Feuille d'exercices n^{0}2

Exercice 1. Déterminer

1. $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$ et
2. $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Le tour du monde de Magellan a duré 19 464 heures (fictif). Cela représente-t-il un nombre entier de jours ?

Exercice 3. Soit $a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$ l'écriture décimale d'un entier n. Montrer que

$$n \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i \ (11).$$

En déduire un critère de divisibilité par 11 par analogie avec le critère de divisibilité par 9.
Les nombres 6435 et 7812 sont-ils divisibles par 11 ?
Pouvez-vous inventer un critère de divisibilité par 99 ?

Exercice 4. Pierre fait une course de vélo de plusieurs jours. Il y a des étapes longues de 169831m et des étapes courtes, de 87426m. A la fin il a parcouru 1363669m. Combien a-t-il fait d'étapes longues ? (Indication : on pourra raisonner modulo 9).

Exercice 5.

1. Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1\ (8)$.
2. Montrer de même que tout nombre pair n vérifie $n^2 \equiv 0\ (8)$ ou $n^2 \equiv 4\ (8)$.
3. Quels sont les entiens x et y tels que $x^2 + y^2 \equiv 2\ (8)$?

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.

1. $x^2 \equiv 3\ (6)$
2. $x^3 \equiv 2\ (9)$

Exercice 7. Soient a et b deux entiers tels que $a^2 + b^2$ soit divisible par 7. Montrer que a et b sont divisibles par 7.

Exercice 8.

1. Calculer $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n > 1$.

Exercice 9.

1. La classe de 18 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
2. La classe de 38 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
3. La classe de 42 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

Exercice 10. Déterminer tous les entiers a tels que 6 divise $a^{10} + 1$.

Exercice 11.

1. Quel est le nombre d'inversibles dans $\mathbb{Z}/401\mathbb{Z}$?
2. Quel est le nombre d'inversibles dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?

Exercice 12. On se place dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $\bar{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
b) l'ensemble des multiples de $\bar{x}$ est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 13. Quels sont les multiples de la classe de 21 dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$?

Exercice 14. Combien d'éléments $\bar{x}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ vérifient $\bar{4}\bar{x} = \bar{0}$?

Exercice 15.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que si $\bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément inversible d'inverse $\bar{x}$, alors $\bar{x} = \bar{1}$ ou $\bar{x} = \overline{-1}$.
2. Montrer que si p est un nombre premier alors $(p-1)! \equiv -1 \ (p)$. (Indication : on pourra utiliser la question 1 et regrouper certains termes du produit).
3. Montrer que si $(p-1)! \equiv -1 \ (p)$ alors p est un nombre premier.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations :
a) $35x \equiv 7 \ (4)$
b) $22x \equiv 33 \ (5)$

Exercice 17. Résoudre $402x \equiv 44 \quad (2406)$

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & 4 \ (9) \\ x & \equiv & 2 \ (7) \end{array} \right.$$

Exercice 19. La comète A passe tous les 5 ans et a été observée l'année dernière. La comète B passe tous les 8 ans et a été observée il y a 2 ans. La comète C passe tous les 11 ans et a été observée il y a 8 ans. Quelle est la prochaine fois où on pourra observer ces 3 comètes la même année ?

Exercice 20. Déterminer tous les entiers n tels que $4n^2 + 1$ soit divisible par 5 et $n^2 - 3$ par 13.

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & 4 \ (6) \\ x & \equiv & 7 \ (9) \end{array} \right.$$

Exercice 22. Trouver tous les entiers x tels que $\left\{ \begin{array}{ccc} 7x & \equiv & 5 \ (19) \\ 3x & \equiv & 1 \ (11) \end{array} \right.$