Corrigé du partiel de maths discrètes

Exercice 1. On écrit l'algorithme d'Euclide pour a et b :
$a = bq_1 + r_1$
$b = r_1q_2 + r_2$
$r_1 = r_2q_3 + r_3$
$r_2 = r_3q_4 + 0$
On sait que le pgcd de a et b est le dernier reste non nul, donc $r_3 = 2$. On remplace dans les égalités en partant du bas :
$r_2 = r_3q_4 = 2 \times 2 = 4$
$r_1 = r_2q_3 + r_3 = 4 \times 1 + 2 = 6$
$b = r_1q_2 + r_2 = 6 \times 3 + 4 = 22$
$a = bq_1 + r_1 = 22 \times 1 + 6 = 28$

Conclusion : $a = 28$ et $b = 22$.

Exercice 2. $6 = 2\times 3$ et $15 = 3\times 5$ (décomposition en facteurs premiers), donc $\mathrm{pgcd}(6, 15) = 3$. 3 divise $63 = 3 \times 21$, donc l'équation $6x + 15y = 63$ a des solutions. En divisant par 3, on voit que cette équation est équivalente à l'équation $2x + 5y = 21$. Appliquons l'algorithme d'Euclide à 5 et 2 (qui sont premiers entre eux) :
$5 = 2 \times 2 + 1$
$2 = 1 \times 2 + 0$
Donc $1 = 2 \times (-2) + 5$ est une relation de Bézout entre 2 et 5, et $2 \times (-2 \times 21) + 5 \times 21 = 21$, donc $(x_0, y_0) = (-42, 21)$ est une solution particulière. (x, y) est solution de l'équation si et seulement si $2x + 5y = 2x_0 + 5y_0 \iff 2(x - x_0) = -5(y - y_0)$. Comme 5 divise $2(x - x_0)$ et que 2 et 5 sont premiers entre eux, on en déduit que 5 divise $x - x_0$ (théorème de Gauss), autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 5k$. On en déduit que $y = y_0 - 2k$. On vérifie que tous les couples $(x, y) = (x_0 + 5k, y_0 - 2k)$ sont bien solutions. L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions est donc l'ensemble des $(x, y) = (-42 + 5k, 21 - 2k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

On cherche les solutions qui sont des couples d'entiers naturels.
$x = -42 + 5k \geq 0 \iff k \geq \frac{42}{5} \iff k \geq 9$ car k est un entier.
$y = 21 - 2k \geq 0 \iff k \leq \frac{21}{2} \iff k \leq 10$ car k est un entier.
Donc x et y sont tous les deux positifs si et seulement si $k = 9$ ou 10. Conclusion : il y a 2 couples d'entiers naturels solutions de l'équation.

Exercice 3. P est un entier naturel strictement positif qui doit être un multiple de 6 et 15, il est équivalent de demander que P soit un multiple strictement positif de $\mathrm{ppcm}(6, 15)$.
$6 = 2\times 3$ et $15 = 3\times 5$ (décomposition en facteurs premiers), donc $\mathrm{ppcm}(6, 15) = 2\times 3\times 5 = 30$.
Conclusion : les valeurs possibles de P sont les $30k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.
a) 7 est premier et ne divise pas 5, donc $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, autrement dit il existe un entier u tel que $5u \equiv 1\ (7)$ et $1 \leq u \leq 6$. On calcule $5u$ pour les différentes valeurs de u, on voit que $u = 1$ et $u = 2$ ne conviennent pas et que $5 \times 3 \equiv 1\ (7)$, donc $u = 3$ convient, autrement dit $\overline{3}$ est l'inverse de $\overline{5}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On sait alors que l'équation $5a \equiv 2\ (7)$ est équivalente à $3 \times 5a \equiv 3 \times 2 (7)$, c'est-à-dire $a \equiv 6\ (7)$. L'ensemble des solutions de $5a \equiv 2\ (7)$ est $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 6\ (7)\} = \{6 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) On pose $a = x^2$. Par a), $5x^2 \equiv 2\ (7) \iff x^2 \equiv 6\ (7)$. Faisons la liste des carrés modulo 7. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $r \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ tel que $x \equiv r\ (7)$.
• Si $x \equiv 0\ (7)$ alors $x^2 \equiv 0\ (7)$.
• Si $x \equiv 1\ (7)$ ou $x \equiv -1\ (7)$ alors $x^2 \equiv 1\ (7)$.
• Si $x \equiv 2\ (7)$ ou $x \equiv -2\ (7)$ alors $x^2 \equiv 4\ (7)$.
• Si $x \equiv 3\ (7)$ ou $x \equiv -3\ (7)$ alors $x^2 \equiv 9\ (7) \equiv 2\ (7)$.
Conclusion : on n'a jamais $x^2 \equiv 6\ (7)$, donc l'équation $5x^2 \equiv 2\ (7)$ n'a pas de solution.

Exercice 5. Par le petit théorème de Fermat, $2^{10} \equiv 1\ (11)$ car 11 est un nombre premier et 2 n'est pas multiple de 11.
$52 = 10 \times 5 + 2$, donc $2^{52} = (2^{10})^5 \times 2^2$ et $2^{52} \equiv 1^5 \times 2^2\ (11) \equiv 4\ (11)$.
Il existe un unique entier n tel que $2^{52} \equiv n\ (11)$ et $0 \leq n \leq 10$, donc la solution est $n = 4$.

Exercice 6.
1.a) On écrit $p^2 = 2q^2$, ce qui montre que 2 divise p^2.
2 est un nombre premier, il divise $p^2 = p \times p$, donc 2 divise nécessairement un des facteurs du produit $p \times p$, autrement dit, 2 divise p.

1.b) 2 divise p, donc il existe un entier k tel que $p = 2k$. Donc $2q^2 = p^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$. On en déduit que 2 divise $q^2 = q \times q$ donc, par le même argument que précédemment, 2 divise q.

2) Supposons que $r^2 = 2$ avec $r = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$. Si $a = 0$ alors $r^2 = 0$, ce qui est exclu, donc $a \neq 0$. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$, $p = \frac{a}{d}$ et $q = \frac{b}{d}$. Alors $r = \frac{p}{q}$ et p, q sont premiers entre eux. Par la question 1, 2 divise p et q, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux. Conclusion : il n'existe pas de nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$, autrement dit $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 7. Le problème se traduit de la façon suivante : on cherche le plus petit entier naturel x solution du système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 2\ (7) \\ x & \equiv & 1\ (10) \end{array} \right.$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide à 10 et 7 :
$10 = 7 + 3$
$7 = 2 \times 3 + 1$
$3 = 3 \times 1 + 0$
Par conséquent, $\text{pgcd}(7, 10) = 1$ et $1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - 2 \times (10 - 7) = 3 \times 7 - 2 \times 10$ (relation de Bézout entre 7 et 10).
On en déduit que $y_1 = -2 \times 10 = -20$ est une solution du système élémentaire

$$(S1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 1\ (7) \\ x & \equiv & 0\ (10) \end{array} \right.$$

et $y_2 = 3 \times 7 = 21$ est une solution du système élémentaire

$$(S2) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 0\ (7) \\ x & \equiv & 1\ (10) \end{array} \right.$$

On vérifie que $x_0 = 2y_1 + y_2$ est une solution particulière du système (S). La calcul donne $x_0 = -19$. Par le théorème des restes chinois, l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv x_0\ (7 \times 10)$, autrement dit $x = -19 + 70k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La plus petite solution positive est obtenue pour $k = 1$, c'est $x = -19 + 70 = 51$.
Conclusion : les 2 bus passeront en même temps pour la première dans 51 minutes.