Corrigé du partiel de maths discrètes

Exercice 1.
$m = n^2 + 3n + 1 = (n+3)n - 1$, donc $1 = (n+3)n - m$. Par le théorème de Bézout, n et m sont premiers entre eux et $(n+3)n - m = 1$ une relation de Bézout entre n et m.

Exercice 2.
a) Les décompositions en produit de nombres premiers de 4^3 et de 6^5 sont : $4^3 = 2^6$ et $6^5 = 2^5 \times 3^5$. Donc $\text{pgcd}(4^3, 6^5) = 2^5$ et $\text{ppcm}(4^3, 6^5) = 2^6 \times 3^5$.

b) Comme $\text{ppcm}(a, b) = 24 = 2^3 \times 3$, les seuls nombres premiers apparaissant dans la décomposition de a et b sont 2 et 3. Donc il existe des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que $a = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2}$ et $b = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2}$. On a alors
• $\text{pgcd}(a, b) = 6 = 2 \times 3 \iff \min(\alpha_1, \beta_1) = 1$ et $\min(\alpha_2, \beta_2) = 1$,
• $\text{ppcm}(a, b) = 24 = 2^3 \times 3 \iff \max(\alpha_1, \beta_1) = 3$ et $\max(\alpha_2, \beta_2) = 1$.
Comme $\min(\alpha_2, \beta_2) = \max(\alpha_2, \beta_2) = 1$, on a nécessairement $\alpha_2 = \beta_2 = 1$.
Comme $\min(\alpha_1, \beta_1) = 1$ et $\max(\alpha_1, \beta_1) = 3$, on a soit $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 3$ soit $\alpha_1 = 3$ et $\beta_1 = 1$.
Il y a donc deux couples de solutions : $(a, b) = (6, 24)$ et $(a, b) = (24, 6)$.

Exercice 3.
a) $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, donc $\text{pgcd}(12, 18) = 2 \times 3 = 6$ (pgcd à partir de la décomposition en produits de nombres premiers). L'équation $12x + 18y = a$ admet des solutions si et seulement si a est multiple de 6.

b) Si $12x = 18y = b$, alors b est un multiple commun de 12 et de 18, donc c'est un multiple de $\text{ppcm}(12, 18)$. La décomposition en produits de nombres premiers donnée en a) montre que $\text{ppcm}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$. Donc il existe des entiers relatifs x et y tels que $12x = 18y = b$ si et seulement si b est multiple de 36.

c) Soit x le nombre de chocolats A et y le nombre de chocolats B dans un sachet. On doit avoir : $12x + 18y = 150$. De plus, x et y sont des entiers naturels.

On commence par résoudre $12x + 18y = 150$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Comme $150 = 6 \times 25$, cette équation a des solutions par a). De plus, cette équation est équivalente à : $2x + 3y = 25$ (E).
$3 - 2 = 1$ est une relation de Bézout entre 2 et 3. On en déduit que $x_0 = -25$ et $y_0 = 25$ est une solution particulière de (E). Donc $2x + 3y = 25 \iff 2(x - x_0) = -3(y - y_0)$. Si (x, y) est une solution, alors 3 divise $2(x - x_0)$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique que 3 divise $x - x_0$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 3k$. On trouve alors $y - y_0 = -2k$. Donc tout couple solution (x, y) est de la forme $x = x_0 + 3k, y = y_0 - 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie en remplaçant dans l'équation (E) que tout couple de cette forme est solution. Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $12x + 18y = 150$ sont donc $\{(-25 + 3k, 25 - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour avoir des solutions dans $\mathbb{N}$, il faut de plus $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
• $x = -25 + 3k \geq 0 \iff k \geq \frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$
• $y = 25 - 2k \geq 0 \iff k \leq \frac{25}{2} = 12 + \frac{1}{2}$.
Les différentes valeurs possibles de k sont donc $9, 10, 11$ et 12, qui correspondent aux solutions : $(2, 7), (5, 5), (8, 3), (11, 1)$.
Conclusion : le confiseur peut faire des sachets de 150 grammes et il y a quatre répartitions possibles, les nombres de chocolats A et B étant donnés par les quatre solutions précédentes.

Exercice 4.
42 et 5 sont premiers entre eux (car 5 est premier et ne divise pas 42). Appliquons l'algorithme d'Euclide à 42 et 5 :
$42 = 8 \times 5 + 2$
$5 = 2 \times 2 + 1$
$2 = 2 \times 1 + 0$
Donc

$$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (42 - 8 \times 5) = 17 \times 5 - 2 \times 42.$$

On en déduit que $17 \times 5 - 2 \times 42 = 1$ est une relation de Bézout entre 5 et 42, et que $17 \times 5 \equiv 1$ (42). Alors

$$5x \equiv 2 \ (42) \iff x \equiv 2 \times 17 \equiv 34 \ (42).$$

Conclusion : l'ensemble des entiers relatifs tels que $5x \equiv 2$ (42) est $\{34 + 42k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5.
a) $14 \equiv 3$ (11) donc $14^{1792} \equiv 3^{1792}$ (11). De plus, 11 est un nombre premier et 11 ne divise pas 3 donc, par le théorème de Fermat, $3^{10} \equiv 1$ (11). Comme $3^{1792} = (3^{10})^{179} \times 3^2$, on en déduit que $3^{1792} \equiv 1^{179} \times 9 \equiv 9$ (11). Comme $0 \leq 9 < 11$, 9 est le reste de la division euclidienne de 14^{1792} par 11.

b) $10 \equiv 0$ (5) et $132 = 13 \times 10 + 2 \equiv 2$ (5), donc $2^{17} + 10^{42} + 132 \equiv 2^{17} + 2$ (5). De plus, 5 est un nombre premier ne divisant pas 2 donc, par le théorème de Fermat, $2^4 \equiv 1$ (5). Or $2^{17} = (2^4)^4 \times 2$, donc $2^{17} \equiv 2$ (5) et $2^{17} + 10^{42} + 132 \equiv 2 + 2 \equiv 4$ (5). Donc l'ensemble des $a \in \mathbb{Z}$ tels que $2^{17} + 10^{42} + 132 \equiv a$ (5) est l'ensemble des $a \equiv 4$ (5). La plus petite valeur positive possible est $a = 4$ et la plus grande valeur négative possible est $a = -1$. Conclusion : l'entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $|a|$ est minimal et $2^{17} + 10^{42} + 133 \equiv a$ (5) est $a = -1$.

Exercice 6. Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x^5 = y^2$.

a) Si p est un nombre premier qui divise x, il divise x^5, donc il divise y^2. Donc p divise l'un des facteurs du produit $y \times y$, donc p divise y.
Inversement, on montre de manière analogue que si p divise y, alors p divise x.

b) Posons $a = x^5 = y^2$. Soit α l'exposant de p dans x et β l'exposant de p dans y. L'exposant de p dans x^5 est 5α et de même l'exposant de p dans y^2 est 2β. Il en résulte que l'exposant de p dans a est $s = 5\alpha$ et aussi $s = 2\beta$, donc $5\alpha = 2\beta$.
L'entier s étant divisible par 5 et par 2, il est divisible par 10, donc il existe un entier naturel γ tel que $s = 10\gamma$. On obtient que $\alpha = 2\gamma$ et $\beta = 5\gamma$.

c) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les différents nombres premiers intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de x ; d'après a) ce sont aussi les facteur premiers de y. D'après b) il existe des entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ tels que

$$x = p_1^{2\gamma_1} \cdot p_2^{2\gamma_2} \ldots p_r^{2\gamma_r} \quad \text{et} \quad y = p_1^{5\gamma_1} \cdot_2^{5\gamma_2} \ldots p_r^{5\gamma_r}.$$

On a donc $x = z^2$ et $y = z^5$ avec

$$z = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r}.$$