Partiel de maths discrètes

2 novembre 2010 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m = n^2 + 3n - 1$. Donner une relation de Bézout entre n et m et montrer que n et m sont premiers entre eux.

Exercice 2.
a) Calculer le pgcd et le ppcm de 4^3 et de 6^5.
b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\text{pgcd}(a, b) = 6$ et $\text{ppcm}(a, b) = 24$.

Exercice 3.
a) Pour quelles valeurs de l'entier relatif a, existe-t-il des entiers relatifs x, y tels que

$$12x + 18y = a \quad ?$$

b) Pour quelles valeurs de l'entier relatif b existe-t-il des entiers relatifs x et y tels que

$$12x = 18y = b \quad ?$$

c) Un confiseur fabrique deux types de chocolats : des chocolats A pesant 12 grammes et des chocolats B pesant 18 grammes. Il fait des sachets de chocolats contenant un mélange de A et B. Peut-il faire des sachets de 150 grammes ? Si oui, déterminer les différentes répartitions possibles de chocolats A et B.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $5x \equiv 2 \ (42)$.

Exercice 5.
a) Quel est le reste de la division euclidienne de 14^{1792} par 11 ?
b) Déterminer l'entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $|a|$ est minimal et $2^{17} + 10^{42} + 132 \equiv a \ (5)$.

Exercice 6. Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x^5 = y^2$.

a) Si p est un nombre premier, montrer que p divise x si et seulement si p divise y.

b) Soit p un nombre premier, α l'exposant de p dans x et β l'exposant de p dans y. Montrer que $5\alpha = 2\beta$. En déduire qu'il existe un entier $\gamma \geq 0$ tel que $\alpha = 2\gamma$ et $\beta = 5\gamma$.

c) En déduire qu'il existe un entier z tel que $x = z^2$ et $y = z^5$.

Barème indicatif : 2,5 – 3 – 5 – 2,5 – 3 – 4