Cycles hamiltoniens : le théorème de Dirac

Théorème Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Si $G = (S, A)$ est un graphe simple, connexe, à n sommets tel que

$$(*) \qquad (\forall (s, s') \in S \times S, s \neq s', s \text{ et} s' \text{ non adjacents }) \quad (d(s) + d(s') \geq n\ ),$$

alors, G admet un cycle hamiltonien.

Démonstration On raisonne par l'absurde.
Supposons qu'il existe des graphes simples connexes à n sommets, vérifiant $(*)$ et n'admettant pas de cycles hamiltoniens, et considérons, parmi ceux-ci, un graphe G ayant le nombre maximal d'arètes.
Le graphe G n'est pas complet, car le graphe complet admet un cycle hamiltonien. Il existe donc deux sommets distincts x et y de G non adjacents.
Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une arête a entre x et y. Etant donné l'hypothèse de maximalité faite sur G, il existe un cycle hamiltonien de G', soit C.
L'arête a figure dans C, sinon celui-ci serait un cycle hamiltonien de G ce qui contredirait les hypothèses.
On peut supposer (quitte à changer d'origine et de sens de parcours) que C s'écrit :

$$x = s_0, a_1, s_1, ..., a_{n-1}, s_{n-1} = y, a, s_n = x$$

Soient $I = \{i \in [0, n-1]\ ;\ s_i \text{ adjacent dans G à } y\}$, et $J = \{i \in [0, n-1]\ ;\ s_{i+1} \text{ adjacent dans G à } x$.
Comme x n'est pas adjacent à y et qu'un sommet n'est pas adjacent à lui-même, les ensembles I et J sont inclus dans $[0, n-2]$ (plus précisément, $I \subset [1, n-2]$, $J \subset [0, n-3]$) . Or, d'après $(*)$,

$$Card(I) + Card(J) \geq n$$

L'intersection $I \cap J$ est donc non vide ; il existe $i \in [1, n-3]$, une arête α d'extrémités $[s_i, y]$ et une arête β d'extrémité $[s_{i+1}, x]$.
Le cycle

$$x = s_0, a_1, s_2, ..., s_i, \alpha, y = s_{n-1}, a_{n-1}, s_{n-2}, ..., s_{i+1}, \beta, x$$

est alors un cycle hamiltonien de G, ce qui contredit les hypothèses.