Examen d'Arithmétique

5 novembre 2005 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Il faut justifier les réponses.

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif. En considérant l'expression

$$(2n^2 - 1) - (n-1)(2n+1) \ ,$$

montrer que les entiers $2n^2 - 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2. Déterminer l'entier a tel que

$$3^{27} \equiv a \ (5)$$

avec $0 \leq a < 5$.

Exercice 3.
1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif a, existe-t-il un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que

$$12x + 15y = a \quad ?$$

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif b existe-t-il des entiers relatifs x et y tels que

$$12x = 15y = b \quad ?$$

3) Peut-on découper une ficelle de 300cm en morceaux de 12 cm et de 15 cm de telle sorte qu'il n'y ait aucune perte ? Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 4. Paul et Alice vont régulièrement nager après leur travail. Paul se rend à la piscine tous les 10 jours et Alice y va tous les 7 jours. Sachant que Paul y va demain (dans 1 jour) et qu'Alice y retournera dans 5 jours, dans combien de jours s'y trouveront-ils ensemble pour la première fois ?

Exercice 5. Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $a^2 = b^3$.

1) Si p est un nombre premier, montrer que p divise a si et seulement si p divise b.

2) Soit p un nombre premier, α l'exposant de p dans a et β l'exposant de p dans b. Montrer que $2\alpha = 3\beta$. En déduire qu'il existe un entier $\gamma \geq 0$ tel que $\alpha = 3\gamma$ et $\beta = 2\gamma$.

3) En déduire qu'il existe un entier c tel que $a = c^3$ et $b = c^2$.

Barême indicatif : 3 – 3 – 5,5 – 5 – 5,5