Corrigé du partiel de maths discrètes du 28/10/2008

Exercice 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = 4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

- Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ est divisible par 9.
- On suppose que u_n est divisible par 9. $4^n = u_n - 15n - 1$, donc

$$u_{n+1} = 4 \cdot 4^n + 15(n+1) - 1 = 4(u_n - 15n + 1) + 15(n+1) - 1 = 4u_n - 45n + 18.$$

u_n est divisible par 9 par hypothèse de récurrence, 45 et 18 sont divisibles par 9, donc $u_{n+1} = 4u_n - 45n + 18$ est divisible par 9. C'est la propriété de récurrence au rang $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 2. $n^2 + 3n + 1 = n(n+2) + n + 1 \quad$ et $\quad (n+2) = (n+1) + 1$

Donc $1 = (n+2) - (n+1) = (n+2) - [(n^2+3n+1) - n(n+2)] = (n+1)(n+2) - (n^2+3n+1)$.
Le théorème de Bézout implique que $(n+2)$ et (n^2+3n+1) sont premiers entre eux.

Exercice 3. a) $10 = 2 \times 5$ et $6 = 2 \times 3$ (décomposition en produit de nombres premiers), donc $\mathrm{pgcd}(10, 6) = 2$; ce pgcd divise 46, donc l'équation $10x + 6y = 46$ a des solutions. En divisant par 2, cette équation est équivalente à $5x + 3y = 23$, et 5 et 3 sont premiers entre eux. On voit facilement que $3 \times 2 - 5 = 1$, ce qui donne une relation de Bézout entre 5 et 3 (on peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide, qui donne la même relation de Bézout).

On en déduit que $x_0 = -23, y_0 = 46$ forment une solution particulière de $5x + 3y = 23$. Si (x, y) est une solution, alors $5x + 3y = 23 = 5x_0 + 3y_0$, donc $5(x - x_0) = -3(y - y_0)$. Donc 3 divise $5(x - x_0)$. Comme 5 et 3 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique que 3 divise $(x - x_0)$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 3k$. On trouve alors $-3(y - y_0) = 5 \times 3k$, d'où $y = y_0 - 5k$. Par conséquent, les couples (x, y) solutions sont tous de la forme $x = -23 + 3k, y = 46 - 5k$. Réciproquement, on vérifie facilement que tous les couples de cette forme sont solutions de $5x + 3y = 23$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $10x + 6y = 46$ est l'ensemble des (x, y) pouvant s'écrire $x = -23 + 3k, y = 46 - 5k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants dans le groupe. Ils payent $10x + 6y$ euros. Les nombres d'adultes et d'enfants possibles sont donc les couples d'entiers naturels (x, y) solutions de $10x + 6y = 46$. Par la question a), si (x, y) est solution il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -23 + 3k$, $y = 46 - 5k$. Conditions pour avoir des entiers naturels :

- $x = -23 + 3k \geq 0 \iff k \geq 23/3 \iff k \geq 8$ car k est un entier.
- $y = 46 - 5k \geq 0 \iff k \leq 46/5 \iff k \leq 9$ car k est un entier.

Les seuls entiers k donnant des couples d'entiers naturels sont $k = 8$ et $k = 9$. Pour $k = 8$ la solution est $x = 1, y = 6$. Pour $k = 9$ la solution est $x = 4, y = 1$.

Conclusion : le groupe peut être constitué soit de 1 adulte et 6 enfants, soit de 4 adultes et 1 enfant.

Exercice 4. La décomposition en produit de nombres premiers de b est $b = 100 = 10^2 = 2^2 \times 5^2$.
La décomposition en produit de nombres premiers de a est donnée. On en déduit que :

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = 2^2 = 4 \quad \text{et} \quad \mathrm{ppcm}(a, b) = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4200.$$

Exercice 5. Comme le seul diviseur premier de $A \in \mathbb{N}$ est 7, A est non nul et sa décomposition en produit de nombres premiers est de la forme 7^α avec $\alpha \geq 1$.

Si $A = 7^\alpha$, alors l'ensemble des diviseurs positifs de A est l'ensemble des 7^i avec $i \in \{0, 1, \ldots, \alpha\}$, donc A a $\alpha + 1$ diviseurs positifs. Conclusion : $\alpha + 1 = 5$, donc $\alpha = 4$, et $A = 7^4$.

Exercice 6. 3 et 11 sont premiers entre eux (ce sont des nombres premiers différents), donc il existe u tel que $3u \equiv 1$ (11). Pour trouver u, on cherche une relation de Bézout entre 3 et 11. Soit on remarque que $4 \times 3 - 11 = 1$, soit on applique l'algorithme d'Euclide pour 3 et 11 :
$11 = 3 \times 3 + 2$
$3 = 2 + 1$
$2 = 2 \times 1 + 0$
Donc $1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \times 3) = 4 \times 3 - 11$, et $u = 4$ vérifie $3u \equiv 1$ (11).
On en déduit que l'équation $3x \equiv 5$ (11) est équivalente à $x \equiv 5 \times 4$ (11), soit $x \equiv 9$ (11). L'ensemble des solutions de $3x \equiv 5$ (11) est $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 9 \ (11)\} = \{9 + 11k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7. a) 7 est un nombre premier donc, par le théorème de Fermat, si n n'est pas divisible par 7 alors $n^6 \equiv 1$ (7). Comme $n^{60} = (n^6)^{10}$, on a : $n^{60} \equiv 1$ (7) si n n'est pas divisible par 7. Comme $0 \leq 1 < 7$, le reste de la division euclidienne de n^{60} par 7 est égal à 1 quand n n'est pas divisible par 7.
Si n est divisible par 7, alors $n \equiv 0$ (7) et donc $n^{60} \equiv 0$ (7). Comme $0 \leq 0 < 7$, le reste de la division euclidienne de n^{60} par 7 est égal à 0 quand n est divisible par 7.

b) Si n n'est pas divisible par 7, alors $n^{60} - 1 \equiv 0$ (7) par la question a), donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (7). Si n est divisible par 7, alors $n \equiv 0$ (7), donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (7). On obtient que $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 7 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c) On fait le même raisonnement que précédemment. 3 est un nombre premier donc, par le théorème de Fermat, si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 \equiv 1$ (3). Comme $n^{60} = (n^2)^{30}$, on a : $n^{60} \equiv 1$ (3), donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (3) si n n'est pas divisible par 3.
Si n est divisible par 3, alors $n \equiv 0$ (3) et donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (3)
On obtient que $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 3 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) Si n est pair, alors $n \equiv 0$ (2), donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (2).
Si n est impair, alors $n \equiv 1$ (2), donc $n^{60} \equiv 1$ (2), $n^{60} - 1 \equiv 0$ (2), et donc $n(n^{60} - 1) \equiv 0$ (2).
On obtient que $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 2 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) Par les questions b), c) et d), $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 7, 3 et 2 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme 7, 3 et 2 sont des nombres premiers distincts, ils apparaissent tous les trois dans la décomposition en produit de nombres premiers de $n(n^{60} - 1)$, et ceci implique que le produit $7 \times 3 \times 2 = 42$ divise $n(n^{60} - 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. a) $a_1 = dq_1 + r_1$ et $a_2 = dq_2 + r_2$ sont les divisions euclidiennes de a_1 et a_2 par d, donc $0 \leq r_1 < d$ et $0 \leq r_2 < d$.
$a_1 - a_2 = (dq_1 + r_1) - (dq_2 + r_2) = d(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$.
Si $r_1 \geq r_2$, alors $r_1 - r_2 \geq 0$. De plus, $r_1 - r_2 \leq r_1 < d$ car $r_2 \geq 0$.
Donc $a_1 - a_2 = d(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ est la division euclidienne de $a_1 - a_2$ par d, le quotient est $q_1 - q_2$ et le reste est $r_1 - r_2$.

b) On écrit la division euclidienne de b par $a - b$: $b = q(a - b) + r$, avec $0 \leq r < a - b$.
On a alors : $a = (a - b) + b = (a - b) + q(a - b) + r = (q + 1)(a - b) + r$. Comme $0 \leq r < a - b$, ceci est la division euclidienne de a par $a - b$: le reste est r et le quotient est $q + 1$.
Conclusion : dans les divisions euclidiennes de a et b par $a - b$, les restes sont égaux et le quotient de a par $a - b$ est égal à $q + 1$, où q est le quotient de b par $a - b$.