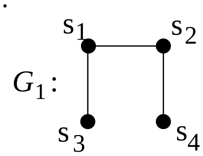
Corrigé de l'examen de Théorie des Graphes

Exercice 1. S'il existe un graphe simple $G = (S, A)$ à 5 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 1 , 2, 2, 3, alors il vérifie le théorème des poignées de mains :

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2\,\mathrm{Card} A.$$

$\sum_{s \in S} d(s) = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$. C'est un entier impair. Or $2\,\mathrm{Card} A$ est un entier pair, donc cette égalité est impossible. Donc il n'existe pas de tel graphe.

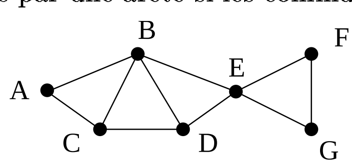
Exercice 2.
a) On note s_1, s_2, s_3, s_4 les sommets de G_1, dans l'ordre donné par la matrice A_2. Par définition de la matrice d'adjacence, le graphe G_1 est :



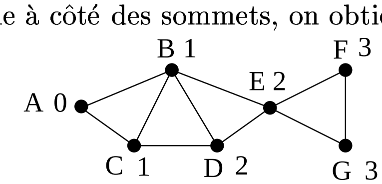
b) G_1 a 3 arêtes et G_2 a 4 arêtes, donc ils ne sont pas isomorphes.
Remarque : on peut utiliser d'autres arguments, par exemple les degrés.

Exercice 3 Dans le graphe G_3, les sommets B, C, J et K sont de degré 3. Comme il y a strictement plus de 2 sommets de degré impair, le graphe G_3 n'a pas de chaîne eulérienne ni de cycle eulérien par le théorème d'Euler.
Dans le graphe G_4, tous les sommets sont de degré pair. De plus, G_4 est connexe. Par le théorème d'Euler, G_4 a un cycle eulérien (qui est aussi une chaîne eulérienne). On applique l'algorithme pour trouver un cycle eulérien. Il y a plusieurs solutions selon la façon de s'y prendre. Par exemple :
– on fait le cycle A, B, C, H, I, F, G, H, E, B, D, F, A,
– on lui ajoute le cycle D, E, G, D,
on obtient le cycle eulérien A, B, C, H, I, F, G, H, E, B, D, E, G, D, F, A.

Exercice 4 On modélise le problème par le graphe suivant :
– les sommets sont les communes A, B, C, D, E, F, G,
– 2 sommets sont reliés par une arête si les communes correspondantes ont une frontière commune.

On obtient le graphe : 

Pour se rendre de la commune A à la commune G, il faut suivre une chaîne allant de A à G dans le graphe. Le nombre de frontières traversées est la longueur de la chaîne. Il faut donc calculer la distance entre A et G. Appliquons l'algorithme de calcul de distance en partant de A. On écrit les distances données par l'algorithme à côté des sommets, on obtient :



La distance entre A et G est 3. Conclusion : pour se rendre de la commune A à la commune G, il faut traverser au minimum 3 frontières.

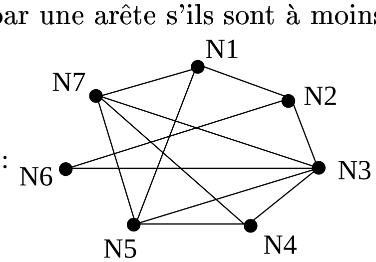
Exercice 5. Un itinéraire allant de A à Z correspond à une chaîne allant de A à Z dans le graphe G_5, et le coût des péages est le poids de la chaîne. Il faut donc chercher une chaîne de coût minimum allant de A à Z dans G_5. Appliquons l'algorithme de Dijkstra en partant du sommet A. Nous le présentons sous forme de tableau, avec une colonne par sommet. Chaque ligne correspond à une grande étape de l'algorithme, et à la fin de cette étape on entoure un sommet de poids minimum dans la ligne (sommet marqué). On écrit "–" dans une colonne pour indiquer que le sommet a fini d'être traité.
Variante pour trouver la chaîne de poids minimum : quand on change un poids, on écrit à côté le sommet entouré à la ligne précédente ; quand on ne change pas le poids, on recopie le sommet.
Voici ce qu'on obtient :

A	B	C	D	E	F	G	Z
$\boxed{0}$							
–	$\boxed{1}$ (A)				3 (A)		
–	–	7 (B)		$\boxed{3}$ (B)	3 (A)		
–	–	5 (E)		–	$\boxed{3}$ (A)		
–	–	$\boxed{5}$ (E)		–	–	8 (F)	
–	–	–	$\boxed{7}$ (C)	–	–	7 (C)	
–	–	–	–	–	–	$\boxed{7}$ (C)	9 (D)
–	–	–	–	–	–	–	$\boxed{9}$ (D)

Remarque : à certaines étapes, on a le choix entre plusieurs sommets de poids minimum. Par exemple, à la ligne 3, on aurait pu entourer le poids de la colonne F plutôt que celui de la colonne E. Ça change le tableau, mais pas le résultat.
L'algorithme de Dijkstra permet de conclure que le coût minimum de péages pour se rendre de A à Z est 9 euros.
Pour trouver une chaîne de poids minimum, on part de la fin et on lit les sommets entre parenthèses : Z, puis D (entre parenthèse à côté du poids entouré de Z), puis C (entre parenthèse à côté du poids entouré de D), puis E, B, A. Ce qui donne la chaîne de poids minimum A, B, E, C, D, Z (on peut vérifier qu'elle est de poids 9). C'est l'itinéraire qu'il faut prendre pour se rendre de A à Z de la façon la plus économique.

Exercice 6. On modélise le problème par le graphe suivant :
– les sommets sont les nichoirs N1, N2,... N7,
– 2 sommets sont reliés par une arête s'ils sont à moins de 100 mètres.

On obtient le graphe G_6 :



On attribue une couleur par espèce d'oiseau : bleu pour les mésanges, rouge pour les rouges-gorges, vert pour les pinsons. 2 nichoirs à moins de 100 mètres ne peuvent pas être occupés par la même espèce. Autrement dit, 2 sommets adjacents dans le graphe ne peuvent pas avoir la même couleur. C'est donc un problème de coloriage.
La question se reformule ainsi : est-ce que le graphe G_6 peut être colorié avec 3 couleurs ? La réponse est non : les sommets N3, N4, N5 et N7 engendrent un sous-graphe complet à 4 sommet, donc $\gamma(G_6) \geq 4$.
Remarque : $\gamma(G_6) = 4$ *mais il n'est pas nécessaire de le calculer.*