Corrigé du partiel de maths discrètes

Exercice 1.
On a : $2n^2 + 5n + 3 = 2n(n + 2) + n + 3 = (2n + 1)(n + 2) + 1$. Donc

$$1 = (2n^2 + 5n + 5) - (2n + 1)(n + 2).$$

Par le théorème de Bézout, ceci implique que $2n^2 + 5n + 3$ et $n + 2$ sont premiers entre eux, et $(2n^2 + 5n + 3) - (2n + 1)(n + 2) = 1$ est une relation de Bézout entre ces deux nombres.

Exercice 2.
a) $a = 10^5 = (2\times5)^5$. La décomposition de a en produit de nombres premiers est donc $a = 2^5\times5^5$.

b) La décomposition en produit de nombres premiers de 4^n est $4^n = 2^{2n}$. Donc 4^n divise a si et seulement si $4n \leq 5$, ce qui équivaut à $n = 0, 1$ ou 2.

c) $14 = 2 \times 7$ (décomposition en produit de nombres premiers). Donc
• si $n = 0$, $4^n = 1$, $\mathrm{pgcd}(4^0, 14) = 1$ et $\mathrm{ppcm}(4^0, 14) = 14$.
• si $n \geq 1$, $\mathrm{pgcd}(4^n, 14) = 2$ et $\mathrm{ppcm}(4^n, 14) = 2^n \times 7$.

Exercice 3.
a) 5 et 2 sont premiers entre eux, et $5 - 2 \times 2 = 1$ est une relation de Bézout entre 5 et 2. On en déduit que $x_0 = c$ et $y_0 = -2c$ forment une solution particulière de $5x + 2y = c$.

Si (x, y) est une solution de cette équation, alors $5x+2y = 5x_0+2y_0$, donc $5(x-x_0) = -2(y-y_0)$. Par conséquent, 5 divise $2(y - y_0)$; comme 2 et 5 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 5 divise $y - y_0$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 5k$. On en déduit que $x - x_0 = -2k$. Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = -2k$ et $y - y_0 = 5k$, alors (x, y) est une solution de l'équation.
Conclusion : l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5x + 2y = c$ est : $\{(c - 2k, -2c + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Soit x le nombre de pizzas achetées, et y le nombre de paquets de chips. Paul dépense exactement 41 euros, autrement dit $5x+2y = 41$. C'est l'équation de la question a) avec $c = 41$. Les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de $5x+2y = 41$ sont donc : $x = 41-2k, y = -82+5k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On cherche les solutions avec x, y entiers naturels, il faut donc :
• $x = 41 - 2k \geq 0$, soit $k \leq 20$,
• $y = -82 + 5k \geq 0$, soit $k \geq 17$.

Conclusion : les couples (x, y) solutions du problème de Paul sont $x = 41 - 2k, y = -82 + 5k$, avec $k = 17, 18, 19$ ou 20. Il y a 4 solutions. La solution permettant à Paul d'acheter le plus de pizzas (c'est-à-dire x maximal) correspond à $k = 17$, on a alors $x = 7$ et $y = 3$: Paul achète 7 pizzas et 3 paquets de chips.

Exercice 4.
On a : $7 \equiv 1\ (3)$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n \equiv 1\ (3)$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $7^n - 1$.

Exercice 5.
a) $10 \equiv 3\ (7)$, donc
$10^2 \equiv 3^2 \equiv 2\ (7)$,
$10^3 \equiv 10^2 \times 10 \equiv 6 \equiv -1\ (7)$,
$10^4 \equiv 10^3 \times 10 \equiv -3 \equiv 4\ (7)$,
$10^5 \equiv 10^3 \times 10^2 \equiv -2 \equiv 5\ (7)$.
Les restes modulo 7 de $10, 10^2, 10^3, 10^4$ et 10^5 sont donc, dans l'ordre : 3, 2, 6, 4, 5.

b) $111\,111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$ donc $111\,111 \equiv -2 - 3 - 1 + 2 + 3 + 1 \equiv 0\ (7)$.
Conclusion : 111 111 est multiple de 7.

Exercice 6.
Appliquons l'algorithme d'Euclide à 50 et 11 :

$$\begin{array}{ccccc} 50 & = & 4 \times 11 & + & 6 \\ 11 & = & 6 & + & 5 \\ 6 & = & 5 & + & 1 \\ 5 & = & 5 \times 1 & + & 0 \end{array}$$

Donc $\text{pgcd}(50, 11) = 1$ et

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2 \times 6 - 11 = 2(50 - 4 \times 11) - 11 = 2 \times 50 - 9 \times 11.$$

C'est une relation de Bézout entre 50 et 11, on en déduit que $u = -9$ vérifie $11u \equiv 1\ (50)$. Par conséquent, l'équation $11x \equiv 5\ (50)$ est équivalente à $x \equiv 5u (50)$, soit $x \equiv -45 \equiv 5\ (50)$.
Conclusion : l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels que $11x \equiv 5\ (50)$ est $\{5 + 50k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7.
Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 8$, $\text{pgcd}(a, c) = 15$ et $\text{pgcd}(b, c) = 3$.
3 divise b car $\text{pgcd}(b, c) = 3$. De plus, 3 divise a car $\text{pgcd}(a, c) = 15 = 3 \times 5$. Donc 3 est un diviseur commun à a et b, donc 3 divise $\text{pgcd}(a, b)$. Or $\text{pgcd}(a, b) = 8$ n'est pas divisible par 3.
Conclusion : trois tels entiers a, b, c n'existent pas.