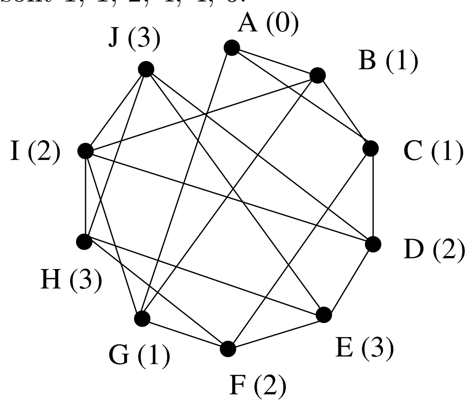
Corrigé de l'examen de maths discrètes

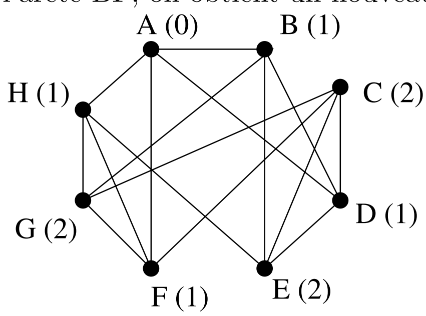
Exercice 1. a) S'il existait un graphe simple à 6 sommets de degrés 1, 2, 2, 3, 3, 4, la somme des degrés serait $1+2+2+3+3+4 = 15$, qui est impaire. Or, par le théorème des poignées de mains, la somme des degrés d'un graphe est toujours paire, donc un tel graphe n'existe pas.
b) Dans un graphe simple à 6 sommets, les degrés sont inférieurs ou égaux à 5. Comme $6 > 5$, il n'existe pas de graphe simple à 6 sommets dont les degrés sont 1, 1, 2, 4, 4, 6.

Exercice 2. a) On applique l'algorithme de distance à partir du sommet A dans G_2, on obtient le résultat ci-contre. On en déduit que la distance entre A et E est 3. On lit également les chemins de longueur minimale entre A et E à partir des étiquettes :
$E(3) \leftarrow D(2) \leftarrow C(1) \leftarrow A(0)$
$E(3) \leftarrow F(2) \leftarrow C(1) \leftarrow A(0)$
$E(3) \leftarrow F(2) \leftarrow G(1) \leftarrow A(0)$
Il y a donc 3 chemins de longueur minimale entre A et E, qui sont : ACDE, ACFE et AGFE.



b) Les sommets de G_2 sont tous de degré pair, sauf A et I ($d(A) = 3, d(I) = 5$). De plus, l'algorithme de distance ci-dessus montre que le graphe G_2 est connexe. Par le théorème d'Euler, G_2 a un chemin eulérien mais n'a pas de cycle eulérien.
Exemple de chemin eulérien : ABCDEFGIJDIBGACFHEJHI.
c) Les sommets A et I sont de degré impair dans G_2. Si on ajoute l'arête AI, les degrés de A et I dans le nouveau graphe deviennent pairs (on ajoute 1 à leur degré dans G_2) et les degrés des autres sommets sont inchangés, donc sont pairs. Le nouveau graphe est connexe car G_2 connexe. Par le théorème d'Euler, le graphe obtenu en ajoutant l'arête AI dans G_2 possède un cycle eulérien.

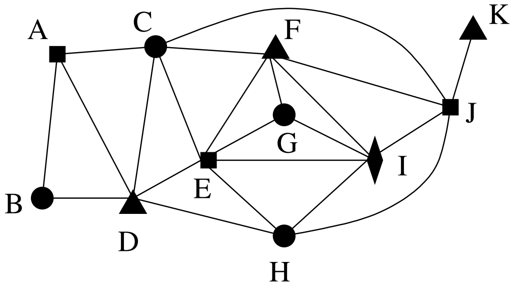
Exercice 3. a) Le graphe G_3 a 8 sommets, et chaque sommet a un degré supérieur ou égal à 4. Par le théorème de Dirac, G_3 a un cycle hamiltonien.
b) Le degré de B est égal à 5, qui est impair. Par le théorème d'Euler, le graphe G_3 n'a pas de cycle eulérien. G_3 contient 17 arêtes. Il n'existe pas de cycle eulérien, donc un chemin fermé ne passant pas deux fois par une même arête contient au plus 16 arêtes. Les sommets B et F sont de degré 5, les autres sommets sont de degré pair. Si on enlève l'arête BF, on obtient un nouveau graphe (ci-contre) dont tous les sommets sont de degré pair. De plus, ce graphe est connexe, comme le montre l'algorithme de connexité appliqué au sommet A ci-contre. Par le théorème d'Euler, ce nouveau graphe a un cycle eulérien : c'est un chemin fermé dans G_3 ne passant pas deux fois par une même arête et passant par toutes les arêtes de G_3 sauf BF. Conclusion : le nombre maximal d'arêtes que peut contenir un chemin fermé ne passant pas deux fois par une même arête est 16.



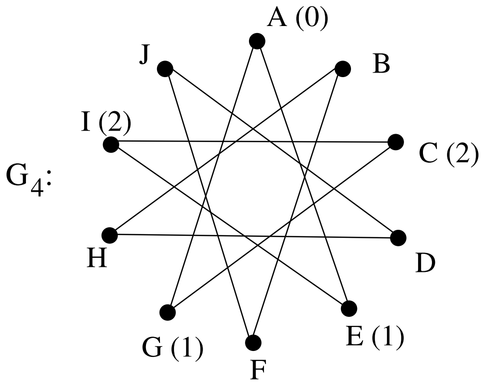
Exercice 4. On modélise le problème par le graphe dont les sommets sont les régions, et deux régions sont reliées par une arête si elles ont une frontière commune. On obtient le graphe ci-dessous. La question devient : quel est le nombre chromatique de ce graphe et comment colorier le graphe avec ce nombre de couleurs ? Notons γ le nombre chromatique de ce graphe. Les sommets E, F, G, I forment un sous-graphe complet à 4 sommets, donc $\gamma \geq 4$. Par ailleurs, on peut colorier ce graphe avec 4 couleurs, comme indiqué ci-dessous (les "couleurs" sont : rond, carré, triangle,

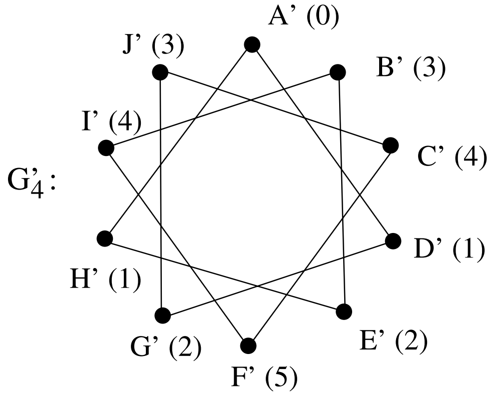
losange), donc $\gamma \leq 4$. Donc $\gamma = 4$ et le coloriage ci-dessous donne un coloriage avec le minimum de couleurs.

Conclusion : le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier la carte est 4, une façon de colorier la carte est :
– B, C, G, H en rouge (rond),
– A, E, J en bleu (carré),
– D, F, K en vert (triangle),
– I en jaune (losange).



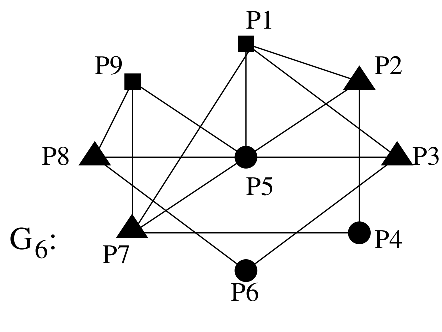
Exercice 5. a) On applique l'algorithme de connexité à G_4 et G'_4 en partant de A pour G_4 et de A' pour G'_4, on obtient le résultat ci-dessous. Conclusion : G_4 n'est pas connexe et G'_4 est connexe.





b) Par a), G_4 n'est pas connexe alors que G'_4 est connexe, donc ils ne sont pas isomorphes.

Exercice 6. On modélise le problème par le graphe dont les sommets sont les 9 espèces de poissons et deux espèces sont reliées par une arête si elles **ne peuvent pas** être mises dans le même aquarium. On obtient le graphe G_6 ci-dessous. Des espèces pouvant cohabiter forment alors un sous-ensemble stable de sommets. La question devient : quel est le nombre chromatique de ce graphe et comment colorier le graphe avec ce nombre de couleurs ? Les sommets P1, P2, P5 forment un sous-graphe complet à 3 sommets, donc $\gamma(G_6) \geq 3$. De plus, on peut colorier G_6 avec 3 couleurs, comme indiqué ci-contre (les "couleurs" sont : rond, carré, triangle), donc $\gamma(G_6) \leq 3$. On a donc $\gamma(G_6) = 3$. Conclusion : il faut au minimum 3 aquariums, une répartition possible des poissons est donnée par le coloriage :
– aquarium 1 : espèces P4, P5, P6 (rond),
– aquarium 2 : espèces P1, P9 (carré),
– aquarium 3 : espèces P2, P3, P7, P8 (triangle).



Exercice 7. a) Les mots "aaa" et "abab" ne sont pas reconnus par cet automate, les mots "aba" et "aabb" sont reconnus.

b) Voici un automate reconnaissant les mots finissant par "aa" ou "bb" :