pourra remplacer S par un ensemble à 8 éléments bien choisis).
e) Généraliser la méthode à un clavier à 10 touches.