Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Faire la liste de tous les diviseurs de 12.

Exercice 2. Montrer par récurrence que si a est un entier impair, alors 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 3. Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

Exercice 4. Déterminer les entiers naturels n tels que $n \mid n + 8$.

Exercice 5. Quel jour de la semaine sera le 19 septembre 2007 ?

Exercice 6. Calculer le pgcd et le ppcm de 195 et 143.

Exercice 7. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 8. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m + n = 101$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 3$.

Exercice 9. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant :
a) $56x + 35y = 7$.
b) $56x + 35y = 10$.

Exercice 10. Virée à Carrefour avec les copains. On a dépensé en tout 188 euros, en achetant des CD à 25 euros et des jeans à 21 euros. Combien de CD a-t-on acheté ?

Exercice 11. Déterminer tous les points (x, y) du plan dont les deux coordonnées sont des entiers, qui sont sur la droite affine d'équation $y = -\frac{8}{15}x + \frac{1}{15}$.

Exercice 12. Déterminer tous les entiers n tels que $8 \mid 15(n + 1)$.

Exercice 13. Décomposer 455 et 175 en produit de nombres premiers. En déduire $\mathrm{pgcd}(455, 175)$.

Exercice 14. Décomposer 2005 en produit de nombres premiers.

Exercice 15. L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

Exercice 16. Les nombres a et b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.
a) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
b) Si 6 divise ab, alors 6 divise a ou 6 divise b.
c) Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
d) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
e) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.

Exercice 17. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a + b, ab) = 1$,

Exercices supplémentaires

Exercice 18 (développement décimal et périodicité). Tout nombre réel a un développement décimal de la forme $a_1a_2\dots a_n, d_1d_2d_3\dots$, où les a_i et d_i sont des chiffres entre 0 et 9. On admet que tout développement décimal correspond à un nombre réel.
• $1/2 = 0,5$ a un développement décimal *fini*.
• $0,12121212\dots$ a un développement décimal *périodique*. Pour indiquer le bloc qui se répète, on écrit $x = 0,\overline{12}$.
• $31,0166666... = 31,01\overline{6}$ a un développement décimal *ultimement périodique*, c'est-à-dire que la périodicité ne commence pas tout de suite.
a) Quel est le développement décimal de $1/6$? de $7/11$?
Soit p, q des entiers strictement positifs. Montrer que le développement décimal de p/q est fini ou ultimement périodique.
b) Soit $x = 0,7777...$. Montrer que x est un rationnel. *Indication : on pourra comparer* $10x$ *et* x.
Soit x un réel strictement positif dont le développement décimal est ultimement périodique. Montrer que x est un rationnel.

Exercice 19. Soit k un entier. Montrer que $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux. Quel est le pgcd de $2k-1$ et $9k+4$?

Exercice 20. Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.
a) Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière, à condition que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets.
b) On suppose que vous devez payer une somme S, que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S = 14$, mais pas si $S = 13$ ou si $S = 15$. Montrer qu'il est toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de S telle qu'il soit impossible de payer S ?

Exercice 21. Pierre et Paul fêtent ensemble leur anniversaire. Ils invitent des copains au cinéma puis au restaurant. Certains copains n'ont pas pu rester pour le restaurant. Pierre a payé le cinéma (place à 7 euros) et Paul le restaurant (repas à 9 euros). Pour partager équitablement la dépense, Pierre a reversé 3 euros à Paul. Combien y avait-il de copains au cinéma ? au restaurant ?

Exercice 22. On rappelle que la partie fractionnaire d'un réel x est $\mathrm{frac}(x) = x - E(x)$. Soit r un rationnel non nul. Déterminer l'ensemble des valeurs que prend la partie fractionnaire de kx lorsque k décrit $\mathbf{Z}$. Soit $r = 125/256$. Trouver tous les entiers k tels que $\mathrm{frac}(kr) = 1/256$.

Exercice 23. Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 24. Par combien de zéros se termine le nombre 2005! ?

Exercice 25 (Nombres de Fermat).
a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

b) On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
c) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.