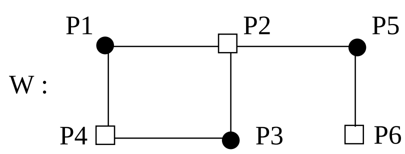
Corrigé de l'examen de maths discrètes du 16 décembre 2008

Exercice 1. a) Par le théorème des poignées de mains, la somme des degrés d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes, en particulier c'est un nombre pair. Or $1+2+2+2+3+3=13$ est impair, donc il n'existe pas de graphe à 6 sommets dont les degrés des sommets sont 1, 2, 2, 2, 3, 3.
b) Il existe un graphe simple à 4 sommets dont les sommets sont tous de degré 1, en voici un (c'est d'ailleurs le seul) :

Exercice 2. a) Tous les sommets du graphe G_1 sont de degré 3, et le sommet B' est de degré 2 dans G_2, donc les graphes G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.
b) G_1 est un graphe simple, il a 6 sommets qui sont tous de degré $3 = 6/2$. Par le théorème de Dirac, il a donc un cycle hamiltonien.
Autre méthode : on peut donner un cycle hamiltonien (par exemple $AFBECDA$), ce qui prouve que G_1 a un cycle hamiltonien.
Par le théorème d'Euler, un graphe avec un chemin eulérien a au plus 2 sommets de degré impair. Or G_1 a 6 sommets de degré impair, donc il n'a pas de chemin eulérien.

Exercice 3. a) Par le théorème d'Euler, un graphe avec un cycle eulérien a tous ses sommets de degré pair. Or $d(B) = 3$, donc G_3 n'a pas de cycle eulérien.
b) Pour obtenir un cycle eulérien en ajoutant une arête, il est nécessaire que tous les sommets du nouveau graphe soient de degré pair. Il y a exactement 2 sommets de degré impair dans G_3 : les sommets B et H. La seule façon d'obtenir un cycle eulérien est d'ajouter l'arête BH.
Les degrés des sommets dans le nouveau graphe sont alors : $d(A) = 4$, $d(B) = 4$, $d(C) = 4$, $d(D) = 4$, $d(E) = 2$, $d(F) = 4$, $d(G) = 4$, $d(H) = 4$. Les sommets sont donc tous de degré pair. Ceci ne suffit pas à prouver l'existence d'un cycle eulérien. Il y a 2 méthodes pour finir l'exercice.
Méthode 1 : montrer que le nouveau graphe est connexe et utiliser le théorème d'Euler (qui dit qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair a un cycle eulérien) pour prouver l'existence d'un cycle eulérien, puis construire un cycle eulérien.
Méthode 2 : construire directement un cycle eulérien (ce qui prouve bien sûr son existence). Par exemple, $ABCDFEADHGFCGBHA$ est un cycle eulérien dans le nouveau graphe.

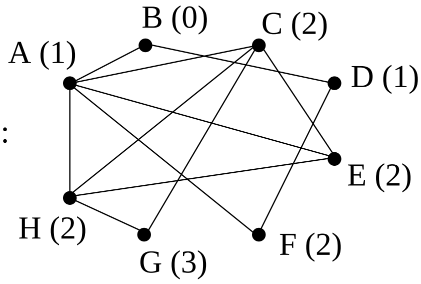
Exercice 4 On modélise la situation par un graphe dont les sommets sont les produits chimiques P1, P2, P3, P4, P5, P6, et il y a une arête entre deux sommets si les deux produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même wagon. On obtient le graphe W ci-dessous.
Plusieurs produits chimiques peuvent être mis dans le même wagon si les sommets correspondant sont un sous-ensemble stable de sommets. Le problème revient donc à partitionner les sommets en sous-ensembles stables, c'est-à-dire à colorier le graphe. On veut minimiser le nombre de wagons, c'est-à-dire minimiser le nombre de couleurs. En terme de théorie des graphes, la question devient : trouver le nombre chromatique du graphe W, puis donner un coloriage avec ce nombre de couleurs.
Le dessin ci-contre montre qu'on peut colorier le graphe avec 2 couleurs (ronds noirs et carrés blancs). De plus, il faut au moins 2 couleurs puisque le graphe contient des arêtes. Le nombre chromatique est donc égal à 2.



Conclusion : il faut au moins 2 wagons pour transporter ces produits, et une répartition possible des produits chimiques est :
– wagon 1 : P1, P3, P5,
– wagon 2 : P2, P4, P6.

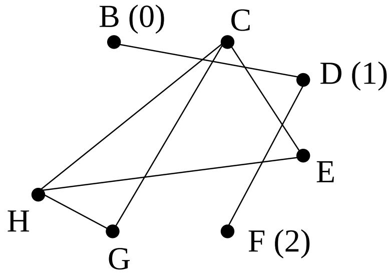
Exercice 5. a) On peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion si et seulement si le graphe G_4 est connexe. Si on applique l'algorithme de connexité en partant du sommet B, on obtient les étiquettes ci-contre. Tous les sommets ont une étiquette. Conclusion : le graphe est connexe, et on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion.

G_4 :



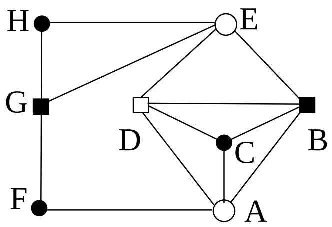
b) L'algorithme de distance est le même que l'algorithme de connexité. Les étiquettes ci-dessus montrent la distance entre B et G dans G_4 est égale à 3. Conclusion : il faut prendre au minimum 3 avions pour aller de B à G.

c) Si on supprime le sommet A (et les arêtes d'extrémité A), on obtient le graphe ci-dessous. On applique l'algorithme de connexité en partant de B, et on obtient les étiquettes ci-contre. Les sommets n'ont pas tous une étiquette, donc le graphe n'est pas connexe. On ne peut plus aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion (par exemple, on ne peut plus aller de B à C).



Exercice 6. a) On représente la carte par un graphe : les sommets sont les pays, il y a une arête entre deux sommets ont une frontière commune. On obtient le graphe G_5 ci-dessous. Colorier la carte avec le minimum de couleurs revient à colorier G_5 avec le minimum de couleurs.
A, B, C, D forment un sous-graphe complet à 4 sommets, donc $\gamma(G_5) \geq 4$. Le coloriage ci-dessous montre qu'on peut colorier le graphe avec 4 couleurs (sur le dessin, les couleurs sont : rond blanc, carré noir, rond noir, carré blanc), donc $\gamma(G_5) \leq 4$. On a donc $\gamma(G_5) = 4$.

G_5 :



Conclusion : il faut au minimum 4 couleurs pour colorier la carte. Un coloriage possible est :
– en rouge : A et E,
– en bleu : B et G,
– en vert : C, F et H,
– en jaune : D.

b) Un chemin sur la carte entre A et H correspond à un chemin dans G_5 entre A et H, et le nombre de frontières franchies est égale au nombre d'arêtes du chemin. Le nombre minimal de frontières à franchir est donc égale à la distance entre A et H dans G_5.
Si on applique l'algorithme de distance à partir du sommet A, on obtient les étiquettes suivantes : étiquette 0 : A ; étiquette 1 : B, C, D, F ; étiquette 2 : E, F ; étiquette 3 : H.
La distance entre A et H est 3. Il faut donc franchir au moins 3 frontières pour aller de A à H. Un chemin possible est : AFGH.

Exercice 7. Appliquons l'algorithme de Dijkstra (tableau ci-contre).
Conclusion : le poids minimal d'un chemin entre A et D est 11, un chemin de poids minimal est ABD.

A	B	C	D
$\boxed{0}$	∞	∞	∞
	8 (A)	$\boxed{5}$ (A)	∞
	$\boxed{8}$ (A)		12 (C)
			$\boxed{11}$ (B)