Partiel de maths discrètes : arithmétique

30 octobre 2007 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.
a) Montrer que 31 est un nombre premier.
b) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{94} par 31 ?

Exercice 2. Peut-on trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que $\text{pgcd}(a, b) = 10$, $\text{pgcd}(a, c) = 15$ et $\text{pgcd}(b, c) = 3$?

Exercice 3.
a) Soit $c \in \mathbb{Z}$. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $7x - 10y = c$.
b) Ariane et Sophie vont jouer au jardin du Luxembourg. Ariane fait des tours de manège qui durent 7 minutes, alors que Sophie fait des tours à poney qui durent 10 minutes. Déterminer le nombre minimum de tours qu'elles doivent faire chacune pour finir en même temps, sachant que Sophie a commencé 4 minutes après Ariane.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers relatifs x tels que

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 & (5) \\ x & \equiv & 2 & (12) \end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer tous les entiers relatifs x tels que $3x \equiv 2$ (8).

Exercice 6. On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 7z^2$, avec x, y, z des entiers naturels.
a) Parmi les entiers $0, 1, \ldots, 6$, quels sont ceux qui sont congrus à un carré modulo 7 ?
b) Montrer que : $x^2 + y^2 \equiv 0$ (7) si et seulement si $x \equiv 0$ (7) et $y \equiv 0$ (7).
c) Déduire de ce qui précède que si (a, b, c) est une solution de (E) alors a et b sont divisibles par 7. En déduire que c^2 est divisible par 7, puis que c est divisible par 7 .
d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que (a, b, c) est une solution de (E) telle que 7^r divise a, b et c. Notons a', b', c' les entiers tels que $a = 7^r a'$, $b = 7^r b'$ et $c = 7^r c'$. Montrer que (a', b', c') est aussi une solution de (E).
e) En déduire que $(0, 0, 0)$ est l'unique solution de (E) *(on pourra raisonner par l'absurde).*

Barème indicatif : 4 - 2 - 4 - 3 - 2 - 6