Maths discrètes – 05-06

Devoir $n^0 1$

à rendre entre le 10 et le 14 octobre
L'exercice 3 est facultatif, c'est-à-dire qu' il sera corrigé, mais n'interviendra qu'en bonification dans la note finale. Bien entendu, les étudiants de S3 sont tout particulièrement invités à le traiter.

Exercice 1. Soient $a = 26$ et $b = 47$.

(1) Montrer que a et b sont premiers entre eux.

(2) Montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $1 + au = 2 - bv$. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1$ soit multiple de a et $n - 2$ soit multiple de b.

(3) Déterminer tous les entiers n vérifiant cette propriété.

(4) Trouver la plus petite solution *positive* n.

Exercice 2. L'entier 632 est écrit en base 10, c'est-à-dire qu'on a $632 = 2 + 3 \times 10 + 6 \times 10^2$. Le but de cet exercice est de généraliser l'écriture en base 10 à une autre base a, où a est un entier supérieur ou égal à 2.

(1) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Montrer qu' il existe $h \in \mathbb{N}$ et des entiers $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_h$ tels que

$$(\star) \quad n = \lambda_0 + \lambda_1 a + ... + \lambda_h a^h \quad \text{où } \forall i, \lambda_i \in [0, a-1], \ \textit{et } \lambda_h \neq 0$$

Montrer que h et les nombres $\lambda_0, ..., \lambda_h$, sont uniquement déterminés par les conditions $(\star)$ (*indication : pour déterminer λ_0, on pourra considérer la division euclidienne de n par a*)

(2) On suppose que $a = 7$ et $n = 108$; préciser h et les λ_i.

Exercice 3. Pour tout entier $n > 0$, on note $\delta(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n (1 et n étant comptés) ; par exemple, $\delta(1) = 1$, et $\delta(p) = 2$ pour tout nombre premier p.

(1) Soient p un nombre premier ; déterminer $\delta(p^2)$ puis $\delta(p^\alpha)$ pour tout entier positif α.

(2) Soient n_1 et n_2 deux entiers strictement positifs, premiers entre eux, et soit $n = n_1 n_2$.
Montrer que quel que soit le diviseur d de n, il existe un unique diviseur d_1 de n_1 et un unique diviseur d_2 de n_2 tel que $d = d_1 d_2$. En déduire que $\delta(n) = \delta(n_1)\delta(n_2)$.

(3) Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont des nombres premiers, deux à deux distincts, et les α_i des entiers strictement positifs . Exprimer $\delta(n)$ à l'aide des α_i.
Vérifier la formule obtenue pour $\delta(n)$ lorsque $n = 24$.