Corrigé de l' Examen d'Arithmétique

Exercice 1.
On cherche le pgcd de $2n^2-1$ et $2n+1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$(2n^2-1) = (n-1)(2n+1) + n \ ,$$

$$2n+1 = (2\times n) + 1 \ .$$

Le dernier reste étant égal à 1, ces deux nombres sont premiers entre eux .

Exercice 2.
D'après le petit théorème de Fermat, 3^4 est congru à 1 modulo 5 . On en déduit :

$$3^{27} \equiv (3^4)^6 \times 3^3 \equiv 1 \times 3^3 \equiv 27 \equiv 2 \ (5)$$

donc $a = 2$.

Exercice 3. 1) D'après le cours, il existe un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que

$$12x + 15y = a$$

si, et seulement si, a est un multiple du pgcd de 12 et 15, donc, si et seulement si, a est multiple de 3.
2) L'entier relatif b est un multiple de 12 et de 15 si, et seulement si, b est un multiple de leur ppcm.
Les décompositions en facteurs premiers de ces deux nombres sont :

$$12 = 2^2 \times 3 \ , \quad 15 = 3 \times 5$$

Leur ppcm est : $2^2 \times 3 \times 5$ c'est-à-dire 60. Il y a des solutions si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $b = 60k$, et on a alors : $b = 5k \times 12 = 4k \times 15$.
3) On cherche les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

$$12m + 15n = 300$$

D'après 1), on sait qu'il existe des entiers relatifs (x, y) tels que

$$(*) \qquad 12x + 15y = 300$$

On obtient facilement

$$(-1)12 + (1)15 = 3 \quad \text{donc} \quad (-100)12 + 100(15) = 300 \ .$$

et l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$\{(5k-100, 100-4k) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Les deux nombres $5k-100$ et $4k-100$ sont positifs ou nuls si, et seulement si, $k \in [20, 25]$.
On obtient donc six solutions :

$$300 = 20\times15 = 5\times12+16\times15 = 10\times12+12\times15 = 15\times12+8\times15 = 20\times12+4\times15 = 25\times12$$

On peut aussi s'apercevoir dès le départ que 20×15*, par exemple, est une solution ; la suite de la discussion est analogue.*

Exercice 4.
Si l'on numérote les jours (le numéro 1 étant demain), les jours où Paul va à la piscine portent un numéro de la forme $1 + 10k$, c'est-à-dire congru à 1 modulo 10, et, de même, les jours où Alice va à la piscine portent un numéro congru à 5 modulo 7. On cherche donc (s'il existe) le plus petit entier n strictement positif qui est congru à 1 modulo 10 et à 5 modulo 7.
D'après le théorème chinois, le système de congruence :

$$x \equiv 1 \ (10) \quad x \equiv 5 \ (7)$$

admet des solutions dans $\mathbb{Z}$, car 7 et 10 sont premiers entre eux.
On obtient, par exemple en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$-7 \times 7 + 5 \times 10 = 1$$

L'entier -49 est donc congru à 0 modulo 7, et à 1 modulo 10, alors que 50 est congru à 1 modulo 7 et à 0 modulo 10.

$$-49 \times 1 + 50 \times 5 = 201$$

L'entier 201 vérifie les congruences :

$$201 \equiv 1 \ (10) \quad \text{et} \quad 201 \equiv 5 \ (7)$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruence considéré est :

$$\{201 + 70k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

La plus petite solution positive est obtenue avec $k = -2$. Ils se trouveront ensemble à la piscine dans 61 jours.

Exercice 5. Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $a^2 = b^3$.
1) Si p est un nombre premier qui divise a, p divise a^2, donc divise b^3. Il divise l'un des facteurs du produit $b \times b \times b$, donc divise b.
On montre de manière analogue qu'inversement, tout nombre premier qui divise b, divise a.
2) Ecrivons :

$$a = p^\alpha m \quad \text{et} \quad b = p^\beta n$$

avec m et n non divisibles par p. Posons

$$h = a^2 = b^3$$

et soit s l'exposant de p dans h. Comme p ne divise pas m, il ne divise pas m^2, donc l'exposant de p dans a^2 est 2α, et de même, l'exposant de p dans b^3 est 3β.
Il en résulte que

$$s = 2\alpha = 3\beta \ .$$

L'entier s étant divisible par 2 et par 3, est divisible par 6 , et si on pose $s = 6\gamma$, on obtient

$$\alpha = 3\gamma \quad \text{et} \quad \beta = 2\gamma \ .$$

3) Soient $p_1, p_2, ..., p_r$ les différents nombres premiers intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de a ; d'après 1) ce sont ausi les facteur premiers de b ; d'après 2) il existe des entiers $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r$ tels que

$$a = p_1^{3\gamma_1} p_2^{3\gamma_2} ... p_r^{3\gamma_r} \quad \text{et} \quad b = p_1^{2\gamma_1} p_2^{2\gamma_2} ... p_r^{2\gamma_r} \ .$$

On a donc $a = c^3$ et $b = c^2$ avec

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_r^{\gamma_r} \ .$$